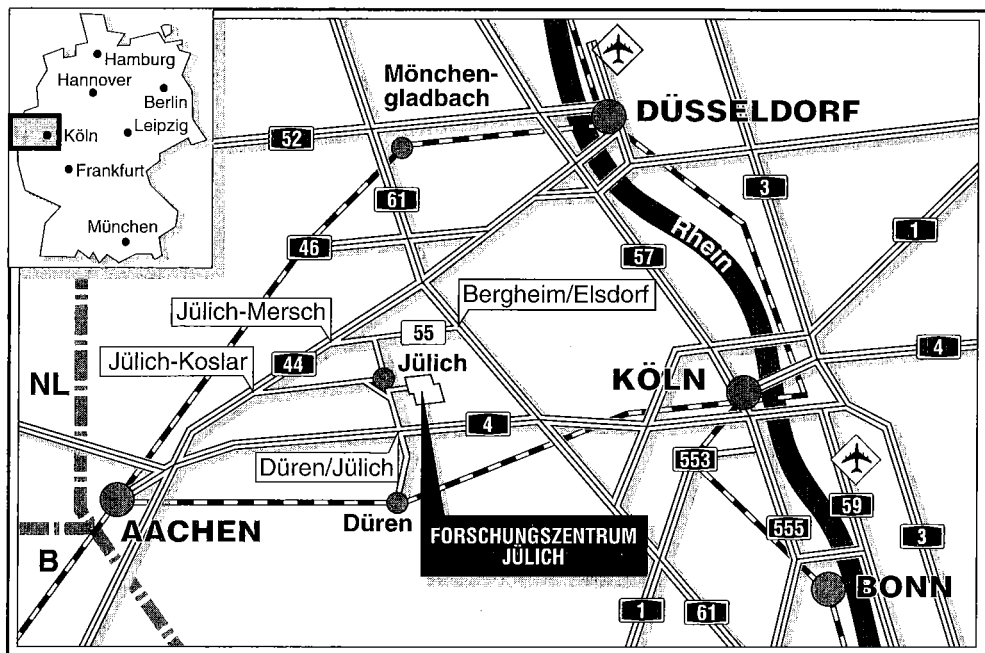


*Zentrallabor für Elektronik*

**Digitale Synthese schmalbandiger  
Rauschsignale mit numerisch  
gesteuerten Oszillatoren**

Günter Heinrichs



**Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 3137**

ISSN 0944-2952

Zentrallabor für Elektronik Jül-3137

D 466 (Diss. Universität-GH-Paderborn)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

Telefon: 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · Telex: 833556-70 kfa d

# **Digitale Synthese schmalbandiger Rauschsignale mit numerisch gesteuerten Oszillatoren**

Günter Heinrichs

## Abstract

In general, noise is regarded as undesired disturbance. In contrast to this, narrowband rf-noise signals with specific statistical properties are increasingly used for various applications in communications, RADAR and measurement techniques. In other scientific fields, like accelerator physics, noise of controlled spectral form is required for various applications. Therefore, for a number of applications narrowband rf-noise signals with an arbitrarily selectable, precisely tailored, and sharply delimited power density spectrum and defined statistical properties are useful or required. For generating such narrowband rf-noise signals, analog components are normally used, namely broadband noise sources, sine and sweep generators and tuneable high quality quartz filters. Perfection of digital integrated circuits in the last 20 years made it possible to introduce new techniques into frequency generation, namely Direct Digital Frequency Synthesis (DDFS). DDFS based on Numerically Controlled Oscillators (NCO's) offer many advantages over traditional frequency generation schemes due to their wide frequency range, excellent output phase noise, wideband tuning linearity, and fast, phase-continuous frequency switching, which can not be achieved by using analog techniques.

In the present dissertation we shall discuss the use of DDFS based on NCO's for generating narrowband rf-noise signals with an arbitrarily selectable power density spectrum and a carrier sweep in real time. The principal idea is based on the fact that any bandpass random process can be expressed in the Quadrature Amplitude Modulation (QAM) form. From this point of view we design a new QAM architecture with two phase modulated NCO's and without a multiplier, which allows a higher clock rate compared to the classical QAM. Further, starting from discrete narrowband harmonic random process, we derive a suitable synthesis algorithm for the calculation of the envelope magnitude and phase function of the desired equivalent random baseband process. For investigating the statistical properties of the generated rf-noise signals, we first quantify the spurious signals generated by the phase modulation of an NCO. Based on those, we present an closed form solution of the statistical properties corrupted by quantization effects and spurious signals of the NCO's.

A system prototype of the digital rf-noise generator has been designed and built, and several tests have been performed in order to demonstrate proper operation. Measurements of the statistical properties of the generated narrowband rf-noise signals are shown to be in good agreement with both theoretical and simulation results.

## Kurzfassung

Rauschen ist nach allgemeiner Auffassung etwas Störendes, das insbesondere in der Kommunikationstechnik allgegenwärtig ist und Probleme verursacht. Im Gegensatz dazu gewinnt der gezielte Einsatz von Rauschsignalen in der Kommunikations-, Radar- und Meßtechnik aufgrund ihrer spezifischen Eigenschaften zunehmend an Bedeutung. Neben den klassischen Bereichen finden Rauschsignale heute auch auf anderen wissenschaftlichen Gebieten ein breites Anwendungsfeld. Dabei ist es für eine Vielzahl von Anwendungsfällen vorteilhaft oder sogar notwendig, daß ein schmalbandiges Rauschsignal mit nahezu beliebig konfigurierbarem Leistungsdichtespektrum und definierten statistischen Eigenschaften zur Verfügung steht. Zur Synthese derartiger Rauschsignale sind — insbesondere im Hochfrequenzbereich — in der Regel relativ aufwendige analoge Systeme erforderlich. Aufgrund der in den letzten Jahrzehnten zu verzeichnenden Fortschritte bei der Entwicklung von integrierten Schaltkreisen zur digitalen Signalsynthese entstand der Gedanke, digitale Verfahren zur Synthese schmalbandiger, hochfrequenter Rauschsignale zu verwenden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird untersucht, inwieweit die direkte digitale Signalsynthese auf der Basis numerisch gesteuerter Oszillatoren zur Synthese schmalbandiger Rauschsignale mit nahezu beliebig konfigurierbaren Leistungsdichtespektren verwendet werden kann, und welche Vor- und Nachteile sich im Hinblick auf eine Realisierung ergeben. Gegenstand der Untersuchung ist eine auf der Grundlage der zeitdiskreten Quadraturamplitudenmodulation entwickelte neue Schaltungsstruktur mit zwei numerisch gesteuerten Oszillatoren, die infolge der Einführung einer äquivalenten Betragsvariablen keine Multiplikation enthält und demzufolge gegenüber der klassischen Methode eine höhere Datenrate erlaubt. Ausgehend von einem harmonischen zeitdiskreten Prozeß wird zur Berechnung der notwendigen Wertefolgen, entsprechend den vorgegebenen Leistungsdichtespektren des äquivalenten Basisbandprozesses, ein Synthesalgorithmus abgeleitet. Anhand statistischer Untersuchungen wird diskutiert, inwieweit die entwickelte Schaltungsstruktur und die numerisch gesteuerten Oszillatoren einen Einfluß auf die statistischen Eigenschaften des erzeugten Rauschsignales haben, wobei hierzu entsprechende analytische Ausdrücke abgeleitet werden.

Ein wesentlicher Vorteil des im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten digitalen Verfahrens gegenüber analogen ist neben der auch im Detail exakten Reproduzierbarkeit der Rauschsignale in der Möglichkeit zur Kompensation systembedingter Abweichungen durch Einbeziehung in den Synthesalgorithmus zu sehen. Der Einsatz numerisch gesteuerter Oszillatoren ermöglicht dabei eine vergleichsweise einfache Variation der Trägerfrequenz in Realzeit. Meßergebnisse bei unterschiedlich vorgegebenen Leistungsdichtespektren bestätigen die Berechnungen und erbringen den Funktionsnachweis des entworfenen digitalen Rauschgenerators. Die Vor- und Nachteile werden dabei anhand einer Gegenüberstellung der Simulations- und Meßergebnisse diskutiert.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen und Abkürzungen</b> .....	3
<b>1 Einleitung</b> .....	7
<b>2 Bandbegrenzte zeitdiskrete stochastische Signale</b>	
2.1 Rauschen .....	11
2.2 Beschreibung zeitdiskreter Signale .....	14
2.2.1 Das zeitdiskrete Signal .....	14
2.2.2 Quantisierung zeitdiskreter Signale .....	15
2.3 Der stationäre zeitdiskrete Bandpaßprozeß .....	19
2.4 Verfahren zur digitalen Synthese bandbegrenzter Rauschsignale .....	24
2.4.1 Einführung .....	24
2.4.2 Bandbreitenbegrenzung mit konventionellen digitalen Filtern .....	24
2.4.3 Realisierung mittels digitaler Quadraturamplitudenmodulation .....	28
2.4.4 Ein Syntheseverfahren auf der Basis der direkten digitalen Signal- synthese .....	29
<b>3 Direkte digitale Signalsynthese mit numerisch gesteuerten Oszillatoren</b>	
3.1 Einführung .....	33
3.2 Prinzip des numerisch gesteuerten Oszillators .....	34
3.3 Auswirkung der Wortlängenreduktionen .....	36
3.3.1 Allgemeines .....	36
3.3.2 Quantisierung des Phasenwinkels .....	37
3.3.3 Quantisierung der Ausgangsamplitude .....	42
3.4 Modulation mit numerisch gesteuerten Oszillatoren .....	45
3.5 Problematik der Digital/Analog-Umsetzung .....	48
3.5.1 Einführung .....	48
3.5.2 Rekonstruktion des analogen Signales .....	49
3.5.3 Der reale Digital/Analog-Umsetzer .....	51
3.5.4 Einfluß des analogen Rekonstruktionsfilters .....	56

<b>4</b>	<b>Synthese bandbegrenzter Rauschsignale mit numerisch gesteuerten Oszillatoren</b>	
4.1	Einführung	61
4.2	Eine neuartige Schaltung mit zwei numerisch gesteuerten Oszillatoren	61
4.3	Das numerische Syntheseverfahren	67
4.3.1	Einführung	67
4.3.2	Beschreibung periodischer zeitdiskreter stochastischer Signale	68
4.3.3	Der numerische Synthesalgorithmus	72
4.4	Modellierung und Simulation des digitalen Rauschgenerators	82
4.4.1	Allgemeines	82
4.4.2	Untersuchungen zur Auslegung der digitalen Systemkomponenten	82
4.4.3	Simulationsergebnisse bei vorgegebenen Leistungsdichtespektren	90
<b>5</b>	<b>Realisierung des digitalen Rauschgenerators</b>	
5.1	Konzept	99
5.2	Das Prozessorsystem	101
5.3	Modulatorbaugruppe und Digital/Analog-Umsetzer	102
5.4	Meßergebnisse mit dem realisierten Rauschgenerator	104
5.4.1	Spektrale Eigenschaften des unmodulierten Systems	104
5.4.2	Meßergebnisse bei vorgegebenen Leistungsdichtespektren	111
<b>6</b>	<b>Statistische Untersuchungen mit dem digitalen Rauschgenerator</b>	
6.1	Einführung	117
6.2	Ausgewählte Begriffe zur Charakterisierung des Rauschsignales	117
6.2.1	Allgemeines	117
6.2.2	Mittelwert, Varianz und Autokorrelationsfunktion	118
6.2.3	Amplitudenverteilung	122
6.3	Charakteristische Eigenschaften des synthetisierten Rauschsignales	129
6.3.1	Einfluß des Normierungsfaktors auf die statistischen Kenngrößen	129
6.3.2	Einfluß der numerisch gesteuerten Oszillatoren auf die statistischen Kenngrößen	136
6.4	Meßergebnisse beim Einsatz am Protonenbeschleuniger <i>COSY</i>	145
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	149
	<b>Literaturverzeichnis</b>	151



