Übungen zur Vorlesung Analysis I, WS08/09
Blatt 1

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Es seien A, B und C mathematische Aussagen. Überzeugen Sie sich (evtl. mit Hilfe von Wahrheitstafeln) von der Richtigkeit der folgenden Aussagen:

(a) $\big[A \vee (B \vee C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \vee B) \vee C\big]$,
(b) $\big[A \wedge (B \wedge C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \wedge B) \wedge C\big]$,
(c) $\big[A \vee (B \wedge C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \vee B) \wedge (A \vee C)\big]$,
(d) $\big[A \wedge (B \vee C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big]$,
(e) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

Überzeugen Sie sich auch von der Richtigkeit der Aussagen in Lemma 1.6 der Vorlesung!

Aufgabe 2. Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Alle Männer sind schlau und alle Frauen sind schön.
(b) Es gibt einen Tenor der nicht singen kann oder alle Schauspieler spielen schlecht.
(c) In jeder Vorlesung an der Uni gibt es mindestens einen Studierenden der immer so viel Lärm macht, dass alle anderen Studierenden nichts verstehen können.

Aufgabe 3. Diskutieren Sie mit Ihren Freunden den folgenden Induktionsbeweis:

Herr K stellt die kühne Behauptung auf, dass sich Frauen und Männer unmöglich gleichzeitig in ein und demselben geschlossenen Raum aufhalten können!

Um diese Behauptung zu belegen, beweist Herr K mit vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Halten sich n Personen in einem geschlossenen Raum auf, so haben alle dasselbe Geschlecht.

Beweis: Der Fall $n = 1$ ist klar.

Die Aussage sei nun wahr für n. Sind dann $n + 1$ Personen im Raum, so wähle eine Person aus und schicke sie hinaus. Nach obiger Annahme (die Aussage sei wahr für n) haben die im Raum verbliebenen Personen alle dasselbe Geschlecht. Wir holen die ausgewählte Person wieder herein und senden eine andere Person hinaus. Die im Raum verbliebenen n Personen haben dann wieder dasselbe Geschlecht. Damit hat die zuerst hinaus gesandte Person dasselbe Geschlecht wie alle anderen im Raum befindlichen Personen. Da dies nach dem ersten Beweisschritt auch für die als zweites hinaus gesandte Person zutrifft, haben alle $n + 1$ Personen dasselbe Geschlecht.

Aufgabe 4. Das Prinzip der vollständigen Induktion funktioniert auch wie folgt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei A_n eine Aussage.
Induktionsanfang: Zeige A_1 ist wahr.
Induktionsschluss: Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow A_{n+1}$.

Beweisen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Prinzips der vollständigen Induktion, dass nach erfolgreicher Durchführung beider Schritte die Wahrheit aller A_n bewiesen ist.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Inspektor Barrick ermittelt in einem Todesfall. Onkel Kuno wurde tot in seinem Haus aufgefunden, wo er zusammen mit Onkel Bodo und einem Gärtner lebte. Barrick hat folgende Fakten zusammengetragen:

- Kuno, Bodo und der Gärtner waren die einzigen Hausbewohner. Nur einer von ihnen kann Kuno getötet haben.
- Derjenige, der Kuno getötet hat, hat diesen gehasst und war nicht reicher als Kuno.
- Bodo hasst niemanden, den Kuno gehasst hat.
- Kuno hat sich selbst und Bodo gehasst.
- Der Gärtner hasst jeden, der nicht reicher als Kuno war oder von Kuno gehasst wurde.
- Kein Hausbewohner hasst(e) alle Hausbewohner.

Welche der nachfolgenden Schlussfolgerungen sind richtig (mit Begründung)?

(1) Wenn der Gärtner sich nicht selbst hasst, dann hat er Kuno nicht getötet.
(2) Der Gärtner war nicht reicher als Kuno.
(3) Aus den Fakten folgt nicht, ob Bodo reicher als der Gärtner ist oder nicht.
(4) Wenn der Gärtner Kuno getötet hat, dann hasst er Bodo nicht.
(5) Bodo hat Kuno getötet.

Aufgabe 2. Zu finden sind zwei natürliche Zahlen die echt zwischen 1 und 100 liegen. "Herr Produkt" kennt das Produkt der Zahlen und "Herr Summe" kennt die Summe der Zahlen. Herr Produkt und Herr Summe führen die folgende Unterhaltung:

Herr Produkt: "Ich kenne die beiden Zahlen nicht."

Herr Summe: "Ich kenne die beiden Zahlen auch nicht, aber ich wusste, dass Sie die Zahlen nicht kennen."

Herr Produkt: "Dann kenne ich die beiden Zahlen jetzt."

Herr Summe: "Dann kenne ich die beiden Zahlen jetzt auch."

Welches der folgenden Zahlenpaare ist die richtige Lösung? (Wir setzen voraus, dass eines der angegebenen Paare richtig ist!)

3 und 5, 2 und 7, 8 und 11, 4 und 13.

Bemerkung: Die oberen zwei Aufgaben wurden einem "Selbsttest für angehende Informatik-Studenten" der TU-München entnommen.

Aufgabe 3. a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2.$$

b) Zeigen Sie: Für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ und $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 24.10. 2008, 8Uhr.
(Der Abgabeort wird in den Übungen bekannt gegeben.)