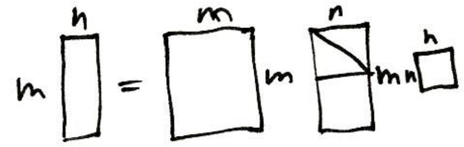
Aufgabe 2 Singulärwertzerlegung ($A = U\Sigma V^*$)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ein anderes "Diagonalisieren" auch für Rechteck-Matrizen:

$$A = U \, \Sigma \, V^*$$



Rezept:

① Eigenwerte von A^*A bestimmen und anordnen: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ (mit alg. VF gezählt!)

② A^*A unitär diagonalisieren:

$$V = \begin{pmatrix} \text{ONB aus EV} \end{pmatrix}$$

EV zu λ_1

$$= \begin{pmatrix} | & | & | & \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots \\ | & | & | & \end{pmatrix}$$

EV zu λ_3

③ $D = \sqrt{V^*(A^*A)V}$ ist diagonal. Bilde dann:

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c} D \\ \hline \text{Nullmatrix} \end{array} \right)$$

④ $U = \begin{pmatrix} | & | & \\ u_1 & u_2 & \cdots \\ | & | & \end{pmatrix}$ erhält man dann

aus $\quad u_i := \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i$

Ergänze die u_i durch Vektoren zu einer ONB!

Für $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $A^*A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

① $\det(A^*A - \lambda I) = (6-\lambda)(9-\lambda) - 4 = (10-\lambda)(5-\lambda)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 10$ sind die Eigenwerte

② A^*A unitär ~~diagonalisieren~~ diagonalisieren:

$$\mathrm{Kern}(A^*A - 5I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Kern}(A^*A - 10I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Demnach: $\quad V = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

③ $D = \sqrt{V^*(A^*A)V} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

④ Für U gilt: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{25}} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

u_3 ergänzen, z.B mit $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(oder zum Beispiel mit Kreuzprodukt berechnen
oder ganz allgemein mit Gram-Schmidt bestimmen)

Also $U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Insgesamt:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$$