## Formelzeichen und Abkürzungen

### Formelzeichen

$a_{S/N}$	Signal-Rausch-Abstand
$a_{norm}$	Reeller, zeitunabhängiger Normierungsfaktor
$a_{stör}$	Störfreier Dynamikbereich
$a_v$	Komplexe Musterfolge der komplexen Zufallsvariablen $A_v$
$ a_v , \phi_v$	Betrag und Phase der komplexen Musterfolge $a_v$
$a(n)$	Komplexe stochastische Einhüllende des reellen Bandpaßprozesses
$a_r(n), a_i(n)$	Real- und Imaginärteil von $a(n)$
$a(n)$	Komplexe Musterfolge der komplexen stochastischen Einhüllenden $a(n)$
$ a(n) , \phi(n)$	Betrag und Phase der komplexen Musterfolge $a(n)$
$A$	Wortlänge der Phasenmodulationsfolge $P(n)$
$A_v$	Zeitunabhängige komplexe Zufallsvariable
$ A_v , \Phi_v$	Betrag und Phase der komplexen Zufallsvariablen $A_v$
$B$	Anzahl der Binärstellen um die die Wortlänge des Phasenakkumulators des NCO reduziert wird
$C$	Wortlänge der Eingangsfolge des DAU
$C_s(j\omega)$	Charakteristische Funktion des synthetisierten zeitdiskreten Rauschsignales
$C_{s_v}(j\omega)$	Charakteristische Funktion der harmonischen Zufallsvariablen $s_v$
$D$	Wortlänge der Ausgangsfolge des NCO (Amplitudenauflösung)
$E\{\bullet\}$	Erwartungswertoperator
$f_B$	Bandbreite des Bandpaßprozesses
$f_{clk}$	Systemtakt rate des digitalen Systems
$f_q$	Lage der Störkomponenten des NCO im Ausgangsspektrum
$f_s$	Ausgangsfrequenz des NCO
$f_{smax}$	Maximal sinnvolle Ausgangsfrequenz des digitalen Rauschgenerators
$f_{stör}$	Lage der durch den DAU verursachten Störkomponenten im Ausgangsspektrum
$f_0$	Trägerfrequenz des Bandpaßprozesses
$f_1, f_2$	Untere und obere Grenzfrequenz des Bandpaßprozesses
$\Delta f$	Spektrale Auflösung des periodischen, frequenzdiskreten Spektrums
$F$	Ganzzahliges Frequenzwort am Frequenzeingang des NCO
$h_0(t)$	Impulsantwort des Haltegliedres nullter Ordnung
$h_R(t)$	Impulsantwort des analogen Rekonstruktionsfilters
$H_f(j\omega)$	Übertragungsfunktion des idealen Interpolationsfilters



$H_R(j\omega)$	Übertragungsfunktion des analogen Rekonstruktionsfilters
$H_0(j\omega)$	Übertragungsfunktion des Halteglieders nullter Ordnung
$J_0(\bullet)$	Besselfunktion erster Art, nullter Ordnung
$k$	Ganzzahlige Laufvariable
$K$	Periodenlänge der Phasenfolge und der Ausgangsfolge des NCO
$l$	Ganzzahlige Laufvariable
$L$	Wortlänge des Phasenakkumulators des NCO (Frequenzauflösung)
$m$	Ganzzahlige Variable
$m_0$	Auf die spektrale Auflösung normierte äquivalente ganzzahlige Trägerfrequenz
$m_1, m_2$	Auf die spektrale Auflösung normierte äquivalente ganzzahlige untere und obere Grenzfrequenz $f_1$ und $f_2$
$M$	Periodenlänge der Phasenfehlerfolge des NCO
$n$	Ganzzahlige Laufvariable
$N$	Periodenlänge des zeitdiskreten Signales bzw. Prozesses
$p_s(x)$	Verteilungsdichte des synthetisierten zeitdiskreten Rauschsignales
$\hat{p}_{s_k}(x)$	Mittels Histogramm ermittelte Verteilungsdichte des synthetisierten zeitkontinuierlichen Rauschsignales
$p_{s_v}(x)$	Verteilungsdichte der harmonischen Zufallsvariablen $s_v$
$p_{\Phi_v}(\varphi_v)$	Verteilungsdichte der stochastischen Phase $\Phi_v$
$P_I$	Signalleistung der stärksten Störkomponente im betrachteten Frequenzbereich
$P_N$	Mittlere Rauschleistung
$P_S$	Mittlere Signalleistung
$P(n)$	Ganzzahlige Phasenmodulationsfolge des NCO
$P_1(n), P_2(n)$	Ganzzahlige stochastische Phasenmodulationsfolgen der beiden NCO
$P_1(n), P_2(n)$	Musterfolgen der ganzzahligen stochastischen Phasenmodulationsfolgen $P_1(n)$ und $P_2(n)$
$Q_A$	Quantisierungsstufe der Phasenmodulationswerte des NCO
$Q_D$	Quantisierungsstufe der Amplitudenwerte des NCO
$r_{aa}(k)$	Autokorrelationsfolge des äquivalenten Basisbandprozesses
$r_{KK}(\tau)$	Autokorrelationsfunktion des rekonstruierten zeitkontinuierlichen Zufallsprozesses $s_k(t)$
$r_{ss}(k)$	Autokorrelationsfolge des zeitdiskreten Zufallsprozesses $s(n)$
$R$	Anzahl der Spektralanteile des vorgegebenen äquivalenten Basisbandprozesses $S_{aa}(\zeta)$
$s_{max}$	Maximale Signalamplitude
$s(n)$	Zeitdiskretes Signal, das im allgemeinen Fall komplex ist

$s_r(n), s_i(n)$	Real- und Imaginärteil von $s(n)$
$s(n)$	Zeitdiskreter Zufallsprozeß, der im allgemeinen Fall komplex ist
$s^+(n)$	Zugehöriger analytischer Prozeß
$s_{DA}(n)$	Eingangsfolge des DAU
$s_{DA}(n)$	Zeitdiskreter Zufallsprozeß am Eingang des DAU
$s_{PM}(n)$	Phasenmodulierte Ausgangsfolge des NCO
$s_q(n)$	Quantisiertes zeitdiskretes Signal $s(n)$
$s_q(n)$	Quantisierter zeitdiskreter Zufallsprozeß
$s_K(t)$	Rekonstruiertes zeitkontinuierliches Ausgangssignal des DAU
$s_K(t)$	Rekonstruierter zeitkontinuierlicher Zufallsprozeß am Ausgang des DAU
$s_R(t)$	Zeitkontinuierliches Ausgangssignal des analogen Rekonstruktionsfilters
$S_{aa}(\xi)$	Vorgegebenes frequenzdiskretes Leistungsdichtespektrum des äquivalenten Basisbandprozesses
$S_{DA}(e^{j\omega T})$	Periodisches Spektrum von $s_{DA}(n)$
$S_{DA}(k)$	Fourierkoeffizienten der periodischen Eingangsfolge des DAU
$S_K(j\omega)$	Spektrum von $s_K(t)$
$S_{KK}(j\omega)$	Leistungsdichtespektrum des rekonstruierten zeitkontinuierlichen Zufallsprozesses
$S_q(l)$	Spektrum des quantisierten zeitdiskreten Signales $s_q(n)$
$S_{RR}(j\omega)$	Leistungsdichtespektrum am Ausgang des analogen Rekonstruktionsfilters
$S_{ss}(e^{j\Omega})$	Periodisches Leistungsdichtespektrum eines zeitdiskreten Zufallsprozesses
$S_{ss}(l)$	Periodisches, frequenzdiskretes Leistungsdichtespektrum eines periodischen, zeitdiskreten Zufallsprozesses
$S_{s^+s^+}(e^{j\Omega})$	Leistungsdichtespektrum des zu $s(n)$ analytischen Zufallsprozesses
$t$	Zeitvariable
$T$	Systemtaktperiode des digitalen Systems
$W$	Wortlänge der Adresse der Funktionstabelle des NCO (Phasenauflösung)
$\delta(\bullet)$	DIRACsche Deltafunktion
$\delta_K(\bullet)$	KRONECKER-Symbol
$\varepsilon_A(n)$	Modulationsfehlerfolge des NCO
$\varepsilon_D(n)$	Amplitudenfehlerfolge des NCO
$\varepsilon_N(s)$	Abweichung der Verteilungsdichte $p_s(x)$ gegenüber der Normalverteilung
$\varepsilon_p(n)$	Phasenfehlerfolge des NCO
$\varepsilon_\Theta(n), \varepsilon_\Phi(n)$	Quantisierungsfehlerfolgen der Zufallsprozesse $\Theta(n)$ und $\Phi(n)$
$\varepsilon_1(n), \varepsilon_2(n)$	Wertefolgen zur Beschreibung der Modulo-Operation bei der Phasenmodulation der beiden NCO
$\Theta(n)$	Äquivalenter Zufallsprozeß für den Betrag der komplexen stochastischen Einhüllenden $a(n)$

$\Theta(n)$	Musterfolge des reellen Zufallsprozesses $\Theta(n)$
$\nu, \mu$	Ganzzahlige Variablen
$\mu_a$	Mittelwert des mit $a_{norm}$ gewichteten idealen Rauschsignales
$\mu_q$	Mittelwert des synthetisierten zeitdiskreten Rauschsignales
$\mu_s$	Mittelwert des idealen Rauschsignales
$\xi_1(n), \xi_2(n)$	Auf das Intervall $[0, 2\pi)$ abgebildete Musterfolgen $\psi_1(n)$ und $\psi_2(n)$
$\sigma_a^2$	Varianz des mit $a_{norm}$ gewichteten idealen Rauschsignales
$\sigma_A^2$	Varianz der Modulationsfehlerfolgen
$\sigma_D^2$	Varianz der Amplitudenfehlerfolgen
$\sigma_q^2$	Varianz des synthetisierten zeitdiskreten Rauschsignales
$\sigma_s^2$	Varianz des idealen Rauschsignales
$\tau$	Zeitdifferenz
$\phi(n)$	Phase der komplexen stochastischen Einhüllenden $a(n)$
$\phi_{PM}(n)$	Phasenmodulationsfolge
$\omega$	Kreisfrequenz
$\Omega$	Auf die Systemtaktrate $f_{clk}$ normierte Kreisfrequenz
$\Omega_0$	Normierte Trägerkreisfrequenz
$\Omega(n)$	Phasenfolge am Ausgang des Phasenakkumulators
$\Omega_0(n)$	Phasenfolge am Ausgang des Phasenmodulators bei der Frequenz $f_0$
$\Psi_1(n), \Psi_2(n)$	Stochastische Phasenmodulationsfolgen der beiden NCO
$\psi_1(n), \psi_2(n)$	Musterfolgen der stochastischen Phasenmodulationsfolgen $\Psi_1(n), \Psi_2(n)$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{I}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich Null

## Abkürzungen

COSY	COoler SYnchrotron
DAU	Digital/Analog-Umsetzer
DDS	Direct Digital Synthesis
LSB	Least Significant Bit
MSB	Most Significant Bit
NCO	Numerically Controlled Oscillator
SFDR	Spurious Free Dynamik Range

# 1 Einleitung

Rauschen ist nach allgemeiner Auffassung etwas Störendes, das insbesondere in der Kommunikationstechnik allgegenwärtig ist und mittlere bis große Probleme verursacht. Im Gegensatz dazu gewinnt der gezielte Einsatz von Rauschsignalen in der Kommunikations-, Radar- und Meßtechnik aufgrund ihrer spezifischen Eigenschaften zunehmend an Bedeutung. So werden beispielsweise Rauschsignale zur meßtechnischen Ermittlung der Kenngrößen von Übertragungssystemen unter realitätsnahen Bedingungen verwendet [Den 88, Mil 88, Kam 92]. Neben den zuvor genannten klassischen Bereichen finden Rauschsignale heute auch auf anderen wissenschaftlichen Gebieten ein breites Anwendungsfeld. In der Mittelenergiephysik werden zum Beispiel Rauschsignale mit definierter spektraler Leistungsdichte unter anderem zur Beeinflussung beschleunigter Teilchen verwendet [Meu 92]. So auch am Protonenbeschleuniger *COSY* (COoler SYnchrotron) der Forschungszentrum Jülich GmbH, wo hochfrequente, schmalbandige Rauschsignale mit konfigurierbaren Leistungsdichtespektren und der Möglichkeit zur Variation ihrer Trägerfrequenz in Realzeit für die sogenannte ultralangsame Extraktion benötigt werden. Für eine Vielzahl von Anwendungsfällen ist es daher vorteilhaft oder sogar notwendig, daß ein Rauschsignal mit definierten statistischen Eigenschaften zur Verfügung steht.

