Zur Berechnung der Tragfähigkeit starrer Dalben in homogenen Böden nach BRINCH-HANSEN

Von Dipl.-Ing. Th.Dietrich

1. Einleitung

In [1] veröffentlichte BRINCH-HANSEN eine Berechnungsmethode für die Tragfähigkeit starrer Dalben, in der zum ersten Male die Dreidimensionalität des Problems in theoretisch befriedigender Weise behandelt wurde. Die Anwendbarkeit der Methode sowohl auf rollige wie auf bindige Böden wurde durch Modellversuche von CHRISTENSEN [3] und von ZWECK und DIETRICH [4] nachgewiesen. In der ursprünglichen Formulierung ist sie jedoch für praktische Bedürfnisse unhandlich, da sie auch in einfachen Fällen verhältnismäßig langwierige numerische Berechnungen erfordert. Außerdem berücksichtigt sie nicht den Einfluß der in Belastungsrichtung gemessenen Dalbendicke. In [2] formulierte BRINCH-HANSEN einen Faktor, der diesen Einfluß für rein kohäsive Böden in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen [4] wiedergibt. Ausgehend von der ursprünglichen Theorie von BRINCH-HANSEN und dem eben erwähnten Faktor wird nun im folgenden eine einfache Tragfähigkeitsformel für starre, rauhe Dalben in homogenen, mit Kohäsion und Reibung begabten Böden abgeleitet, die auch den Einfluß der Dalbendicke berücksichtigt. Die vom Reibungswinkel und der Geometrie des Dalbens abhängenden dimensionslosen Koeffizienten dieser Formel werden in fünf Kurventafeln dargestellt.

2. Ableitung der Tragfähigkeitsformel

Für die Beschreibung der Tragfähigkeit und der Abmessungen des Dalbens werden die Bezeichnungen der Abb. 1 verwendet, wobei

- P die Tragfähigkeit des Dalbens
- h die freie Höhe
- t die Rammtiefe
- u die Tiefe des Drehpunktes
- b die Dalbenbreite
- a die Dalbendicke und
- x die laufende Tiefenkoordinate, gemessen von der Bodenoberfläche,

bedeuten. Für die drei, die Schubfestigkeit des Bodens beschreibenden Parameter werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- γ Raumgewicht
- ρ Reibungswinkel und
- c Kohäsion

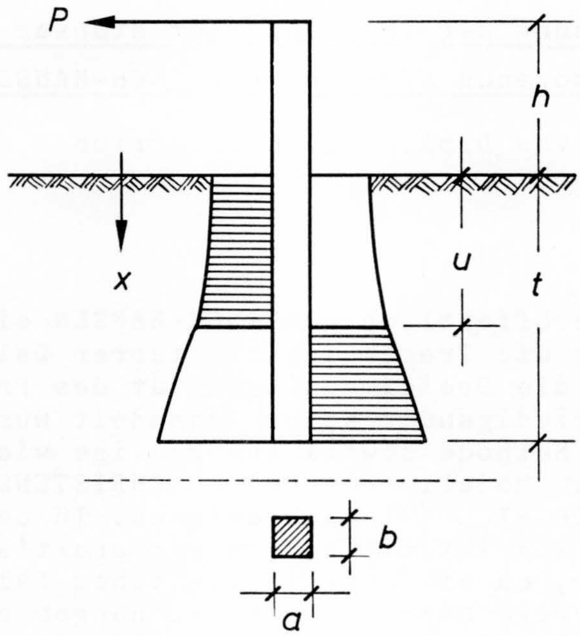


Abb. 1 Bezeichnung der Dalbenabmessungen

Mit Hilfe des π-Theorems kann man die Tragfähigkeit des Dalbens symbolisch folgendermaßen ausdrücken (siehe [4] Gl (3.3) und Gl (5.2))

$$P = cbt \quad \Gamma\left(\frac{\gamma t}{c}, \rho, \frac{t}{b}, \frac{h}{t}, \frac{a}{b}\right)^{+)} \qquad (1)$$

Für die dimensionslosen Argumente werden folgende Namen verwendet

$\gamma t/c$	Coulomb'sche Zahl
ρ	Reibungswinkel
t/b	Schlankheitsverhältnis
h/t	Hebelverhältnis
a/b	Formverhältnis

Wie aus den Abb. 4 und 8 in [4] zu sehen ist, kann die Funktion

$$\Psi\left(\frac{\gamma t}{c}\right) = \Gamma\left(\frac{\gamma t}{c}\right) \quad \text{für} \quad \frac{a}{b} = 0 \qquad (2)$$

- in ähnlicher Weise wie das bei anderen Tragfähigkeitsproblemen geschieht - durch die lineare Funktion der Coulomb'schen Zahl

---

+) Bei der Aufstellung der Gl (3.3) in [4] wurde von der auf die Dalbenbreite bezogenen Tragfähigkeit P/b ausgegangen und nicht von der Tragfähigkeit P selbst. Das führt dann hier zu $P = cbt\Gamma$ anstelle von $P = ct^2\overline{\Gamma}$. Der Vorteil dieses Vorgehens liegt darin, daß Γ im ganzen Variationsbereich des Schlankheitsverhältnisses $o<t/b<\infty$ endlich und von Null verschieden bleibt, was für $\overline{\Gamma}$ nicht zutreffen würde.

$$\Psi_c + \frac{\gamma t}{c}\ \Psi_q \qquad (3)$$

ersetzt werden, wobei die Koeffizienten Ψ_c und Ψ_q unabhängig von $\gamma t/c$ sind. Die Näherung liegt auf der sicheren Seite, d.h. es ist immer (3) $\leqslant$ (2). Um Ψ_c zu erhalten, wurden die Gl (3.10) und (3.11), nachdem darin $\gamma t/c = 0$ gesetzt worden war, integriert. Um Ψ_q zu erhalten, muß Gl (3.11) zunächst durch $\gamma t/c$ dividiert und dann zusammen mit Gl (3.10) integriert werden, wobei $\gamma t/c = \infty$ zu setzen ist.

