Abgabe Freitag, 12. Dezember 2014, bis 10.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien X und Y zwei Banachräume, und es sei $T\colon X \to Y$ eine lineare, beschränkte Abbildung. In Aufgabe 3 auf Blatt 8 haben wir gesehen, dass T genau dann dichtes Bild hat, wenn die transponierte Abbildung $T^{\mathrm{tr}}\colon Y^* \to X^*$ injektiv ist.

In dieser Aufgabe untersuchen wir die 'duale' Fragestellung: Ist T genau dann injektiv, wenn T^{tr} dichtes Bild hat?

(a) Zeigen Sie: Wenn T^{tr} dichtes Bild hat, dann ist T injektiv.

(b) Wir betrachten nun folgendes konkretes Beispiel: Es sei $T\colon \ell^1 \to \ell^1$ die lineare, beschränkte Abbildung, welche eine Folge $(x_n)_n$ in ℓ^1 auf $(\frac{1}{n}x_n)_n$ abbildet. Zeigen Sie, dass das Bild der transponierten Abbildung $T^{\mathrm{tr}}\colon (\ell^1)^* \to (\ell^1)^*$ nicht dicht ist.

Es folgt insbesondere, dass die bitransponierte Abbildung $T^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}\colon (\ell^1)^{**} \to (\ell^1)^{**}$ nicht injektiv ist, obwohl T selber injektiv ist.

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Bitransponierte einer isometrischen Abbildung wieder isometrisch ist (und damit auch injektiv). Es gibt also auch hier einen großen Unterschied zwischen injektiven und isometrischen Abbildungen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es für jeden separablen Banachraum X eine *injektive*, lineare, beschränkte Abbildung von X nach ℓ^∞ gibt.

(b) Es sei $T\colon X \to Y$ eine bijektive, lineare, beschränkte Abbildung zwischen zwei Banachräumen. Zeigen Sie, dass X genau dann reflexiv ist, wenn Y reflexiv ist.

(c) Es sei X ein Banachraum, und es sei $T\colon X \to \ell^2$ eine injektive, lineare, beschränkte Abbildung mit abgeschlossenem Bild. Zeigen Sie, dass dann X reflexiv ist.

Nikolausaufgabe (6 Zusatzpunkte)

Wie jedes Jahr im Dezember war Nikolaus schwer damit beschäftigt, die zahlreichen Geschenke für die vielen lieben Kinder und fleißigen Studenten zu verpacken. Dazu hatte er einen großen Raum von seinem Freund Hilbert angemietet. Aber wie jedes Jahr gab es zu viel zu tun und er konnte die Arbeit nicht alleine schaffen. Deshalb hatte er eine Annonce in der Zeitung veröffentlicht (Nikolaus ist etwas altmodisch und benutzt noch kein Internet) um Freiwillige zu finden, die beim Verpacken mithelfen würden.

Zum Glück meldeten sich viele Hilfswillige. Es kamen sogar ganze Gruppen von Helfern an und fragten, wo sie zusammen im Arbeitsraum $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ einen Platz finden könnten.

(a) Um 10 Uhr kam eine Gruppe Helfer zu Nikolaus und sagte: "Ach Nikolaus, wir sind ganz wenige, nur $\mathbb{C}^5$, aber wir würden trotzdem so gerne mithelfen. Können wir uns irgendwo einfügen?"

"Kein Problem", antwortete Nikolaus und zeigte $\mathbb{C}^5$, wie sie sich ganz einfach in ℓ^2 einfügen können.

(b) Um 11 Uhr kam eine weitere Gruppe Helfer zu Nikolaus und sagte: "Mensch Nikolaus, das sieht ja nach viel Arbeit aus. Wir sind auch viele, ein ganzer Banachraum $c_0(\mathbb{N})$ voll. Denkst Du, wir können mithelfen und uns irgendwo einfügen?"

"Aber gerne", antwortete Nikolaus und zeigte $c_0(\mathbb{N})$, wie sie sich in ℓ^2 einfügen können.

(c) Um 12 Uhr kam noch eine Gruppe Helfer zu Nikolaus und sagte: "Lieber Nikolaus, wir sind eine riesige Gruppe, wir nennen uns $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Wir sind so viele, wir können noch nicht mal eine Liste aufschreiben auf der auch nur annähernd alle von uns draufstehen. Der Arbeitsraum sieht ja doch recht klein aus. Denkst du, wir passen da alle rein?"

Da überlegte Nikolaus kurz und zeigte $\ell^\infty(\mathbb{N})$ dann zu ihrer Verblüffung, wie sie sich in ℓ^2 einfügen können, wenn sie sich nur etwas bücken.