13 Potenzreihen und Konvergenz von Funktionsfolgen

Definition 13.1 (VB) *Eine* ***Potenzreihe*** *ist eine Reihe der Form* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *wobei* $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$ *fest gewählt sind und* $z \in \mathbb{C}$ *als Variablen aufgefasst wird. Die* a_n *heißen* ***Koeffizienten*** *der Potenzreihe* z_0 *heißt der* ***Entwicklungspunkt***[11] *der Reihe.*

Ist $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konvergent} \right\}$, so wird durch

$$f : D \to \mathbb{C}; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

eine Funktion definiert. Es stellen sich sofort die folgenden Fragen:

1. Wie bestimmt man den Konvergenzbereich D?
2. Für welche $z \in D$ ist f stetig in z?

Wir werden in diesem Abschnitt zumindest eine teilweise Anwort auf diese Frage geben:

Beispiel 13.2

1. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. *Hier gilt* $D = \mathbb{C}$.
   Frage: Ist exp *stetig?*
2. *Die geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *konv. für* $|z| < 1$ *und divergiert für* $|z| \geq 1$, *also* $D = U_1(0) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$. *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

   also ist f stetig auf ganz D.

Definition 13.3 (Konvergenzradius, VB) *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe. Dann heißt*

$$R := \sup(A),\ A := \left\{ r \geq 0 \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \right\}$$

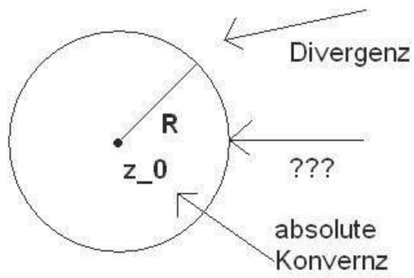
der ***Konvergenzradius*** *der Potenzreihe (wobei* $R = \infty$, *falls A unbeschränkt).*

[11] kurz: EWP

Satz 13.4 (Formel von Hadamard, VB) *Sei $\mathbb{R}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Dann gelten*

1. *Ist $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ (mit $\alpha = \infty$, falls $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_n$ unbeschränkt), so gilt*
   $R = \frac{1}{\alpha}$, falls $0 < \alpha < \infty$, $R = 0$, falls $\alpha = \infty$, und $R = \infty$, falls $\alpha = 0$.
2. *Ist $R = 0$, so konv. die Reihe nur für $z = z_0$. Ist $R = \infty$, so konv. die Reihe absolut $\forall z \in \mathbb{C}$. Ist $0 < R < \infty$, so gilt*
   a) *Ist $|z - z_0| < R$, so konv. die Reihe absolut.*
   b) *Ist $|z - z_0| > R$, so ist die Reihe divergent.*
   c) *Ist $|z - z_0| = R$, so ist keine allg. Aussage möglich.*

<u>*Skizze:*</u>



<u>Beweis:</u> *Sei $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wegen $\sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$ gilt*

$$S_z := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0|\alpha.$$

Mit $\sqrt{-}$–Kriterium (9.12) gilt $S_z < 1 \Rightarrow$ abs. Konvergent, $S_z > 1 \Rightarrow$ Divergenz, $S = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

<u>Fallunterscheidung:</u>

1. *$\alpha = 0$: Dann ist $S_z = 0 < 1 \; \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ abs. Konvergenz $\forall z \in \mathbb{C}$*
2. *$\alpha = \infty$: Dann ist $S_Z = 0 > 1 \; \forall z \neq z_0, S_z = 0$ für $z = z_0$, also nur Konvergenz für $z = z_0$.*
3. *$0 < \alpha < \infty$. Dann: $S_z \Leftrightarrow |z - z_0|\alpha < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\alpha}$, und analog $S_z \Leftrightarrow |z - z_0| > \frac{1}{\alpha}$*

Wenden wir die auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ an, so erhalten wir die Konvergenz für alle $r < \frac{1}{\alpha}$ und Divergenz für $r > \frac{1}{\alpha}$, also $R = \frac{1}{\alpha}$ (analog für $\alpha = 0$, bzw. $\alpha = \infty$). ■

In vielen Fällen kann man den Konvergenzradius auch mit Hilfe des Quotientenkriteriums berechnen:

Satz 13.5 (VB) *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe, so dass ein* $N \in \mathbb{N}$ *ex. mit* $a_n \neq 0 \; \forall n \geq N$ *und der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

existiert in $[0,\infty]$*. Dann gilt* $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Beweis: *Für* $z \in \mathbb{C}$ *setzte* $c_z := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z-z_0| \cdot \frac{1}{R}$*, falls* $R \neq 0, \infty$*. Aus dem Quotientenkriterium für Reihen (9.14) folgt dann abs. Konvergenz für* $c_z < 1$*, also* $|z-z_0| < R$ *und Divergenz für* $c_z > 1$*, also* $|z-z_0| > R$*.*
Ist $R = 0$*, so folgt* $c_z = \infty \; \forall z \neq z_0$*, also Konv. für* $z = z_0$ *und ist* $R = \infty$*, so folgt* $c_z = 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$*, also folgt absolute Konvergenz* $\forall z \in \mathbb{C}$*.* ■