In gleicher Weise kann die Funktion Γ in Gl (1) linearisiert werden:

$$\Gamma(\frac{\gamma t}{c}) \approx \Gamma_c + \frac{\gamma t}{c}\ \Gamma_q \qquad (4)$$

wobei Γ_c und Γ_q aus Gleichungen analog zu Gl (3.10) und (3.11) in [4] zu ermitteln sind. Bei der Aufstellung dieser Gleichungen muß der Ausdruck (3.5) für e_x in [4] durch einen Ausdruck ersetzt werden, der den Einfluß des Formverhältnisses a/b berücksichtigt. Der Anregung von Prof. BRINCH-HANSEN in [2] folgend, kann man dafür schreiben:

$$e_x = c(K_c^{x/t} + 2\ \frac{a}{b}) + \gamma x\ (K_q^{x/t} + 2\ K_o\ \frac{a}{b}\ \tan\rho) \qquad (5)$$

Im folgenden sollen die vier Paare von Grenzwerten der Argumente $\gamma t/c$ und t/b

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{lcccc} \gamma t/c & : & o & o & \infty & \infty \\ t/b & : & o & \infty & o & \infty \end{array} \\ \text{durch die Symbole} \\ \begin{array}{lcccc} \text{Index} & : & c & c & q & q \\ \text{Hochzahl} & : & o & \infty & o & \infty \end{array} \end{array}\right\} \quad (6)$$

gekennzeichnet werden. Wenn $t/b \to o$ oder ∞ strebt, werden die Erddruckkoeffizienten K_c und K_q in Gl (5) unabhängig von der Variablen x/t. In den Fällen (6) muß deshalb die Integration der oben geforderten, zu Gl (3.10) und (3.11) in [4] analogen Gleichungen zu den exakten Ausdrücken

$$\Gamma_c^o = \Psi_c^o\ s_c^o \quad (7a) \qquad \Gamma_q^o = \Psi_q^o\ s_q^o \quad (8a)$$

$$\Gamma_c^\infty = \Psi_c^\infty\ s_c^\infty \quad (7b) \qquad \Gamma_q^\infty = \Psi_q^\infty\ s_q^\infty \quad (8b)$$

führen, wobei s_c^o, s_c^∞, s_q^o und s_q^∞ die Werte des von BRINCH-HANSEN in [2] eingeführten Formfaktors s für die Grenzfälle (6) bedeuten. Ausgeschrieben lauten sie

$$s_c^o = 1 + \frac{2}{K_c^o}\ \frac{a}{b} \qquad (9a)$$

$$s_c^\infty = 1 + \frac{2}{K_c^\infty}\ \frac{a}{b} \qquad (9b)$$

$$s_q^o = 1 + \frac{2\ K_o \tan\rho}{K_q^o}\ \frac{a}{b} \qquad (10a)$$

$$s_q^\infty = 1 + \frac{2\ K_o \tan\rho}{K_q^\infty}\ \frac{a}{b} \qquad (10b)$$

Für Schlankheitsverhältnisse t/b zwischen o und ∞ und für den Grenzwert der Coulomb'schen Zahl $\gamma t/c$ = o wird jetzt folgende Näherung eingeführt:

$$\Gamma_c \approx \Psi_c\ s_c \qquad (11a)$$

wobei der Formfaktor

$$s_c = s_c^o - \frac{s_c^o - s_c^\infty}{\Psi_c^\infty - \Psi_c^o}\ (\Psi_c - \Psi_c^o) \qquad (11b)$$

durch lineare Interpolation nach Abb. 2 gewonnen wird.

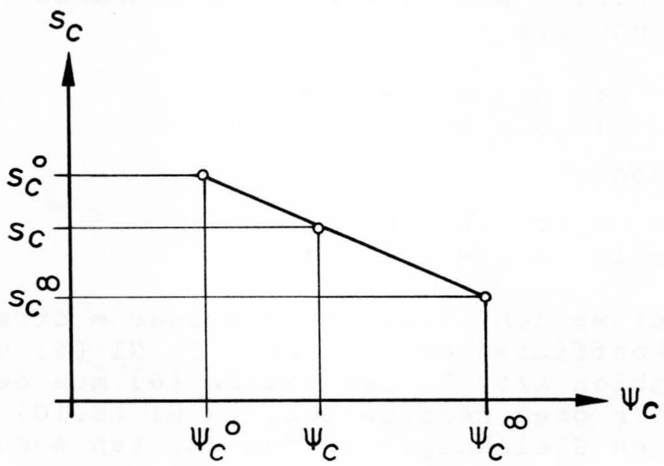


Abb. 2 Der Formfaktor im allgemeinen Fall o < t/b < ∞

Wenn die Coulomb'sche Zahl $\gamma t/c \to \infty$ strebt, wird der analoge Ausdruck

$$\Gamma_q \approx \Psi_q\ s_q \qquad (12a)$$

mit

$$s_q = s_q^o - \frac{s_q^o - s_q^\infty}{\Psi_q^\infty - \Psi_q^o} (\Psi_q - \Psi_q^o) \qquad (12b)$$

benützt.