Zur Synthese derartiger Rauschsignale werden beispielsweise bei den heutigen Teilchenbeschleunigern zumeist analoge Hochfrequenzsysteme verwendet [Meu 92, Mol 94]. Neben dem beträchtlichen Realisierungs- und Kostenaufwand dieser Systeme besteht ein weiterer wesentlicher Nachteil in der erheblich eingeschränkten Konfigurierbarkeit der Leistungsdichtespektren der erzeugten Rauschsignale. Ferner lassen sich die durch die analogen Mischer verursachten Seitenbänder — wegen der geforderten Wobbelfähigkeit — nur sehr begrenzt durch analoge Filterung beeinflussen. Aufgrund der in den letzten Jahrzehnten zu verzeichnenden Fortschritte bei der digitalen Signalverarbeitung entstand der Gedanke, digitale Verfahren zur Synthese der Rauschsignale zu verwenden. Ein Ansatz hierzu wurde von [Nol 92] aufgezeigt. Allerdings stand dabei die digitale Synthese des zum bandbegrenzten Rauschsignal äquivalenten Basisbandsignales im Mittelpunkt des Interesses. Die Modulation zur Umsetzung des äquivalenten Basisbandsignales in eine höhere Frequenzlage erfolgt jedoch auch hierbei mittels analoger Komponenten, so daß die sich dadurch ergebenden Nachteile weiterhin bestehen bleiben. Vor diesem Hintergrund ist die Idee zu sehen, das gesamte analoge Rauschsystem durch ein vollständig digitales System zu ersetzen.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht deshalb die digitale Synthese schmalbandiger Rauschsignale mit nahezu beliebig konfigurierbaren Leistungsdichtespektren und der Möglichkeit zur Variation der Trägerfrequenz in Realzeit. Als kritische Parameter im Hinblick auf eine praktische Realisierung erweisen sich dabei in erster Linie die maximal erzielbare Datenrate und die Variation der Trägerfrequenz in Realzeit (**Kapitel 2**). Aus diesem Grund erscheinen solche Schaltungsstrukturen zweckmäßig, die keine Multiplikation enthalten und es mit vergleichsweise geringem Aufwand ermöglichen, einen bestimmten Frequenzbereich durchzustimmen. Zur Lösung dieser Problematik wird in **Kapitel 4** eine neue Schaltungsstruktur vorgestellt, die auf der direkten digitalen Signalsynthese mit numerisch gesteuerten Oszillatoren beruht.

Spätestens seit Ende der achtziger Jahre hat die direkte digitale Signalsynthese auf der Basis numerisch gesteuerter Oszillatoren erheblich an Bedeutung gewonnen, da diese gegenüber der Signalsynthese mit digitalen Signalprozessoren eine wesentlich höhere Signalfrequenz erlaubt und die digitale Frequenz- und Phasenmodulation mit relativ geringem Aufwand bei vergleichsweise hohen Datenraten ermöglicht. Obwohl die direkte digitale Signalsynthese traditionell aus der militärischen Kommunikations- und Radartechnik stammt, wird sie heute bereits in einem weiteren Bereich kommerzieller Geräte eingesetzt (z.B. [McC 90, Par 92, Bor 93, Tek 94, Sek 94, Vin 94]). Hierzu hat insbesondere die Realisierung der numerisch gesteuerten Oszillatoren in Form von monolithischen Schaltkreisen mit hohem Integrationsgrad beigetragen, wodurch sich der Schaltungs- und Kostenaufwand beträchtlich reduziert hat. Die Beschreibung der numerisch gesteuerten Oszillatoren steht im Mittelpunkt von **Kapitel 3**, wobei aus der Literatur bekannte Erkenntnisse zur Synthese monofrequenter Signale in einer dieser Arbeit angepaßten Form aufgearbeitet und ergänzt werden.

Im Vergleich zu analogen Rauschsystemen ist bei einer digitalen Systemrealisierung neben einer geeigneten Schaltungsstruktur ein effizienter Synthesalgorithmus von großer Bedeutung. Daher besteht ein weiterer Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit in der Ableitung eines geeigneten Synthesalgorithmus auf der Grundlage vorgegebener Leistungsdichtespektren. Im Unterschied zu [Nol 92] beruht der in **Kapitel 4** abgeleitete Synthesalgorithmus nicht auf der zeitdiskreten Fouriertransformation, sondern auf der zeitdiskreten Karhunen-Loève-Transformation. Hierbei spielt unter anderem die Systemtaktrate und die Periodizität des erzeugten Rauschsignales eine wichtige Rolle.

**Kapitel 5** befaßt sich mit der Realisierung des digitalen Rauschgenerators. Meßergebnisse bei unterschiedlich vorgegebenen Leistungsdichtespektren stellen die Funktionsfähigkeit der entwickelten Schaltungsstruktur und des Synthesealgorithmus unter Beweis. Die Vor- und Nachteile werden dabei anhand einer Gegenüberstellung der Simulations- und Meßergebnisse diskutiert. Weiterhin lassen sich prinzipielle Kriterien zur Auswahl geeigneter Systemkomponenten ableiten. Abschließend wird in **Kapitel 6** anhand statistischer Untersuchungen diskutiert, inwieweit die entwickelte Schaltungsstruktur und die numerisch gesteuerten Oszillatoren einen Einfluß auf die statistischen Eigenschaften des erzeugten Rauschsignals haben.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand im Zentrallabor für Elektronik der Forschungszentrum Jülich GmbH.

Mein besonderer Dank gilt zunächst Herrn Prof. Dr.-Ing. Wido Kumm, Leiter des Fachgebietes Nachrichtentechnik der Universität-GH Paderborn, der mir durch seine Bereitschaft zur Übernahme des Referates die Gelegenheit zur Durchführung der Arbeit gegeben hat. Seine wohlwollende Unterstützung sowie viele Anregungen haben wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Klaus Meerkötter, Leiter des Fachgebietes Nachrichtentheorie der Universität-GH Paderborn, danke ich für die wertvollen Hinweise und Diskussionen sowie besonders für die Übernahme des Korreferates.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Horst Halling, Zentrallabor für Elektronik der Forschungszentrum Jülich GmbH, und Herrn Prof. Dr. Hermann Meuth, Fachhochschule Darmstadt, für ihre ständige Diskussionsbereitschaft und die zahlreichen Anregungen sowie die Bereitschaft zur kritischen Durchsicht des Manuskriptes.

Weiterhin gebührt allen Kollegen des Zentrallabor für Elektronik und der Hochfrequenzgruppe in der Abteilung für physikalische Großgeräte (*COSY*) der Forschungszentrum Jülich GmbH sowie der Fachgebiete Nachrichtentechnik und Nachrichtentheorie der Universität-GH Paderborn mein Dank für eine Vielzahl fruchtbarer Diskussionen. Stellvertretend für viele sei hier Herr Dr.-Ing. Alexander Schnase genannt, dessen Unterstützung den Werdegang dieser Arbeit ganz wesentlich begleitet hat.

Günter Heinrichs





## 2 Bandbegrenzte zeitdiskrete stochastische Signale

### 2.1 Rauschen

Üblicherweise tritt Rauschen als störender Effekt auf. Aufgrund der spezifischen Eigenschaften von Rauschsignalen gewinnt ihr gezielter Einsatz in der Nachrichten-, Radar- und Meßtechnik jedoch zunehmend an Bedeutung. Eine wichtige Anwendung von Rauschsignalen ist beispielsweise die meßtechnische Ermittlung der Kenngrößen von Übertragungssystemen. Die klassische Systemtheorie basiert ausschließlich auf determinierten Testsignalen (Exponentialfunktion, Sprungfunktion, Diracfunktion). Diese haben den Vorteil, daß ihre Zeitverläufe genau definiert und damit mathematisch eindeutig erfaßbar sind. Im Sinne der Informationstheorie kann man jedoch durch völlig determinierte Signale keine Information übertragen [Kum 89]. In der Praxis müssen daher Übertragungssysteme nicht nur ein bestimmtes Signal übertragen oder in geeigneter Weise umformen, sondern eine Vielzahl möglicher Signalformen. Auch die Approximation des Diracimpulses stellt oft eine schwer zu lösende Aufgabe dar. Die Einführung von Rauschsignalen in die Systemtheorie kann hier einen Ausweg bieten. Manche Probleme sind ohne die Einbeziehung von Rauschsignalen überhaupt nicht lösbar. Beispielsweise ist bei Audiosystemen der Einsatz von Rauschsignalen zu meßtechnischen Zwecken durchweg üblich, da bei Sprach- und Musikübertragungen die jeweilige Erfassung einer einzigen Frequenzkomponente keine schlüssige Aussage über die Systemkenngrößen erlaubt. Weitere Beispiele von Einsatzmöglichkeiten sind [Gup 75, Den 88, Mil 88]

- das Erkennen stark verrauschter Signale,
- die Ermittlung des Frequenzverhaltens von Regelkreisen,
- die Ermittlung der akustischen Eigenschaften von Räumen und
- die Beeinflussung von graphischen Daten bei der digitalen Bildverarbeitung.

Auf dem Gebiet der Hochfrequenztechnik eröffnet neben der Radartechnik insbesondere die mobile Kommunikation zunehmend weitere Anwendungsmöglichkeiten für Rauschsignale. Beispiele hierfür sind die Modulation ausgesandter Radarimpulse mit Rauschsignalen [Mül 79, Rab 85], und die Bestimmung der Bitfehlerrate auf gezielt verrauschten Übertragungsstrecken, die codierte Signale übermitteln [Kam 92, Pfe 94]. Auch auf anderen wissenschaftlichen Gebieten ist der Einsatz von Rausch-

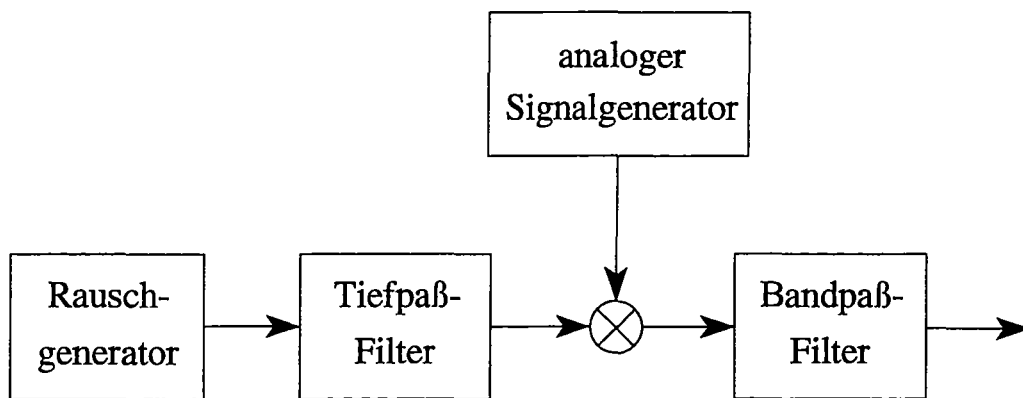
signalen heute durchweg üblich. In der Mittelenergiephysik werden beispielsweise hochfrequente, schmalbandige Rauschsignale zur Beeinflussung beschleunigter Teilchen verwendet [Meu 92, Mol 94]. So auch am Protonenbeschleuniger *COSY* der Forschungszentrum Jülich GmbH, wo unter anderem Rauschsignale mit definierten Vorgaben bezüglich der Trägerfrequenz, der Bandbreite und der spektralen Leistungsdichte zur sogenannten *ultralangsam* Extraktion benötigt werden.

Für eine Vielzahl von Anwendungsfällen ist es daher vorteilhaft oder sogar notwendig, daß ein Rauschsignal mit definierten statistischen Eigenschaften zur Verfügung steht. Für die ultralangsame Extraktion am Protonenbeschleuniger *COSY* ergibt sich zum Beispiel nachfolgendes Anforderungsprofil:

Die Vorgabe nahezu beliebiger Leistungsdichtespektren mit

- wählbaren Bandbreiten von 1 kHz bis 100 kHz,
- einstellbaren Trägerfrequenzen von bis zu 20 MHz und
- einer Flankensteilheit des synthetisierten Rauschsignales von minimal 120 dB/Oktave
- sowie der Möglichkeit zur Variation der Trägerfrequenz in Realzeit mit einer Geschwindigkeit von bis zu 1 kHz/s.

