Aufgabe 1:
Sei $\pi\colon A \to B$ ein *-Homomorphismus zwischen C*-algebren A and B.
a) Für $a \in A$ normal und $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$ gilt $\pi(f(a)) = f(\pi(a))$.
Sei nun π surjektiv.
b) Können Sie für jedes selbstadjungierte $b \in B$ einen selbstadjungierten Lift in A finden, d.h. ein $a \in A_{\mathrm{sa}}$ mit $b = \pi(a)$? Wie steht es mit positiven Elementen? Kann man a mit $\|a\| = \|b\|$ wählen?
Seien nun außerdem A und B unital.
c) π ist unital. Falls $v \in B$ unitär ist mit $v = e^{ih}$ für ein selbstadjungiertes $h \in B$, dann ist $v = \pi(u)$ für ein Unitäres $u \in A$.
d) Ist ein Unitäres $v \in B$ immer von der Form $v = \pi(u)$ für ein Unitäres $u \in A$? Hinweis: Sie dürfen (ohne Beweis) benutzen, dass $\mathbb{T}$ kein Retrakt von $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ist, d.h. es gibt keine stetige Funktion $\mathbb{D} \to \mathbb{T}$ welche die Identität auf $\mathbb{T}$ ist.

Aufgabe 2:
Seien A, B unitale C*-Algebren und $\varphi : A \to B$ linear, kontraktiv, unital und *-erhaltend. Dann ist φ positiv, d.h. $\varphi(A_+) \subset B_+$.

Aufgabe 3:
Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(i) X ist metrisierbar, d.h. es existiert eine Metrik auf X, welche die Topologie induziert.
(ii) $\mathcal{C}(X)$ ist separabel, d.h., $\mathcal{C}(X)$ besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge.

Aufgabe 4:
Sei A eine kommutative unitale C*-Algebra und $a_1, \ldots, a_n \in A_{\mathrm{sa}}$.
Man zeige: C$^*(1_A, a_1, \ldots, a_n) \subset A$ ist *-isomorph zu $\mathcal{C}(\Omega)$ für eine kompakte Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Was kann man sagen, wenn $a_1, \ldots, a_n$ in A_+ liegen?
Wie ist die Situation für beliebige $a_1, \ldots, a_n \in A$?

Abgabe Freitag, 4.12. in der Vorlesung.