Wie aus Abb. 5 in [4] zu ersehen ist, sind die für verschiedene Werte des Hebelverhältnisses h/t berechneten Funktionen

$$\Psi = \Psi(t/b) \; ; \; \rho = o$$

praktisch parallel, was - wegen des verwendeten doppelt-logarithmischen Papieres - bedeutet, daß sie sich nur um einen nahezu konstanten Faktor unterscheiden. Tatsächlich müssen die Werte dieses Faktors für $t/b \rightarrow o$ und $t/b \rightarrow \infty$ identisch sein. Was gerade für $\rho = o$ demonstriert wurde, gilt auch für beliebige Werte des Reibungswinkels, vorausgesetzt, daß die Coulomb'sche Zahl $\gamma t/c \rightarrow o$ oder ∞ strebt. Infolgedessen sind die folgenden Beziehungen streng gültig.

$$\Psi_c^o = K_c^o \, l_c \quad (13a) \qquad \Psi_q^o = K_q^o \, l_q \quad (14a)$$

$$\Psi_c^\infty = K_c^\infty \, l_c \quad (13b) \qquad \Psi_q^\infty = K_q^\infty \, l_q \quad (14b)$$

wobei K_c^o usw. BRINCH-HANSEN's Erddruckkoeffizienten bedeuten. Ferner sind l_c und l_q zwei Faktoren, die lediglich vom Hebelverhältnis h/t abhängen und die als "Hebelfaktoren" bezeichnet werden. Sie werden durch die folgenden Gleichungssysteme bestimmt.

$$l_c = 2 \left(\mu_c - \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \frac{h}{t} = \frac{1}{2} \; \frac{\frac{1}{2} - \mu_c^2}{\mu_c - \frac{1}{2}} \qquad (15)$$

$$l_q = \mu_q^2 - \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{h}{t} = \frac{2}{3} \; \frac{\frac{1}{2} - \mu_q^3}{\mu_q^2 - \frac{1}{2}} \qquad (16)$$

Hierbei bezeichnet $\mu = u/t$ das Verhältnis der Tiefe des Drehpunktes unter Gelände zur Rammtiefe. Die beiden,den Grenzwerten $\gamma t/c = o$ und $\gamma t/c = \infty$ entsprechenden und durch die Indizes c und q bezeichneten Fälle sind in den Abb. 3a und 3b dargestellt.

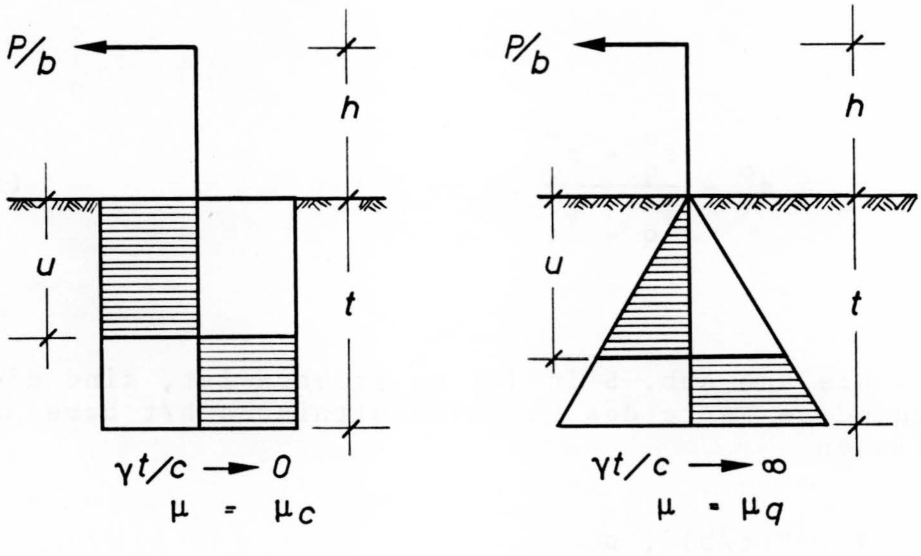


Abb. 3a Abb. 3b

Lage des Drehpunktes eines sehr schmalen oder sehr breiten Dalbens in den Grenzfällen eines rein kohäsiven und eines rein rolligen Bodens

Auf Grund der näherungsweisen Parallelität der Kurven $\Psi = \Psi(t/b)$, die bei Betrachtung der Abb. 5 in [4] festgestellt wurde, werden die Beziehungen (13) und (14) jetzt für beliebige Werte t/b generalisiert:

$$\Psi_c = k_c \, l_c \qquad (17) \qquad\qquad \Psi_q = k_q \, l_q \qquad (18)$$

wobei die "Erddruckfaktoren" k_c und k_q als unabhängig vom Hebelverhältnis h/t betrachtet werden. Um die Funktionen k_c (t/b) und k_q (t/b) zu erhalten, werden die Funktionen Ψ_c (t/b) und Ψ_q (t/b) für den "normalen" Wert h/t = 2 durch die, ebenfalls für h/t = 2 genommenen Hebelfaktoren l_c und l_q dividiert. Für $t/b \to o$ gehen die Gl (17) und (18) in die Gl (13a) und (14a) und für $t/b \to \infty$ in die Gl (13b) und (14b) über, wie es sein muß.