Zur Synthese derartiger Rauschsignale werden beispielsweise bei den heutigen Teilchenbeschleunigern zumeist analoge Hochfrequenzsysteme, bestehend aus analogen Rausch- und Signalgeneratoren sowie steiflankigen Quarzfiltern, verwendet [Mol 94]. Der Grund dafür liegt darin, daß derzeit am Markt verfügbare analoge Rauschgeneratoren vielfach nur ein breitbandiges weißes Rauschsignal erzeugen [Roh 93, Hew 94]. Nur wenige analoge Rauschgeneratoren bieten dabei die Möglichkeit zur Veränderung der Bandbreite durch analoge Filterung des breitbandigen Rauschsignales [Noi 94]. Dies bedeutet jedoch eine erhebliche Einschränkung der Wobbelfähigkeit derartiger Rauschgeneratoren, da die Anpassung der Filtercharakteristik in Realzeit im allgemeinen nicht möglich ist. Die Variation der Trägerfrequenz in Realzeit wird daher in der Regel mittels einer zusätzlichen Modulation mit Hilfe eines analogen Signalgenerators realisiert. Je nach gefordertem Leistungsdichtespektrum sind hierzu oftmals auch mehrere Signalgeneratoren notwendig. Eine vereinfachte prinzipielle Anordnung hierzu zeigt Bild 2.1, wobei ein niederfrequentes, breitbandiges Rauschsignal mittels eines Rauschgenerators zumeist analog erzeugt, durch nachfolgende Tiefpaßfilterung bandbegrenzt und anschließend analog in eine höhere Frequenzlage umgesetzt wird.



**Bild 2.1** Vereinfachte Anordnung zur analogen Erzeugung hochfrequenter, schmalbandiger Rauschsignale mit der Möglichkeit zur Variation der Trägerfrequenz in Realzeit

Die wesentlichen Nachteile einer derartigen analogen Realisierung sind zum einen die erheblich eingeschränkte Flexibilität bezüglich der Forderung nahezu beliebig konfigurierbarer Leistungsdichtespektren und zum anderen der relativ geringe störfreie Dynamikbereich, verursacht durch die aufgrund der analogen Mischer auftretenden Seitenbänder, die wegen der geforderten Wobbelfähigkeit zumeist nicht durch zusätzliche Filterung zu eliminieren sind. Die Kombination aus analogen Rausch- und Signalgeneratoren sowie Quarzfiltern mit unterschiedlichen Grenzfrequenzen bedeutet zudem einen hohen gerätetechnischen Aufwand, was die in [Mol 94] dargestellte Anordnung zur stochastischen Extraktion dokumentiert.

Aufgrund der ständigen Weiterentwicklung der digitalen Signalverarbeitung in den letzten Jahrzehnten, zu der insbesondere die steigende Komplexität der integrierten Halbleiterschaltungen und die Fortschritte in der Computertechnik beigetragen haben, eröffnet sich die Möglichkeit, Rauschsignale mit Hilfe digitaler Verfahren zu synthetisieren. Vor allem die digitale Synthese von Rauschsignalen mittels Zufallszahlengeneratoren stand bisher im Mittelpunkt des Interesses [Jam 90, L'Ecu 90]. Ein wesentlicher Vorteil digitaler Verfahren gegenüber analogen ist neben der auch im Detail exakten Reproduzierbarkeit die genaue Kenntnis ihrer Eigenschaften, die durch den Synthesalgorithmus eindeutig festgelegt sind. Dadurch lassen sich beispielsweise systembedingte Abweichungen unter Einbeziehung in den Synthesalgorithmus kompensieren.

Digital synthetisierte Rauschsignale lassen sich heute unter anderem im Audiobereich durch sogenannte *arbiträre* Wortgeneratoren [LeC 93, Tek 94] erzeugen, wobei bis zu Frequenzen von einigen hundert Kilohertz eine fortlaufende Berechnung der stochastischen Wertefolgen in Realzeit möglich ist. Oberhalb dieses Frequenzbereiches ist jedoch derzeit eine Werteberechnung in Realzeit aus technischen Gründen ausgeschlossen, da die Rechengeschwindigkeit heutiger Signal- und Mikroprozessoren hierzu nicht ausreicht. Weiterhin läßt sich die Synthese hochfrequenter, schmalbandiger und gleichzeitig in ihrer Trägerfrequenz variierbarer Rauschsignale wiederum nur mittels einer dem Wortgenerator nachgeschalteten analogen Modulation realisieren [Nol 92]. Der Einsatz arbiträrer Wortgeneratoren gestattet im Vergleich zu analogen Rauschgeneratoren somit zwar eine weitaus flexiblere und präzisere Synthese der jeweils geforderten Leistungsdichtespektren, die infolge der notwendigen analogen Modulation auftretenden Nachteile bleiben allerdings weiterhin bestehen.

*Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher die Entwicklung eines geeigneten neuen Konzeptes zur vollständig digitalen Synthese hochfrequenter, schmalbandiger Rauschsignale mit nahezu beliebig konfigurierbaren Leistungsdichtespektren und der Möglichkeit zur Variation der Trägerfrequenz in Realzeit.*

Dies setzt zunächst die Klärung einiger spezifischer Randbedingungen voraus, wobei der Beschreibung zeitdiskreter, stationärer bandbegrenzter stochastischer Prozesse eine wichtige Bedeutung zukommt. Bevor diese in Abschnitt 2.3 eingehender diskutiert werden, ist es sinnvoll, zunächst einige Definitionen und Eigenschaften zeitdiskreter Signale näher zu betrachten.

## **2.2 Beschreibung zeitdiskreter Signale**

### **2.2.1 Das zeitdiskrete Signal**

In der Literatur werden häufig zeitdiskrete Signale aus zeitkontinuierlicher Signalen abgeleitet. Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht jedoch die Synthese zeitdiskreter Signale durch ein digitales System. Daher werden zunächst notwendige Definitionen bezüglich der Interpretation und der Schreibweise zeitdiskreter Signale festgelegt.

Bei zeitdiskreten Signalen handelt es sich um eine geordnete Folge von Signalwerten. Es ist daher [Mee 91]

$$s = s(t_n) , \quad t_n = [\dots t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 \dots] . \quad (2.1)$$

Zeitdiskrete Signale sind nur zu bestimmten Zeitpunkten definiert und werden zu meist in äquidistanten Abständen aufgetragen. Dies trifft insbesondere auf digitale Systeme zu, da diese in der Regel mit einem konstanten Taktsignal versorgt werden. Bei einem konstanten Taktsignal gilt

$$t_n = t_0 + n \cdot T , \quad T = t_n - t_{n-1} , \quad (2.2)$$

wobei  $n$  eine ganzzahlige Variable im Bereich  $-\infty < n < \infty$  darstellt. Bei digitalen Systemen entspricht  $T$  der Taktperiode des Systems. Bei dem hier betrachteten System läßt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Anfangszeitpunkt  $t_0$  durch geeignete Wahl des Zeitnullpunktes immer zu Null angeben. In der vorliegenden Arbeit sei daher das zeitdiskrete Signal definiert als

$$s = s(nT) = s(n) , \quad s(n) \in \mathbb{C} , \quad \forall n \in \mathbb{I} , \quad t_0 = 0 . \quad (2.3)$$

Zeitdiskrete Signale bzw. die sie repräsentierenden Folgen können reelle oder komplexe Zeitfunktionen sein. Demzufolge sei das komplexe zeitdiskrete Signal definiert als

$$s(n) = s_r(n) + j s_i(n) , \quad \forall n \in \mathbb{I} , \quad (2.4)$$

für das auch die Rechenregeln der komplexen Zahlen gelten sollen. Die Folgen  $s_r(n) = \text{Re}\{s(n)\}$  ( Realteil ) und  $s_i(n) = \text{Im}\{s(n)\}$  ( Imaginärteil ) sind reelle zeitdiskrete Signale.

### 2.2.2 Quantisierung zeitdiskreter Signale

Bei der Einführung der Definition zeitdiskreter Signale wurde implizit angenommen, daß die Signalwerte der ihnen zugeordneten Zahlenfolgen eine unendliche Genauigkeit besitzen. In realen Systemen ist die Zahl der möglichen unterscheidbaren

Signalwerte stets endlich. Insbesondere die technische Realisierung digitaler Systeme mittels Signalprozessoren oder digitaler Speziialschaltungen mit Festkomma-Arithmetik führt wegen ihrer endlichen Darstellungsgenauigkeit von Signalwerten nicht nur zu einer zeitdiskreten, sondern auch zu einer amplitudendiskreten Signalquantisierung. Bei der Realisierung mit Hilfe von Gleitkomma-Arithmetik (bei einer Wortlänge von 32 bit und mehr) dürfte dieser Effekt zumeist vernachlässigbar sein, da er durch die Selbst-Skalierung, die für die Gleitkomma-Arithmetik charakteristisch ist, unterdrückt wird [Unb 93]. Da die Festkomma-Arithmetik gegenüber der Gleitkomma-Arithmetik bezüglich der Verarbeitungsgeschwindigkeit wesentliche Vorteile aufweist und letztgenannte für die Realzeitverarbeitung wegen des hohen Rechenaufwandes derzeit nur bei speziellen Systemen zu empfehlen ist [Azi 90, Hes 93, Unb 93], wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit immer dort die Festkommadarstellung von Signalwerten bei der Systemrealisierung angewendet, wo eine hohe Datenrate gefordert ist.

Die technische Realisierung digitaler Systeme basiert auf einer dualen Darstellung der in den jeweiligen Systemalgorithmus eingehenden Größen. Somit müssen die in der Regel als Dezimalzahlen vorliegenden Signalwerte und Koeffizienten eines Systemalgorithmus in Dualzahlen umcodiert werden. Die Festkommadarstellung dualer Zahlen basiert auf dem dualen Zahlensystem. Ein wichtiger Gesichtspunkt bei dieser Zahlendarstellung ist die Codierung negativer Zahlen. In der digitalen Signalverarbeitung verwendet man im wesentlichen vier bezüglich negativer Zahlen unterschiedliche Festkommadarstellungen [Opp 92, Pro 92]:

- Die Vorzeichen-Betrag-Darstellung,
- die Einerkomplement-Darstellung,
- die Zweierkomplement-Darstellung und
- die Zweierkomplement-Darstellung mit *Offset*.

Da bei dem im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten digitalen System die duale Darstellung negativer Zahlen im Zweierkomplement ohne *Offset* angewendet wird, beschränkt sich die weitere Diskussion in der vorliegenden Arbeit auf diese Art der Zahlendarstellung.

Der allgemeine Ausdruck für die Zweierkomplement-Darstellung einer reellen Zahl unendlicher Genauigkeit lautet [Opp 92]

$$s = s_{\max} \cdot \left( -b_0 + \sum_{v=1}^{\infty} b_v \cdot 2^{-v} \right), \quad b_0, b_v \in \{0, 1\}, \quad (2.5)$$

wobei  $s_{\max}$  einen beliebigen Skalierungsfaktor darstellt und  $b_v$  die jeweilige Binärstelle repräsentiert. Das Vorzeichen der reellen Zahl wird durch das Vorzeichenbit  $b_0$  beschrieben, welches gleichzeitig das MSB (*Most Significant Bit*) ist. Bei der Darstellungsform nach Gl. (2.5) steht das Komma immer direkt rechts neben dem Vorzeichenbit. Im Hinblick auf die endliche Darstellungsgenauigkeit von Zahlenwerten in realen digitalen Systemen ist es notwendig Gl. (2.5) dahingehend zu modifizieren, daß nur eine endliche Anzahl von Binärstellen zur Zweierkomplement-Darstellung einer reellen Zahl verwendet wird. Legt man eine Wortlänge von  $B$  Binärstellen zugrunde, so erhält man

$$s_q = s_{\max} \cdot \left( -b_0 + \sum_{v=1}^{B-1} b_v \cdot 2^{-v} \right), \quad B \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Die Reduzierung der unendlichen Wortlänge führt somit zu einer Quantisierung der darstellbaren Zahlenwerte, so daß die kleinste Differenz zwischen zwei möglichen Zahlenwerten  $s_{\max} \cdot 2^{-(B-1)}$  ist. Der darstellbare Zahlenbereich ergibt sich, unter Berücksichtigung von Gl. (2.6), demnach zu

$$-s_{\max} \leq s_q \leq s_{\max} \cdot (1 - 2^{-B+1}). \quad (2.7)$$

Die Quantisierung der darstellbaren Zahlenwerte durch die Wortlängenreduktion ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung niederwertiger Binärstellen. Die daraus entstehende Abweichung vom Idealfall der unendlich großen Wortlänge berechnet sich mit Gl. (2.5) und Gl. (2.6) zu

$$\varepsilon = s_q - s = -s_{\max} \cdot \sum_{v=B}^{\infty} b_v \cdot 2^{-v}, \quad (2.8)$$

wobei  $\varepsilon$  zumeist als Quantisierungsfehler bezeichnet wird [Opp 92, Pro 92].



Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich, daß gerade bei der Festkommadarstellung die Frage der geeigneten Skalierung und des Dynamikbereiches signifikant ist. Im Hinblick auf die technische Realisierung digitaler Systeme ist daher die Kenntnis der durch die Wortlängenreduktion hervorgerufenen Effekte von großer Bedeutung. Um zu einer sinnvollen Beurteilung der Größe des Quantisierungsfehlers zu gelangen, ist es zweckmäßig, die Quantisierungsrauschleistung zur Signalleistung in Bezug zu bringen. Daher ist in praktisch allen Kommunikationssystemen das übliche Gütekriterium das sogenannte Signal/Rausch-Verhältnis  $S/N$  am Ausgang des Systems. Üblicherweise wird das Signal/Rausch-Verhältnis in dB angegeben und man erhält den sogenannten Signal-Rausch-Abstand gemäß

$$\frac{a_{S/N}}{\text{dB}} = 10 \cdot \log \left( \frac{S}{N} \right) = 10 \cdot \log \left( \frac{P_S}{P_N} \right), \quad (2.9)$$

wobei  $S$  bzw.  $P_S$  der mittleren Signalleistung und  $N$  bzw.  $P_N$  der mittleren Rauschleistung entspricht.

Bei der im Vordergrund dieser Arbeit stehenden direkten digitalen Signalsynthese ist allerdings der Signal-Rausch-Abstand nicht das wichtigste Gütekriterium, da sich das Quantisierungsrauschen typischerweise über die gesamte Nyquist-Bandbreite gleichmäßig verteilt. Vielmehr ist zur Beurteilung der spektralen Reinheit bei der direkten digitalen Signalsynthese der sogenannte störfreie Dynamikbereich, in der englischsprachigen Literatur als *Spurious Free Dynamic Range* (SFDR) bezeichnet, entscheidend. Während der Signal-Rausch-Abstand im allgemeinen den Abstand zwischen der Nutzsignalleistung und der Gesamtrauschleistung bei gegebener Bandbreite darstellt, spezifiziert der störfreie Dynamikbereich definitionsgemäß die Differenz zwischen der Nutzsignalleistung und der Signalleistung der stärksten innerhalb der betrachteten Bandbreite auftretenden Störkomponente. Der störfreie Dynamikbereich wird zumeist in dB angegeben und im Rahmen der vorliegenden Arbeit zu

$$\frac{a_{\text{stör}}}{\text{dB}} = 10 \cdot \log \left( \frac{S}{I} \right) = 10 \cdot \log \left( \frac{P_S}{P_I} \right) \quad (2.10)$$

definiert. Hierbei entspricht  $P_S$  wiederum der Signalleistung des Nutzsignales und  $I$  bzw.  $P_I$  der Signalleistung der stärksten Störkomponente innerhalb der Nyquist-Band-

breite. Die Störkomponente kann eine Harmonische der Signalfrequenz oder irgendeine andere nicht harmonisch verknüpfte Frequenzkomponente sein. Obwohl der störfreie Dynamikbereich bei gleicher Bandbreite zumeist einen erheblich besseren Wert als der entsprechende Signal-Rausch-Abstand aufweist (vgl. Abschnitt 4.4), wird ersterer in der Regel als Gütekriterium bei der Beurteilung von Systemen zur direkten digitalen Signalsynthese verwendet [McC 88, Buc 92, DeB 92, Beh 94], da er den Dynamikbereich des gesamten Systems spezifiziert.

### 2.3 Der stationäre zeitdiskrete Bandpaßprozeß

Als Bandpaßsignale im weiteren Sinne bezeichnet man alle Signale, deren Spektrum auf ein endliches Frequenzband begrenzt ist, das nicht die Frequenz  $f = 0$  enthält. Aus der Literatur sind verschiedene Ansätze zur Beschreibung zeitdiskreter Bandpaßsignale bekannt [Kle 83, Bac 92, Kam 92, Lük 92]. Allerdings bilden hierbei zumeist determinierte Folgen  $s(n)$  die Grundlage, die durch Angabe einer sie beschreibenden Gleichung für alle Werte von  $n$  bestimmt sind. Die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehenden schmalbandigen Rauschsignale lassen sich jedoch nur durch Zufallssignale beschreiben, wobei die aufgrund determinierter Folgen gewonnenen Erkenntnisse zu einer äquivalenten Beschreibung eines stationären Bandpaßprozesses führen.

Es sei  $s(n) \in \mathbb{R}$  ein reeller, stationärer und mittelwertfreier Bandpaßprozeß, wobei im Rahmen dieser Arbeit unter einem stationären Zufallsprozeß im allgemeinen ein im weiten Sinne stationärer Zufallsprozeß zu verstehen ist. Grundsätzlich besitzen reelle Zeitsignale eine gerade, reelle Autokorrelationsfolge, wobei das entsprechende Leistungsdichtespektrum eine gerade, reelle und nichtnegative Funktion der Frequenz ist [Gard 90, Kam 92, The 92]. Für das Leistungsdichtespektrum des Bandpaßprozesses soll gelten:

$$S_{ss}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} S_{ss}(e^{-j\Omega}) , & \Omega_0 - \Omega_B/2 < |\Omega| < \Omega_0 + \Omega_B/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2.11)$$

mit  $\Omega_B = \omega_B \cdot T$  und  $f_B = \omega_B / 2\pi$  als der Bandbreite des Leistungsdichtespektrums sowie  $\Omega_0 = \omega_0 \cdot T$  und  $f_0 = \omega_0 / 2\pi$  als die Trägerfrequenz.

In Anlehnung an die Darstellung determinierter, zeitdiskreter bandbegrenzter Signale läßt sich ein reeller zeitdiskreter Bandpaßprozeß  $s(n)$  interpretieren als das Ergebnis einer komplexen Modulation eines komplexen Trägers. Dies führt zum komplexen Ansatz

$$s(n) = \operatorname{Re}\{a(n) \cdot e^{j\Omega_0 \cdot n}\}, \quad \Omega_0 = \omega_0 \cdot T, \quad (2.12)$$

wobei  $a(n)$  als stationäre komplexe stochastische Einhüllende von  $s(n)$  bezüglich der Frequenz  $f_0$  definiert sei. Dabei muß  $f_0$  nicht zwingend die Mittenfrequenz des Bandpaßprozesses bzw. die Trägerfrequenz bedeuten. Die komplexe stochastische Einhüllende wird auch als äquivalente Basisbanddarstellung bezüglich der Frequenz  $f_0$  des reellen Bandpaßprozesses  $s(n)$  bezeichnet. Ist die komplexe stochastische Einhüllende ein streng bandbegrenzter Prozeß, mit

$$S_{aa}(e^{j\Omega}) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_0, \quad \Omega = \omega \cdot T, \quad (2.13)$$

dann bezeichnet man den Ausdruck

$$s^+(n) = a(n) \cdot e^{j\Omega_0 \cdot n} \quad (2.14)$$

als analytischen Prozeß. Dieser Prozeß besitzt ein Leistungsdichtespektrum, das stets für negative Frequenzen verschwindet. Es ist also

$$S_{s^+s^+}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 2 \cdot S_{ss}(e^{j\Omega}) & , \quad 0 < \Omega \leq \pi \\ 0 & , \quad -\pi \leq \Omega \leq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Die Aufspaltung der komplexen stochastischen Einhüllenden  $a(n)$  in Real- und Imaginärteil führt durch Einsetzen in Gl. (2.12) schließlich zu

$$s(n) = a_r(n) \cdot \cos(\Omega_0 \cdot n) - a_i(n) \cdot \sin(\Omega_0 \cdot n), \quad (2.16)$$

wobei der Realteil  $a_r(n)$  und der Imaginärteil  $a_i(n)$  stationäre reelle und mittelwertfreie Tiefpaßprozesse darstellen.

Eine andere Möglichkeit zur Darstellung eines reellen zeitdiskreten Bandpaßprozesses erhält man nach Aufspaltung der komplexen stochastischen Einhüllenden  $a(n)$  in Betrag und Phase, entsprechend

$$\mathbf{a}(n) = |\mathbf{a}(n)| \cdot e^{j\phi(n)}, \quad |\mathbf{a}(n)| \in \mathbb{R}^+, \quad \phi(n) \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

und anschließendem Einsetzen in Gl. (2.12). Es gilt demnach die Beziehung

$$s(n) = |\mathbf{a}(n)| \cdot \cos[\Omega_0 \cdot n + \phi(n)]. \quad (2.18)$$

Hierbei entsprechen der Betrag und die Phase ebenfalls einem stationären Tiefpaßprozeß. Gl. (2.18) zeigt, daß sich der reelle zeitdiskrete Bandpaßprozeß als eine Cosinus-Funktion darstellen läßt, dessen Amplitude und Phase gleichzeitig moduliert werden.

Im folgenden werden nun einige Eigenschaften der Autokorrelationsfolge und der spektralen Leistungsdichte der komplexen stochastischen Einhüllenden näher betrachtet. Die Grundlage hierzu bildet die Autokorrelationsfolge des reellen Bandpaßprozesses. Diese lautet

$$r_{ss}(k) = E\{s(n) \cdot s(n+k)\}, \quad (2.19)$$

die unabhängig vom Zeitparameter  $n$  ist, da vorausgesetzt sei, daß  $\mathbf{a}(n)$  ein im weiten Sinne stationärer Prozeß ist. Hierbei beschreibt  $E\{x\}$  den Erwartungswert der Zufallsgröße  $x$ . Die komplexe Autokorrelationsfolge der komplexen stochastischen Einhüllenden  $\mathbf{a}(n)$  sei demzufolge definiert als [Gard 90, Kam 92, The 92]

$$r_{aa}(k) = E\{\mathbf{a}^*(n) \cdot \mathbf{a}(n+k)\}, \quad (2.20)$$

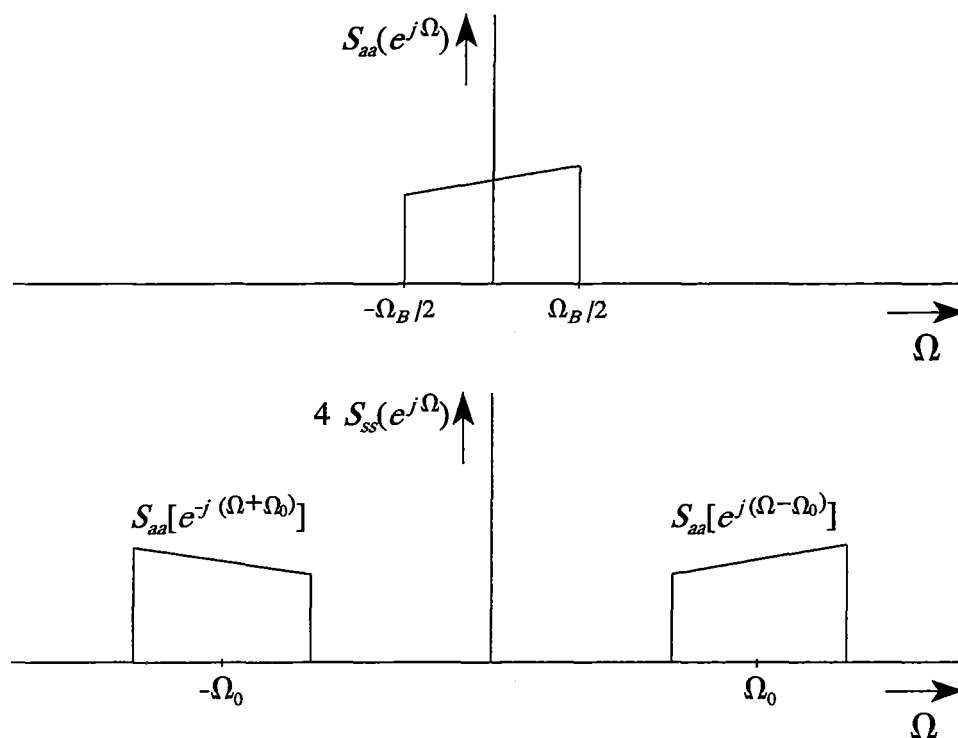
welche aufgrund der vorausgesetzten Stationarität von  $\mathbf{a}(n)$  ebenfalls unabhängig vom Zeitparameter  $n$  ist und eine konjugiert gerade Symmetrie besitzt. Es sei angemerkt, daß im Rahmen dieser Arbeit das hochgestellte Symbol  $*$  die Konjugation der jeweiligen Variablen bedeutet. Nach Einsetzen von Gl. (2.12) in Gl. (2.19) und unter Beachtung von Gl. (2.20) erhält man den elementaren Zusammenhang zwischen der Autokorrelationsfolge des Bandpaßprozesses und der zugehörigen komplexen stochastischen Einhüllenden zu

$$r_{ss}(k) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re}\{r_{aa}(k) \cdot e^{j\Omega_0 \cdot k}\}. \quad (2.21)$$

Die spektrale Leistungsdichte ergibt sich aufgrund der Wiener-Khintchine-Beziehung hieraus durch zeitdiskrete Fouriertransformation. Es gilt also

$$S_{ss}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}_D\{r_{ss}(k)\} = \frac{1}{4} \cdot \left\{ S_{aa}[e^{j(\Omega - \Omega_0)}] + S_{aa}[e^{-j(\Omega + \Omega_0)}] \right\}. \quad (2.22)$$

Hierbei wird die Tatsache ausgenutzt, daß das Leistungsdichtespektrum auch für den komplexen Prozeß  $a(n)$  stets reell ist. Bild 2.2 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen dem Leistungsdichtespektrum des Bandpaßprozesses und der zugehörigen komplexen stochastischen Einhüllenden.



