Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II SS 2009
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 6
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 25.05.2009, 16:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Menge paarweise orthogonaler Vektoren der Länge 1 in V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\{v_1, \ldots, v_r\}$ ist eine Basis von V.

(ii) Ist $v \in V$ mit $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$, so gilt $v = 0$.

(iii) Für alle $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$.

(iv) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot \langle v_i, w \rangle$.

(v) Für alle $v \in V$ gilt $||v||^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $(f \circ g)^{\sim} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ und $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)^{\sim} = \overline{\lambda} \cdot \tilde{f} + \overline{\mu} \cdot \tilde{g}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(ii) Die Abbildung $f \circ \tilde{f}$ ist selbstadjungiert, und alle ihre Eigenwerte sind nicht-negative reelle Zahlen.

(iii) Sind f und g selbstadjungiert, so ist $f \circ g$ genau dann selbstadjungiert, wenn $f \circ g = g \circ f$.

Aufgabe 3: Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ eine selbstadjungierte Abbildung. Betrachten Sie für $v \in V$ und eine natürliche Zahl $m \geq 1$ die Gleichung

$$\langle f^m(v), f^m(v) \rangle = \langle f^{m-1}(v), f^{m+1}(v) \rangle.$$

Beweisen Sie hiermit über Induktion nach m, dass aus $f^m = 0$ schon $f = 0$ folgt. Mit anderen Worten: Jeder selbstadjungierte, nilpotente Endomorphismus von V ist 0. Geben Sie für diese Tatsache unter Verwendung von Satz 12 der Vorlesung einen alternativen Beweis.