Durch Einsetzen der Gl (17) und (18), ferner (13a), (13b), (14a) und (14b) in die Gl (11b) und (12b) erhält man zunächst folgende endgültige Ausdrücke für die Formfaktoren

$$s_c = 1 + \beta_c \frac{a}{b} \qquad (19a)$$

mit

$$\beta_c = \frac{2}{K_c^o \, K_c^\infty} \left(K_c^o + K_c^\infty - k_c\right) \qquad (19b)$$

und

$$s_q = 1 + \beta_q \frac{a}{b} \qquad (20a)$$

mit

$$\beta_q = \frac{2\,K_o \tan\rho}{K_q^o\,K_q^\infty}\,(K_q^o + K_q^\infty - k_q) \qquad (20b)$$

Damit und unter nochmaliger Verwendung der Gl (17) und (18) erhält man über die Gl (11a) und (12a) die linearisierte Funktion (4) in der Form

$$\Gamma = k_c\,l_c\,s_c + \frac{\gamma t}{c}\,k_q\,l_q\,s_q \qquad (21)$$

und schließlich, durch Einsetzen von (21) in Gl (1) die gewünschte Formel für die Tragfähigkeit eines starren, rauhen Dalbens in einem homogenen, mit Kohäsion und Reibung begabten Boden:

$$\left.\begin{aligned}
P &= cbt\;k_c\,l_c\,s_c + \gamma bt^2\,k_q\,l_q\,s_q \\
&\text{mit} \\
k_c &= k_c(\rho, \tfrac{t}{b}) \\
l_c &= l_c(\tfrac{h}{t}) \\
s_c &= 1 + \tfrac{a}{b}\;\beta_c(\rho, \tfrac{t}{b}) \\
&\text{und} \\
k_q &= k_q(\rho, \tfrac{t}{b}) \\
l_q &= l_q(\tfrac{h}{t}) \\
s_q &= 1 + \tfrac{a}{b}\;\beta_q(\rho, \tfrac{t}{b})
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Wie man sieht, hängen die Erddruckfaktoren k_c und k_q ebenso wie die Beiwerte β_c und β_q der Formfaktoren von zwei Argumenten, nämlich dem Reibungswinkel ρ und dem Schlankheitsverhältnis t/b ab. Die Formfaktoren s_c und s_q selbst hängen noch von einem dritten Argument, nämlich dem Formverhältnis a/b ab, aber in einfacher linearer Weise. Die Hebelfaktoren l_c und l_q dagegen hängen nur von einem Argument, nämlich dem Hebelverhältnis h/t ab.

3. Kurventafeln

Die sechs für die Benützung der Formel (22) benötigten Faktoren k_c, β_c, l_c und k_q, β_q, l_q wurden berechnet und in den Kurventafeln der Abb. 4 bis 8 in Abhängigkeit von ihren Argumenten t/b und ρ bzw. h/t dargestellt.

Die Abhängigkeit der Erddruckfaktoren k_c und k_q in den Abb. 4 und 5 vom Schlankheitsverhältnis drückt die bekannte Tatsache aus, daß der Einfluß der Randkörper - oder allgemeiner und zutreffender ausgedrückt - der Einfluß der seitlichen Ränder bei schlanken Dalben größer ist als bei gedrungenen. Die Abhängigkeit vom Reibungswinkel ρ entspricht dem Verhalten der Erddruckbeiwerte K_c^o und K_q^o bzw. K_c^∞ und K_q^∞ von BRINCH-HANSEN (siehe Abb. 2 in [4]). Die K_c-Werte bleiben auch für ρ = o endlich, während die K_q-Werte für $\rho \to$ o ebenfalls gegen Null streben. Dies entspricht dem Umstand, daß zwar ein mit Kohäsion begabter Boden auch bei ρ = o Schubspannungen aufnehmen kann, nicht jedoch ein kohäsionsloser Boden.

Die Beiwerte β_c und β_q der Formfaktoren zeigen bezüglich ihrer Abhängigkeit von den Argumenten t/b und ρ etwa dasselbe Verhalten wie die Erddruckfaktoren k_c und k_q. Sie sind kleiner für schlanke Dalben als für gedrungene. Sie erreichen ihre größten Werte für ρ = o und sind umso kleiner je größer der Reibungswinkel ist. Dasselbe gilt - wie aus Gl (22) zu sehen ist - für die Formfaktoren s_c und s_q selbst, bzw. für den Einfluß der Dalbendicke a. Der in [4] experimentell ermittelte und in [2] theoretisch abgeleitete Pauschalwert β_c = 0,285 (siehe Gl (1) und (2) in [2]) entspricht etwa dem geometrischen Mittel der β_c-Werte für t/b < 40. Die in [4] beschriebenen Versuche umfaßten den Bereich o < a/b < 4. Spätere Versuche zeigten, daß die Anwendbarkeit der linearen Abhängigkeit des Formfaktors s_c vom Formverhältnis a/b auf diesen Bereich beschränkt ist, was jedoch für praktische Bedürfnisse ausreicht. Für einen mittleren Schlankheitsgrad t/b = 10 eines Dalbens in rein kohäsivem Boden beträgt der Beiwert β_c = 0,47. Falls der Dalben quadratischen Querschnitt (a/b = 1) besitzt, wird seine Tragfähigkeit in diesem Fall um den Faktor s_c = 1,47, also ganz beträchtlich, vergrößert. Wenn die Reibung auf 30° ansteigt, beträgt der Beiwert immer noch β_c = 0,18, und der Formfaktor s_c = 1,18. Die Tragfähigkeit wird in diesem Falle aber nicht auf das 1,18-fache erhöht, da noch der Formfaktor s_q des Reibungsgliedes in Gl (22) zu berücksichtigen ist. Dieser Zusatz ist aber gering, da bei kleinen Reibungswinkeln k_q klein und bei grossen Reibungswinkeln β_q bzw. s_q klein ist. Wenn der eben betrachtete Dalben mit t/b = 10 und a/b = 1 in einem rein rolligen Boden steht, wird seine Tragfähigkeit bei ρ = 30° nach Abb. 7 um β_q = 10 % vergrößert. Bei ρ = 40° sind es nur noch 4,5 %. In bindigen Böden bewirkt demnach die Berücksichtigung der Dalbendicke eine etwa 3 bis 5 mal stärkere Erhöhung der Tragfähigkeit als in rolligen Böden.