**Bild 2.2** Leistungsdichtespektrum eines Bandpaßprozesses mit dem zugehörigen Basisbandspektrum

Ausgehend von der Stationarität des Bandpaßprozesses zeigen weitergehende Untersuchungen [Gard 90, Kam 92, The 92], daß zum einen die Autokorrelationsfolge des Realteils und die des Imaginärteils der komplexen Einhüllenden identisch sind, und zum anderen die Kreuzkorrelationsfolge von Real- und Imaginärteil ungerade ist.

Demnach gilt für die komplexe Autokorrelationsfolge der komplexen stochastischen Einhüllenden

$$r_{aa}(k) = 2 \cdot \left[ r_{a_r a_r}(k) + j r_{a_r a_i}(k) \right]. \quad (2.23)$$

Eingesetzt in Gl. (2.21) folgt schließlich die Autokorrelationsfolge des reellen Bandpaßprozesses zu

$$r_{ss}(k) = r_{a_r a_r}(k) \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k) - r_{a_r a_i}(k) \cdot \sin(\Omega_0 \cdot k). \quad (2.24)$$

Entsprechend setzt sich die spektrale Leistungsdichte aus zwei Anteilen zusammen. Aus Gl. (2.23) erhält man durch zeitdiskrete Fouriertransformation

$$S_{aa}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}_D\{r_{aa}(k)\} = 2 \cdot \left[ S_{a_r a_r}(e^{j\Omega}) + j S_{a_r a_i}(e^{j\Omega}) \right]. \quad (2.25)$$

Demzufolge ergibt sich das Leistungsdichtespektrum des reellen Bandpaßprozesses durch zeitdiskrete Fouriertransformation von Gl. (2.24) zu

$$S_{ss}(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ S_{a_r a_r}[e^{j(\Omega - \Omega_0)}] + j S_{a_r a_i}[e^{j(\Omega - \Omega_0)}] \right\} + \frac{1}{2} \cdot \left\{ S_{a_r a_r}[e^{j(\Omega + \Omega_0)}] - j S_{a_r a_i}[e^{j(\Omega + \Omega_0)}] \right\}. \quad (2.26)$$

Anhand der bisherigen Ausführungen läßt sich zusammenfassend feststellen, daß einerseits die Leistungsdichtespektren der Inphasekomponente  $a_r(n)$  und der Quadraturkomponente  $a_i(n)$  identisch sind und andererseits das Kreuzleistungsspektrum zwischen  $a_r(n)$  und  $a_i(n)$  nur dann identisch verschwindet, wenn die komplexe stochastische Einhüllende eines Bandpaßprozesses vorliegt, dessen Leistungsdichtespektrum symmetrisch bezüglich der Mittenfrequenz  $f_0$  ist. Umgekehrt bedeutet dies, daß die Kreuzkorrelationsfolge  $r_{a_r a_i}(k)$  von Real- und Imaginärteil der komplexen stochastischen Einhüllenden in diesem Fall ebenfalls identisch verschwindet. Das Leistungsdichtespektrum der Inphase- bzw. der Quadraturkomponente beschreibt den geraden Anteil und das Kreuzleistungsspektrum den ungeraden Anteil im Gesamtspektrum.

## 2.4 Verfahren zur digitalen Synthese bandbegrenzter Rauschsignale

### 2.4.1 Einführung

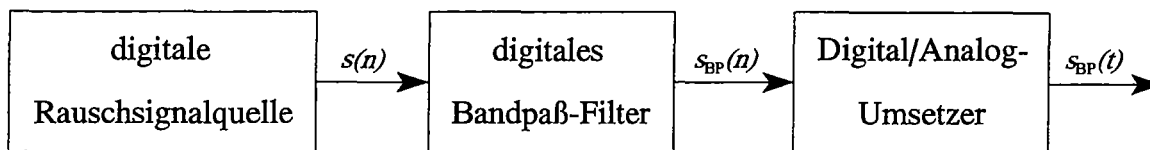
Ein wichtiger Schritt auf dem Weg zur Realisierung des digitalen Rauschgenerators ist die Auswahl eines geeigneten digitalen Syntheseverfahrens, welches in der Lage ist, schmalbandige und gleichzeitig in ihrer Trägerfrequenz variierbare Rauschsignale für den Hochfrequenzbereich mit nahezu beliebig konfigurierbaren Leistungsdichtespektren zu synthetisieren. Ein naheliegender Gedanke ist hierbei die Umsetzung der in Abschnitt 2.1 beschriebenen konventionellen analogen Methode in ein äquivalentes digitales System. In Abschnitt 2.4.2 wird daher zunächst der Einsatz konventioneller digitaler Filter zur Bandbreitenbegrenzung diskutiert. Die gewonnenen Erkenntnisse zur Beschreibung stationärer zeitdiskreter Bandpaßprozesse aus Abschnitt 2.3 führen zu einem weiteren Syntheseverfahren, das in Abschnitt 2.4.3 näher betrachtet wird. Anschließend erfolgt in Abschnitt 2.4.4 die Einführung eines neuartigen Syntheseverfahrens auf der Basis der direkten digitalen Signalsynthese mit numerisch gesteuerten Oszillatoren.

### 2.4.2 Bandbreitenbegrenzung mit konventionellen digitalen Filtern

Die Grundlage bei der Umsetzung des bereits in Bild 2.1 dargestellten analogen Syntheseverfahrens in ein digitales System bildet eine digitale Signalquelle, die unter Verwendung digitaler Zufallsgeneratoren [Jam 90, L'Ecu 90] ein breitbandiges Rauschsignal  $s(n)$  mit konstantem Leistungsdichtespektrum erzeugt. Durch anschließende digitale Filterung läßt sich daraus ein schmalbandiges Rauschsignal  $s_{BP}(n)$  mit nahezu beliebig konfigurierbarem Leistungsdichtespektrum generieren. Ein entsprechendes Blockschaltbild einschließlich Digital/Analog-Umsetzer ist in Bild 2.3 dargestellt.

Allgemein lassen sich digitale Filter in nichtrekursive Systeme (FIR-Filter, *Finite Impulse Response*) und in rekursive Systeme (IIR-Filter, *Infinite Impulse Response*) unterteilen.



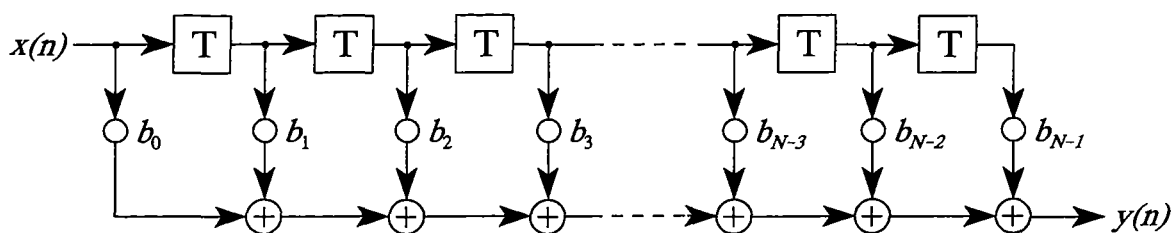


**Bild 2.3** Vereinfachtes Blockdiagramm eines digitalen Rauschgenerators mit konventionellen digitalen Filtern

Der Vorteil eines nichtrekursiven Filters besteht darin, daß es grundsätzlich stabil ist und seine Übertragungsfunktion linear von den Filterkoeffizienten abhängt. Diese Funktion ist als  $z$ -Transformierte gegeben durch

$$H(z) = \sum_{v=0}^{N_K-1} b_v \cdot z^{-v}, \quad z = e^{j\Omega}, \quad (2.27)$$

wobei  $b_v$  den  $v$ -ten Filterkoeffizienten bezeichnet. Ein Nachteil nichtrekursiver Filter besteht allerdings darin, daß zur Erreichung einer ausgeprägten Filterwirkung eine große Zahl  $N_K$  von Filterkoeffizienten  $b_v$  erforderlich ist [Azi 90, Hes 93]. Dies gilt besonders bei der Realisierung steilflankiger Durchlaßbereiche, wie dies bei den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten schmalbandigen Rauschsignalen erwünscht ist. In Bild 2.4 ist exemplarisch eine mögliche Schaltungsstruktur eines nichtrekursiven Filters dargestellt.

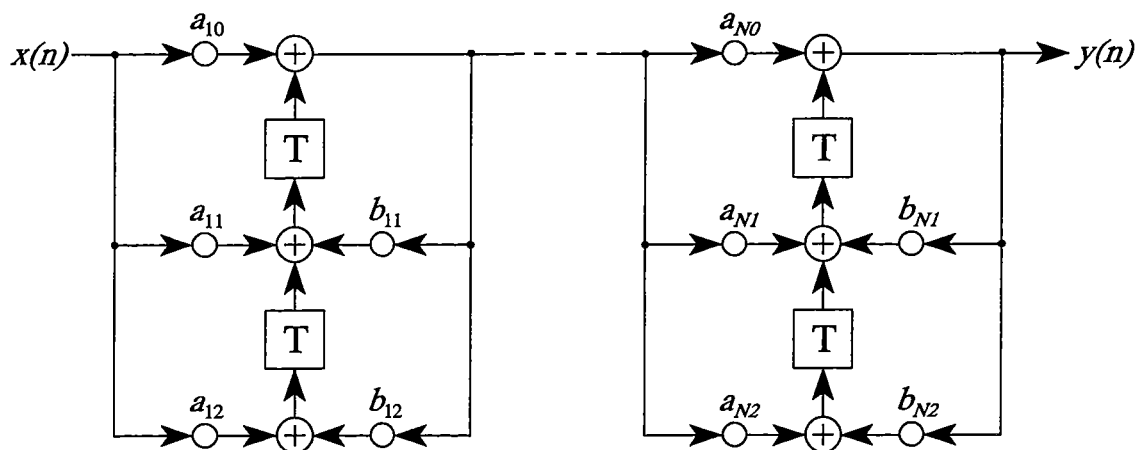


**Bild 2.4** Mögliche Schaltungsstruktur eines nichtrekursiven Filters

Im Gegensatz dazu ist der Vorteil eines rekursiven Filters (Bild 2.5) darin zu sehen, daß eine ausgeprägte Filterwirkung mit relativ wenigen Filterkoeffizienten erzielt werden kann. Die entsprechende Übertragungsfunktion lautet als  $z$ -Transformierte

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N_K} \frac{\sum_{v=0}^2 b_{iv} \cdot z^{-v}}{1 - \sum_{\mu=1}^2 a_{i\mu} \cdot z^{-\mu}} \quad (2.28)$$