Beispiel 13.6 *1. Betr. die Potenzreihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$$

In allen drei Fällen gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$*, also gilt* $R = \frac{1}{1} = 1$*. Die erste Reihe konvergiert nirgendwo auf dem Rand* $|z| = 1$*, die zweite divergiert für* $z = 1$ *und konvergiert für* $z = -1$ *(antern. harm. Reihe) und die dritte konvergiert absolut für alle* z *mit* $|z| \leq 1$*, da dann* $\left|\frac{1}{n^2} z^n\right| = \frac{1}{n^2}|z|^n \leq \frac{1}{n^2}$*, und damit ist* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *abs. konv. Majorante.*

2. Die "Cosinusreihe" ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$*. Wir wollen zeigen, dass der Konvergenzradius* $R = \infty$ *ist. Dazu wollen wir das Quot.-Kriterium nutzen.*
Problem: $a_{2n+1} = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}_0$
Ausweg: Betr. zunächst die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^n$ *und zeige, dass diese für alle* $w \in \mathbb{C}$ *konvergiert.*
Setzte dann $w = z^2$ *ein!*
Für diese Reihe gilt: $\left|\frac{a_n}{a_{2n+1}}\right| = \left|\frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\right| = (2n+1)(2n+2) \to \infty$*, also gilt* $R = \infty$*.*

3. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} := \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = n+1 \to \infty$*, also gilt auch hier* $R = \infty$*.*

Wir wollen nun die Frage der Stetigkeit der Fkt.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

auf dem offenen Konvergenzkreis $U_R(z_0)$ untersuchen. Hierzu wollen wir allgemeine Grenzwerte von Funktionsfolgen untersuchen.

<u>**Motivation:**</u> Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und ist $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die zugeh. Fkt, so gilt für alle $z \in U_R(z_0)$, dass

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z), \text{ mit } f_k(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n(z-z_0)^n$$

Definition 13.7 (VB) *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und seien $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ Funktionen, $n \in \mathbb{N}$.*

a) *Wir sagen die Funktionenfolge $(f_n)_n$ <u>konvergiert **punktweise**</u>[12] gegen, falls $\forall z \in D$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z). \qquad (\underline{Bez:} f_n \xrightarrow{pktw} f)$$

b) *Wir sagen die Fkt-folge $(f_n)_n$ <u>konvergiert **gleichmäßig**</u>[13] gegen f, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N, z \in D$ gilt: $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ ($\underline{Bez:}\ f_n \xrightarrow{glm} f$).*

Bemerkung 13.8 *Falls $f_n \xrightarrow{pktw} f$ gilt: $\forall z \in D, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N$ gilt: $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.*

Der Unterschied zur glm. Konvergenz besteht darin, dass das ε hier auch bom betr. Punkt $z \in D$ abhängen lann! Bei der glm. Konvergenz finde ich zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, dass für <u>alle</u> $z \in D$ gleichzeitig funktioniert!

<u>**Beispiel:**</u> Betr. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R};\ f_n(t) = t^n$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f(t) = \begin{Bmatrix} 0, & t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{Bmatrix}$. Dann gilt $f_n \xrightarrow{pktw} f$, denn $\lim\limits_{n\to\infty} t^n = \begin{Bmatrix} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{Bmatrix}$.

[12] kurz: pktw
[13] kurz: glm

Aber es gilt nicht $f_n \xrightarrow{glm} f$, dann ist $\varepsilon\frac{1}{2}$, so gilt für $0 \leq t < 1$: $t^n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow t < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Ist dann $N \in \mathbb{N}$ beliebig und ist $\frac{1}{\sqrt[N]{2}} \leq t < 1$, so gilt

$$|f_N(t) - f(t)| = t^N \geq \frac{1}{2}.$$

Die glm. Konvergenz einer Fkt-Folge kann man auch bequem mit Hilfe der Supremums-Norm aisdrücken.