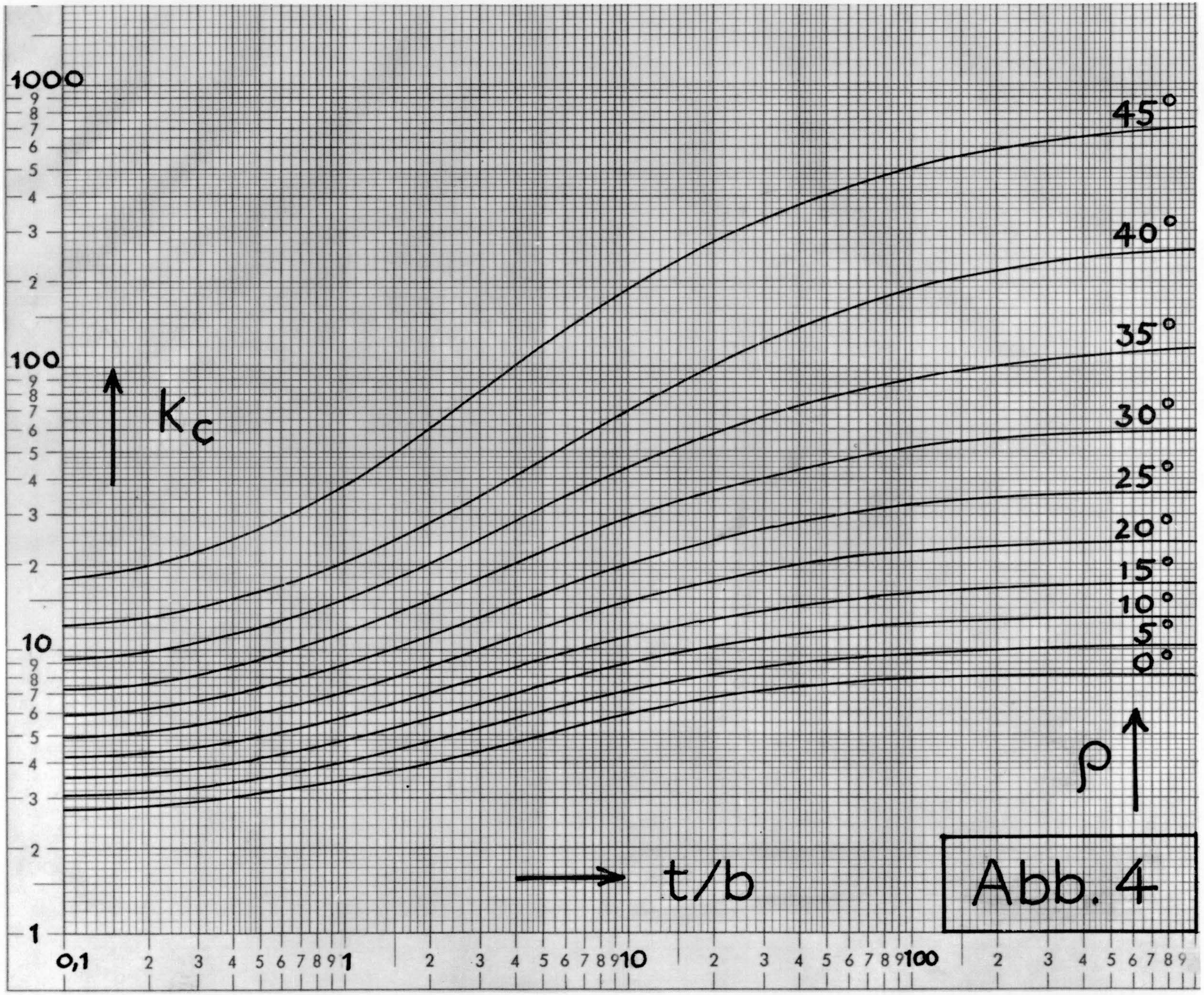


Abb. 4

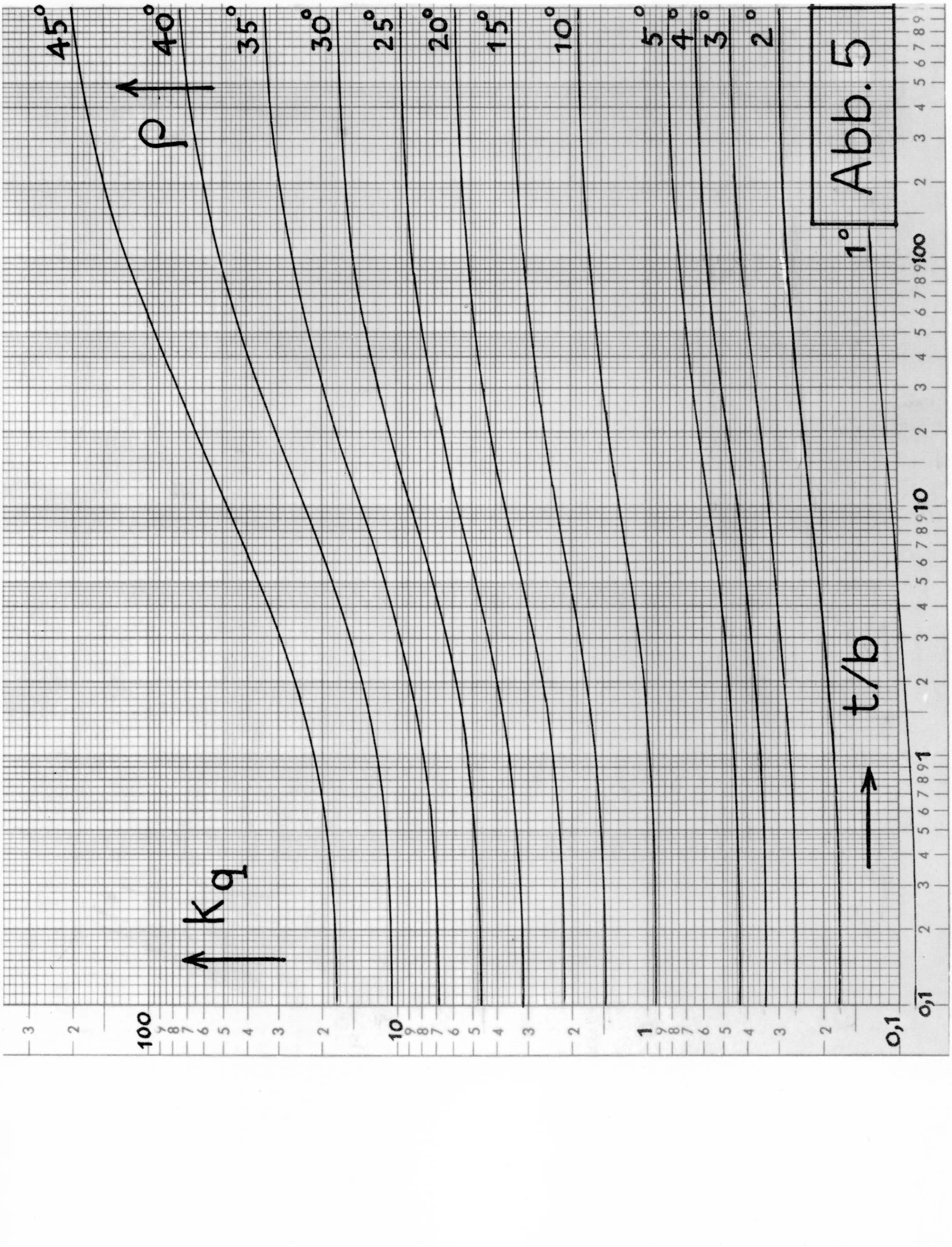