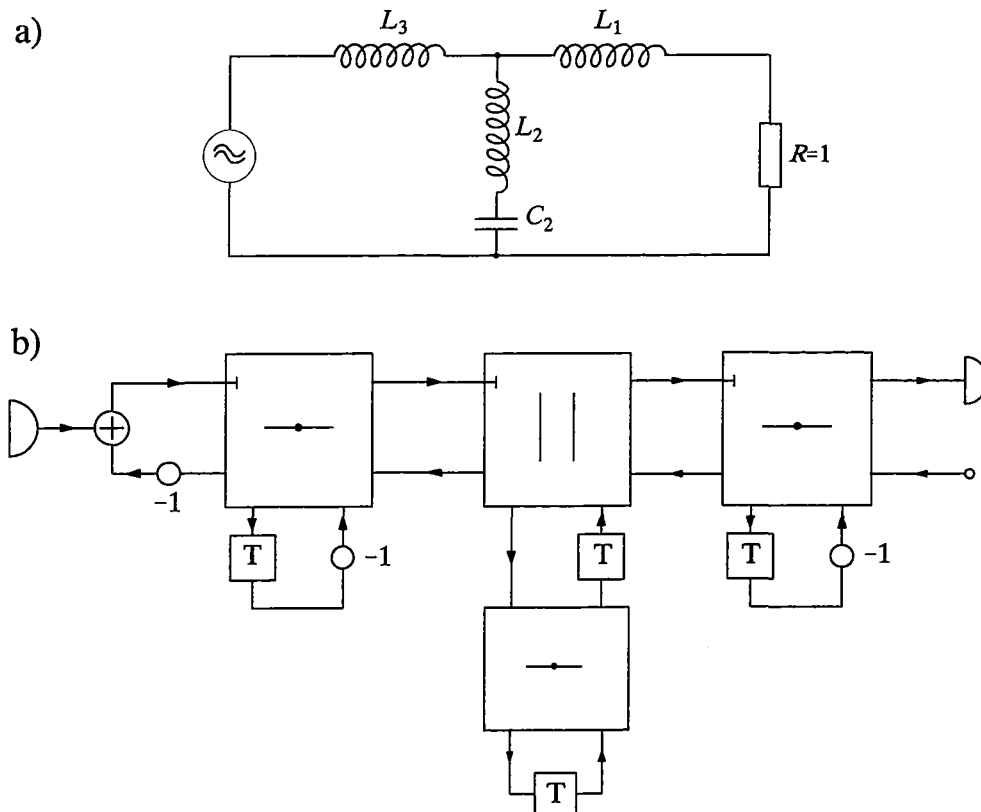
Rekursive Filter besitzen jedoch den Nachteil, daß die Übertragungsfunktion nicht linear von den Filterkoeffizienten abhängt. Somit ist eine Prüfung der Stabilität des Gesamtsystems, bei gegebenen Filterkoeffizienten, in Abhängigkeit von der verwendeten Schaltungsstruktur zumeist nur mit erheblichem Aufwand durchführbar [Azi 90, Hes 93]. Darüberhinaus können die auftretenden Nichtlinearitäten, die aus der Begrenzung der Signalwortlänge resultieren, zu parasitären Oszillationen in Form von Überlauf- oder Granularitätsschwingungen führen.



**Bild 2.5** Mögliche Schaltungsstruktur eines rekursiven Filters

Eine besondere Filterstruktur, die in den letzten beiden Jahrzehnten zunehmend Berücksichtigung fand, sind die sogenannten Wellendigitalfilter (WDF). Wellendigitalfilter sind Nachbildungen zeitkontinuierlicher Filter unter Verwendung von Wellen als Signalgrößen, wie sie aus der Theorie der Streuparameter bekannt sind. Das Konzept der Wellendigitalfilter versucht, die geringe Empfindlichkeit von LC-Filtern, unter anderem gegenüber Abweichungen in den Filterkoeffizienten, bei digitalen Filtern dadurch zu erreichen, daß man ausgehend von einem geeignet gewählten LC-Filter die Bauelemente dieses Filters nach einer bestimmten Weise in entsprechende digitale

Teilsysteme transformiert. Die Teilsysteme werden dann mit Hilfe geeigneter digitaler Koppelnetzwerke entsprechend der Verbindungsstruktur des LC-Filters zusammengesetzt [Fet 71]. In Bild 2.6 ist exemplarisch ein LC-Referenzfilter und das entsprechende Wellendigitalfilter dargestellt.



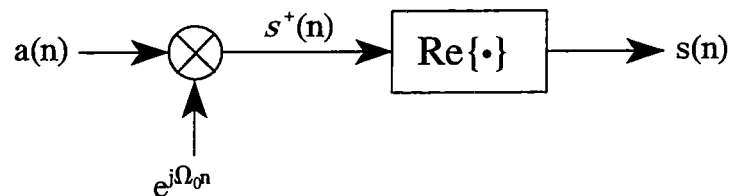
**Bild 2.6** Beispiel eines Wellendigitalfilters [Azi 90], a) LC-Referenzfilter und b) zugehöriges Wellendigitalfilter

Der Vorteil bei der Übertragung der Eigenschaften eines Analogfilters auf ein Digitalfilter liegt darin, daß man stets ein realisierbares und stabiles Wellendigitalfilter erhalten kann. Wellendigitalfilter zeichnen sich unter anderem durch ihre geringe Empfindlichkeit gegenüber Abweichungen in den Filterkoeffizienten aus. Aber auch bezüglich Grenzyklen und Überlaufschwingungen bringt das Konzept der Wellendigitalfilter Vorteile gegenüber den bisher betrachteten digitalen Filtern mit sich [Fet 86]. Außerdem zeigen sie ein exzellentes Stabilitätsverhalten und besitzen einen guten Signal-Rausch-Abstand.

Die schaltungstechnische Realisierung digitaler Filter führt im allgemeinen Fall zu Limitierungen hinsichtlich der verarbeitbaren maximalen Signalfrequenz und des erreichbaren Signal-Rausch-Abstandes, da insbesondere derzeit erhältliche Multiplizierer entweder nicht die erforderliche Verarbeitungsgeschwindigkeit aufweisen, oder eine zu geringe Wortlänge besitzen. Ein entscheidender, bisher jedoch noch nicht beachteter Gesichtspunkt ist die Forderung nach Variation der Trägerfrequenz in Realzeit (vgl. Abschnitt 2.1). Dies führt bei nichtrekursiven wie auch bei rekursiven Filtern zu einer erheblichen Aufwandserhöhung, da die Filterkoeffizienten ständig in Realzeit nachzuführen sind. Aus diesen Gründen erweist sich der Einsatz konventioneller digitaler Filter für die in der vorliegenden Arbeit betrachtete hochfrequente Rauschsignalsynthese derzeit als ungeeignet.

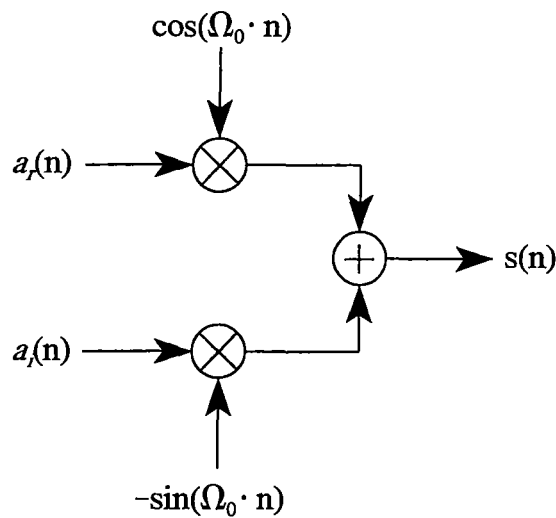
### 2.4.3 Realisierung mittels digitaler Quadraturamplitudenmodulation

Die Ausführungen in Abschnitt 2.3 verdeutlichen, daß grundsätzlich jeder Bandpaßprozeß im Basisband beschrieben werden kann, wobei dieser dann als komplexer Prozeß anzusetzen ist. Umgekehrt bedeutet dies, daß sich ein reeller stationärer Bandpaßprozeß aus der zugehörigen komplexen stochastischen Einhüllenden gewinnen läßt. Eine dementsprechende Schaltungsstruktur läßt sich unmittelbar aus Gl. (2.24) herleiten (Bild 2.7).



**Bild 2.7** *Komplexer Quadraturmischer zur Erzeugung eines reellen bandbegrenzten Rauschsignales*

Eine äquivalente Schaltungsstruktur erhält man durch Aufspaltung der komplexen Einhüllenden in Real- und Imaginärteil gemäß Gl. (2.16), die in Bild 2.8 dargestellt ist. In Anlehnung an die Bezeichnung von Real- und Imaginärteil der komplexen stochastischen Einhüllenden als Quadraturkomponenten, bezeichnet man diese Schaltungsstruktur als Quadraturmischer [Kam 92].



**Bild 2.8** Äquivalente Schaltungsstruktur eines Quadraturmischers

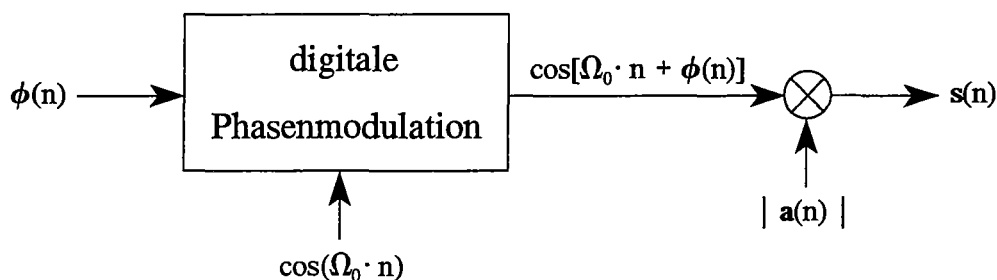
Da es sich hierbei um ein Modulationsverfahren handelt, ist es mit geringem Aufwand möglich, durch kontinuierliche Variation der Mittenfrequenz (Trägerfrequenz)  $f_0$  einen bestimmten Frequenzbereich zuzustimmen. Dies bedeutet einen wesentlichen Vorteil der in den Bildern 2.7 und 2.8 dargestellten Schaltungsstrukturen gegenüber der zuvor beschriebenen digitalen Filterung. Demgegenüber ist ein Nachteil der vorgestellten Schaltungsstrukturen in der Verwendung digitaler Multiplizierer zu sehen, da diese zu einer Begrenzung der verarbeitbaren maximalen Signalfrequenz führen, wie dies bereits in Abschnitt 2.4.2 verdeutlicht wurde. Ferner ist für die Synthese der gewünschten Leistungsdichtespektren ein geeigneter Synthesalgorithmus zur Realisierung der komplexen stochastischen Einhüllenden  $a(n)$  Voraussetzung.

#### 2.4.4 Ein Syntheseverfahren auf der Basis der direkten digitalen Signalsynthese

Die direkte digitale Signalsynthese, in der englischsprachigen Literatur auch als *Direct Digital Synthesis* (DDS) bezeichnet, gibt es seit der Entwicklung des Digital/Analog-Umsetzers. Eine Schlüsselkomponente bei der praktischen Realisierung ist der sogenannte numerisch gesteuerte Oszillator. Beim numerisch gesteuerten Oszillator handelt es sich um eine digitale Schaltung zur Erzeugung von digital codierten Wellenformen (siehe Kapitel 3). Die praktischen Ausführungen reichen derzeit

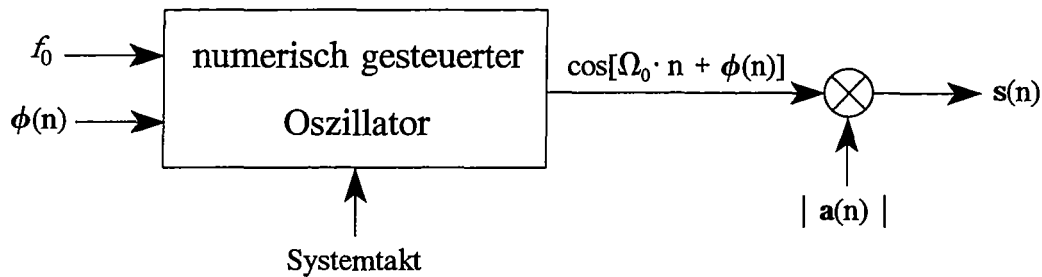
vom einfachsten abstimmbaren Oszillator bis hin zu komplexen Modulatoren mit Einstellbarkeit von Amplitude, Frequenz und Phase. Numerisch gesteuerte Oszillatoren stammen traditionell aus der militärischen Kommunikations- und Radartechnik. In zunehmendem Maße wird diese Schaltungstechnik jedoch heute bereits in einem weiten Bereich kommerzieller Geräte eingesetzt. Ihre Leistungsfähigkeit im Hinblick auf Geschwindigkeit und spektrale Reinheit sowie die sinkenden Preise eröffnen dieser neuen Schaltungstechnik ein zunehmendes Anwendungsfeld. Nachfolgend wird daher ein erster Ansatz für ein Konzept einer neuen Schaltungsstruktur vorgestellt, die mit Hilfe eines numerisch gesteuerten Oszillators den Aufbau eines neuartigen digitalen Rauschgenerators erlaubt.