Definition 13.9 (VB) *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Fkt. Dann heißt $\|f\|_D := \sup\{|f(z)| \ |z \in D\}$ die* ***<u>Supermums-Norm</u>*** *von f.*

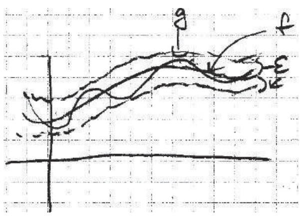
Satz 13.10 (VB) *Seien $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ Fkt. Dann gilt*

$$f_n \xrightarrow{glm} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_D \to 0$$

<u>Beweis:</u> *"$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Da $f_n \xrightarrow{glm} f$ ex. ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\ \forall n \geq N, z \in D$.*
Dann folgt $\|f_n - f\|_D = \sup\limits_{z\in D}|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon\ \forall n \geq N$, also folgt $\|f_n - f\|_D \to 0$.

"$\Rightarrow$" Gilt $\|f_n - f\|_D \to 0$ und ist $\varepsilon > 0$ geg., so ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_D < \varepsilon\ \forall n \geq N$. Dann folgt für alle $z \in D$ und $n \geq N$: $|f_n(z) - f(z)| \leq \|f_n - f\|_D < \varepsilon$, also $f_n \xrightarrow{glm} f$ ∎

<u>Skizze:</u>



Es gilt $\|f - g\|_D \leq \varepsilon$ falls sich g in einem "ε-Schlauch" um f befindet!

Gleichmäßige limitierten stetige Funktionen sind wieder stetig.

Satz 13.11 (VB) *Seien $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $f_n \xrightarrow{glm} f$. Sind dann alle f_n stetig in $z_0 \in D$, so ist auch f stetig in z_0.*

<u>Beweis:</u> *Seien $z_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ex. zu $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_N\|_N < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_N stetig in z_0 ex. ein $\delta > 0$ mit $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $z \in D$. Dann folgt für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$: $|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \|f - f_N\|_D + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_N - f\|_D < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$* ∎

Wir wollen nun diesen Satz benutzen um zu zeigen, dass durch Potenzreihen def Fkt. auf dem offenen Konvergenzkreis stetig sind. Dazu zeigen wir:

Satz 13.12 (VB) *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$ *und sei* $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$, *die zugeh. Fkt.* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in U_R(z_0)$. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ *die n-te Partialsumme. Dann gelten:*

1. $f_n \xrightarrow{pktw} f$ *auf* $U_R(z_0)$
2. $\forall 0 < r < R$ *gilt* $f_n \xrightarrow{glm} f$ *auf* $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,||z-z_0| \leq r\}$ *(dh. die Einschränkung* $f_{n_{|Br(z_0}}$ *konv. glm. gegen* $f_{B_r(z_0)}$

Beweis:

1. *ist klar*
2. *Sei* $\varepsilon > 0$ *gegeben. Da* $0 < r < R$ *ist* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ *konvergent. Daher ex.* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \varepsilon$. *Daher folgt* $\forall z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z-z_0| \leq r$ *und* $\forall n \geq N$:

$$
\begin{aligned}
|f(z) - f_n(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \right| \\
&\overset{Maj.-Kri.}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Damit folgt $f_n \xrightarrow{glm} f$ *auf* $B_r(z_0)$ ■

Achtung: Die glm. Konvergenz der Partialsummen gilt im allg. nicht auf dem ganzen offnen Konvergenzkreis $U_R(z_0)$ mit $R =$ Konv.-Radius!
z.B. kann man zeigen, dass dies für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} zn$ nicht gilt!

Aus 13.11 und 13.12 erhalten wir die wichtige Folgerung:

Satz 13.13 (VB) *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe mitn Konv.-Radius* $R > 0$ *und sei* $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ *die Fkt.* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. *Dann ist f stetig.*

Beweis: *Sei* $\tilde{z} \in U_R(z_0)$, *dh.* $|\tilde{z} - z_0| < R$ *Setzte* $r = \frac{1}{2}(|\tilde{z} - z_0| + R)$. *Dann gilt* $|\tilde{z} - z_0| < r < R$ *und nach 13.12 konv. die Partialsummen* $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ *glm. gegen f auch*

$B_r(z_0)$. Sei $\alpha := r - |\tilde{z} - z_0| > 0$. Dann folgt $U_\alpha(\tilde{z}) \subseteq B_r(z_0)$, denn $|z - \tilde{z}| < \alpha \Rightarrow |z - z_0| \leq |z - \tilde{z}| + |\tilde{z} - z_0| < \alpha + |\tilde{z} - z_0| = r$. Da f stetig auf $B_r(z_0)$ ex. ein $0 < \delta < \alpha$ mit $|z - \tilde{z}| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\tilde{z})| < \varepsilon$ (da $U_\delta(\tilde{z}) \subseteq U_\alpha(\tilde{z}) \subseteq B_r(z_0)$). Damit ist f stetig in $\tilde{z}$. ■

Folgerung 13.14 *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *ist stetig auf ganz* $\mathbb{C}$

<u>Beweis:</u> *Es gilt $R = \infty$ und $\mathbb{C} = U_\infty(0)$* ■