Abb. 5

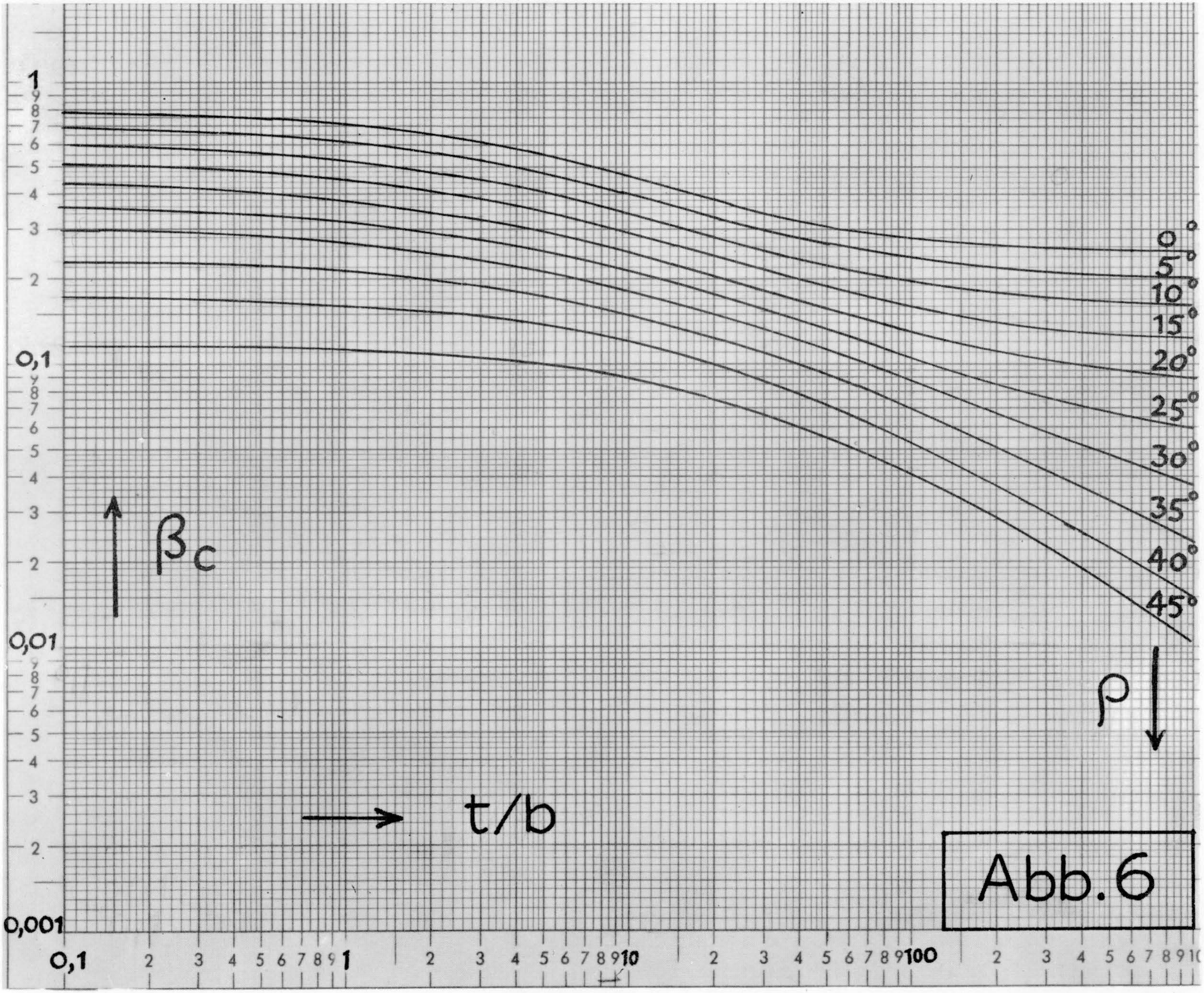
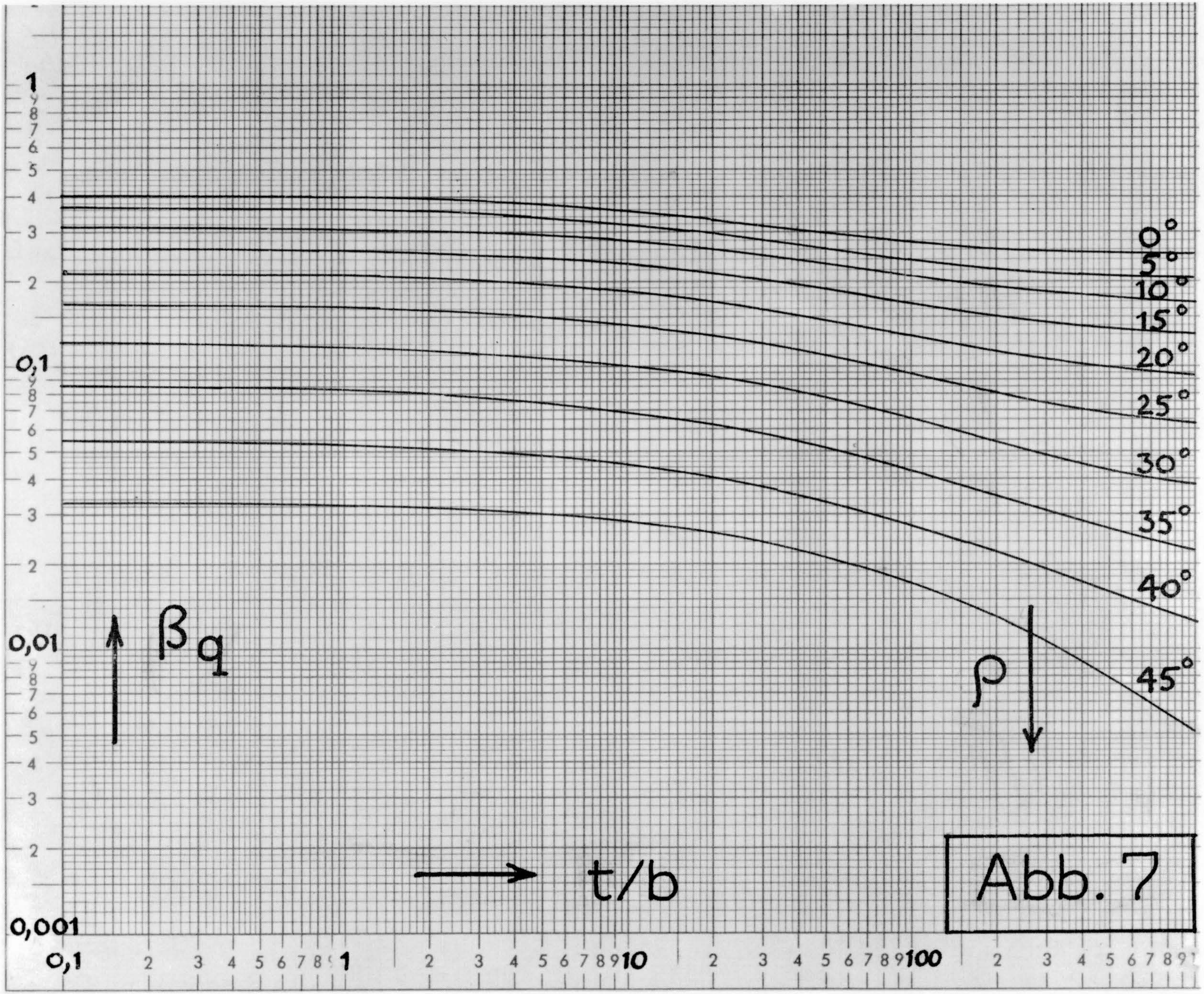


Abb.6



1
0,1
0,01
0,001
0,1
1
10
100
β_q
t/b
ρ
0°
5°
10°
15°
20°
25°
30°
35°
40°
45°
Abb. 7

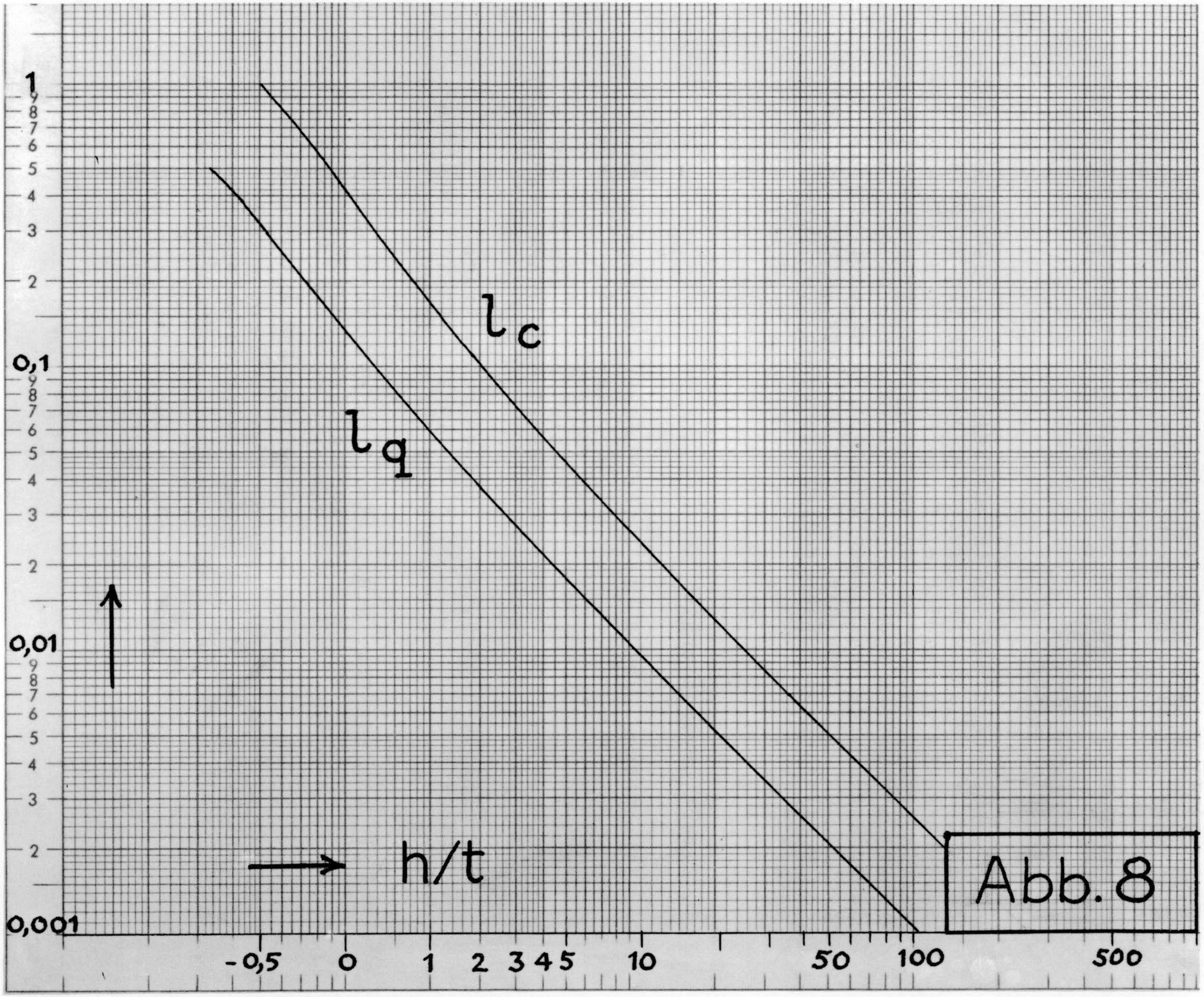


Abb. 8

Die Hebelfaktoren l_c und l_q in Abb. 8 werden umso kleiner, je größer das Hebelverhältnis h/t ist. Für $h/t \rightarrow \infty$ streben sie gegen Null. Dies entspricht dem Umstand, daß die Tragfähigkeit eines Dalbens bei sonst gleichen Verhältnissen umso kleiner ist, je größer seine freie Höhe h ist.

4. Zusammenfassung

Ausgehend von der im Bulletin Nr. 12 (1961) des Dänischen Geotechnischen Institutes dargestellten Theorie von BRINCH-HANSEN wurde eine einfache Formel für die Tragfähigkeit starrer, rauher Dalben in homogenen, mit Reibung und Kohäsion begabten Böden unter Berücksichtigung der in Belastungsrichtung gemessenen Dalbendicke abgeleitet. Die sechs, vom Reibungswinkel und der Dalbengeometrie abhängenden Koeffizienten dieser Formel wurden in fünf Kurventafeln dargestellt.

5. Literaturverzeichnis

[1] BRINCH-HANSEN, J. : The ultimate resistance of rigid piles against transversal forces. Bulletin Nr. 12 des Dänischen Geotechnischen Instituts (1961)

[2] BRINCH-HANSEN, J. : Diskussionsbeitrag. Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau, Nr.19(1963)

[3] CHRISTENSEN, N.H. : Model tests with transversally loaded rigid piles in sand. Bulletin Nr. 12 des Dänischen Geotechnischen Instituts (1961)

[4] ZWECK, H., DIETRICH, Th. : Modellversuche mit steifen Dalben in bindigen Böden bei plötzlicher Belastung. Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau, Nr.19(1963)