Aus der in Bild 2.8 vorgestellten Schaltungsstruktur zur Quadraturamplitudenmodulation wird eine alternative Realisierungsform entwickelt. Dazu wird die komplexe stochastische Einhüllende – entsprechend Gl. (2.18) – in Betrag und Phase aufgespalten. Dies führt unmittelbar zu der in Bild 2.9 dargestellten Schaltungsstruktur.



**Bild 2.9** *Quadraturamplitudenmodulation mittels digitaler Phasenmodulation*

Der Vorteil dieser Schaltungsstruktur gegenüber der Quadraturamplitudenmodulation gemäß Bild 2.8, besteht in der Reduzierung des Schaltungsaufwandes durch Ersatz eines Multiplizierers und eines Addierers durch einen Phasenschieber. Dies führt jedoch zur elementaren Frage der Realisierung einer digitalen Phasenmodulation. Eine elegante Lösung dieses Problems stellt die Verwendung eines numerisch gesteuerten Oszillators mit digitalem Phasenmodulationseingang dar (vgl. Kapitel 3). Eine entsprechend modifizierte Schaltungsstruktur zeigt Bild 2.10.



**Bild 2.10** *Quadraturamplitudenmodulation mittels numerisch gesteuertem Oszillator*

Durch den Einsatz eines numerisch gesteuerten Oszillators ist es möglich, bei Verwendung eines geeigneten Synthesalgorithmus zur Realisierung der komplexen stochastischen Einhüllenden  $a(n)$ , in ihrer Trägerfrequenz variierbare, schmalbandige Rauschsignale mit nahezu beliebig konfigurierbaren Leistungsdichtespektren zu generieren. Einschränkungen hinsichtlich dieser Schaltungsstruktur ergeben sich zum einen aus der bei gleicher Wortlänge niedrigeren Verarbeitungsgeschwindigkeit derzeit verfügbarer Multiplizierer gegenüber numerisch gesteuerten Oszillatoren und zum anderen aus der geringen Amplitudenauflösung (8 bit) derzeit erhältlicher numerisch gesteuerter Oszillatoren mit Taktraten von mehr als 300 MHz. Zudem ist sicherzustellen, daß der Betrag und die Phase der komplexen stochastischen Einhüllenden nach einem geeigneten Synthesalgorithmus berechnet und mit einer ausreichenden Datenrate dem digitalen Multiplizierer bzw. dem numerisch gesteuerten Oszillator zugeführt werden. Bevor nun in Kapitel 4 ein Lösungsvorschlag in Form eines neuartigen Konzeptes diskutiert wird, welches keine Multiplikation erfordert, erfolgt zunächst in Kapitel 3 eine allgemeine Betrachtung des numerisch gesteuerten Oszillators.





## 3 Direkte digitale Signalsynthese mit numerisch gesteuerten Oszillatoren

### 3.1 Einführung

Moderne Kommunikations-, Radar- und Meßsysteme stellen immer höhere Anforderungen an die Frequenzauflösung, Bandbreite, Agilität und spektrale Reinheit von Frequenzsynthesizern, die weit über die Grenzen analoger Systeme hinausgehen. Beispiele hierfür sind *Spread-Spectrum-Systeme*, *Chirp-Systeme* oder *Frequency-Hopping-Systeme*, die unter anderem extrem schnelle Frequenzänderungen innerhalb eines möglichst großen Frequenzbereiches fordern. Sowohl technische als auch theoretische Entwicklungen auf dem Gebiet der digitalen Signalverarbeitung führen daher in steigendem Maße dazu, Methoden der analogen Signalverarbeitung durch digitale Verfahren zu ersetzen. Ein Beispiel hierfür ist die im Rahmen dieser Arbeit verwendete direkte digitale Signalsynthese, die in den letzten Jahren eine zunehmende Bedeutung erlangt hat. Die Grundlage der direkten digitalen Signalsynthese bilden die numerisch gesteuerten Oszillatoren, in der englischsprachigen Literatur als *Numerically Controlled Oscillator* (NCO) bezeichnet, welche große Vorteile gegenüber konventionellen analogen Frequenzsynthesizern besitzen. Ihre Hauptmerkmale sind [Nic 87, Cer 90, DeB 92]

- eine hohe Frequenzauflösung von bis zu einigen Millihertz,
- die Möglichkeit der extrem schnellen Frequenzänderung innerhalb einiger Nanosekunden,
- die phasenrichtige Fortsetzung der erzeugten Wellenform bei einem Frequenzsprung und
- ein Phasenrauschen des Ausgangssignales, das fast nur vom Taktoszillator und der gewählten Ausgangsfrequenz abhängig ist.

Diese Eigenschaften lassen sich mit analogen Frequenzsynthesizern entweder gar nicht oder nur mit erheblichem Aufwand realisieren.

Grundlage der meisten heutzutage verwendeten numerisch gesteuerten Oszillatoren bildet das bereits 1971 von Tierney, Rader und Gold [Tie 71] beschriebene Prinzip zur digitalen Frequenzsynthese mittels Phasenakkumulator und Sinus- und/oder Cosi-

nus-Funktionstabelle. Daher beschränkt sich die weitere Betrachtung in den nachfolgenden Abschnitten exemplarisch auf numerisch gesteuerte Oszillatoren mit Cosinus-Funktionstabelle. In Abschnitt 3.2 wird zunächst die Arbeitsweise eines numerisch gesteuerten Oszillators vorgestellt. Zur Beschreibung seines komplizierten Störspektrums erfolgt in Abschnitt 3.3 die Einführung eines entsprechenden mathematischen Modells. Anschließend wird in Abschnitt 3.4 die Möglichkeit der digitalen Modulation mit numerisch gesteuerten Oszillatoren näher betrachtet.

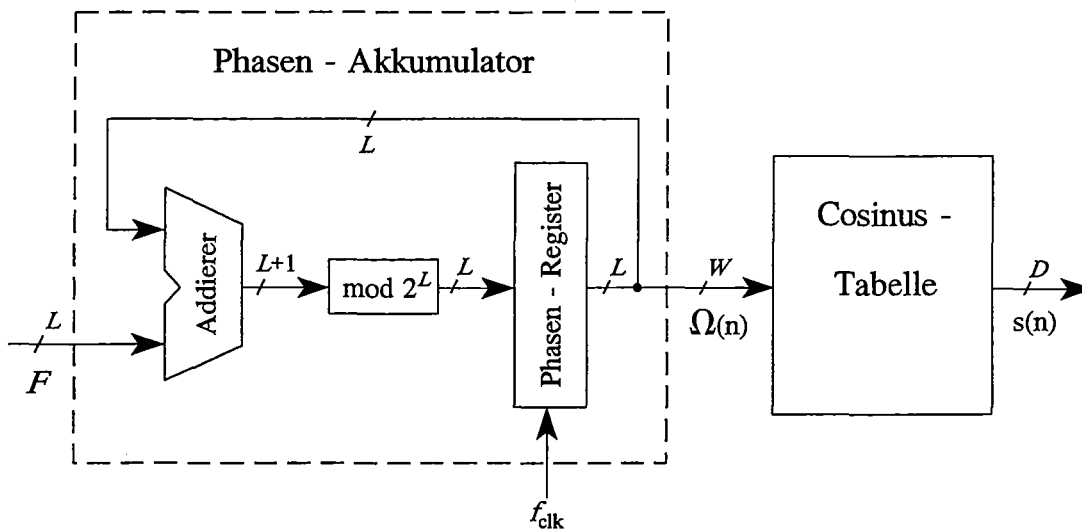
Da in der Nachrichten-, Radar- und Meßtechnik zumeist Signale in analoger Form Anwendung finden, ist eine Umsetzung der digital erzeugten Wertefolge in ein analoges Signal erforderlich. Die Kombination von Digital/Analog-Umsetzer und nachgeschaltetem analogen Rekonstruktionsfilter beeinflusst jedoch in nicht unerheblichem Maße die spektrale Reinheit des zeitkontinuierlichen Ausgangssignales. Aus diesem Grund befaßt sich abschließend Abschnitt 3.5 mit der Problematik der Digital/Analog-Umsetzung und der Auswahl eines geeigneten Rekonstruktionsfilters.

## 3.2 Prinzip des numerisch gesteuerten Oszillators

Der numerisch gesteuerte Oszillator verwendet einen digitalen Phasenakkumulator zur Generierung eines kontinuierlich inkrementierten Phasenwinkels. Diese digitale Phaseninformation adressiert eine Funktionstabelle, welche die digitalen Amplitudenwerte der gewünschten Wellenform enthält. Alle Funktionsblöcke werden mit einem konstanten Taktsignal versorgt (Bild 3.1). Somit sind alle drei Parameter einer Schwingung — Frequenz  $f$ , Phase  $\phi$  und Amplitude  $a$  — durch digitale Werte definiert. Die Frequenzauflösung wird durch die Wortlänge  $L$  des Phasenakkumulators bestimmt, die Phasenauflösung durch die Wortlänge  $W$  der Adresse der Funktionstabelle, und die Amplitudenauflösung durch die Wortlänge  $D$ , mit der die Amplitudenwerte in der Funktionstabelle enthalten sind.

Da die Funktionstabelle genau eine Periode der jeweiligen Wellenform enthält, ergibt der Phasenakkumulator zusammen mit der Funktionstabelle einen digital gesteuerten Oszillator, der Ausgangsfrequenzen  $f_s$  nach der Gleichung

$$f_s = \frac{F}{2^L} \cdot f_{clk} \quad (3.1)$$



**Bild 3.1** Vereinfachtes Blockdiagramm eines numerisch gesteuerten Oszillators

erzeugt, wobei  $F$  das ganzzahlige Frequenzwort am Frequenzeingang und  $f_{clk}$  die Systemtakttrate darstellen. Da die Zahl  $F$  den Phasenzuwachs in jedem Taktzyklus repräsentiert, bezeichnet man diese auch als Phaseninkrement. Aufgrund der Tatsache, daß es sich hierbei um ein zeitdiskretes System handelt, lassen sich, entsprechend dem Nyquist-Theorem, nur Werte der Ausgangsfrequenz bis zur halben Systemtakttrate realisieren. Daraus folgt für das Frequenzwort  $F$

$$0 \leq F \leq 2^{L-1}, \quad F, L \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Die niedrigste erzeugbare Ausgangsfrequenz erscheint somit für  $F = 1$ . Bei realen Synthesizern ist wegen der Übertragungsfunktion des Digital/Analog-Umsetzers (DAU) und zusätzlicher *Aliasing*-Effekte in der Praxis eine maximale Ausgangsfrequenz von  $0,4 \cdot f_{clk}$  zweckmäßig (vgl. Abschnitt 3.5).

Grundsätzlich ist ein Akkumulator der Wortlänge  $L$  aufgrund seiner Sägezahnüberlaufkennlinie modulo- $2^L$ -periodisch. Diese Eigenschaft wird beim Phasenakkumulator des numerisch gesteuerten Oszillators zur Nachbildung der  $2\pi$ -Periodizität des Phasenwinkels der Sinus- bzw. Cosinus-Funktion ausgenutzt. Für den diskreten Phasenwinkel  $\Omega(n)$  am Ausgang des Phasenakkumulators gilt demnach

$$\Omega(n) = (F \cdot n) \bmod 2^L, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.3)$$

wobei sich eine Periodenlänge  $K$  des Phasenwinkels von

$$K = \frac{2^L}{\text{ggT}(F, 2^L)} \quad (3.4)$$

ergibt. Hierbei bezeichnet  $\text{ggT}(a, b)$  den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$ .

Wie bereits erwähnt, sind die digitalen Amplitudenwerte in einer Funktionstabelle enthalten. Hierbei ist jeder diskrete Phasenwinkel  $\Omega(n)$  über eine trigonometrische Funktion, zumeist Sinus oder Cosinus, mit dem entsprechenden Amplitudenwert verknüpft. Im Fall einer Cosinus-Funktionstabelle mit unendlich hoher Amplitudenauflösung  $D$  und keiner Wortlängenreduktion des Phasenwinkels ( $L = W$ ) berechnet sich somit die periodische Ausgangsfolge  $s(n)$  der Periode  $K$  des idealen numerisch gesteuerten Oszillators entsprechend der Gleichung

$$s(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{2^L} \cdot \Omega(n) \right]. \quad (3.5)$$

Eine schaltungstechnische Realisierung des idealen numerisch gesteuerten Oszillators ist physikalisch jedoch nicht möglich. Daher befaßt sich der nachfolgende Abschnitt mit den Auswirkungen der durch die notwendigen Wortlängenreduktionen hervorgerufenen Effekte auf das Ausgangsspektrum des numerisch gesteuerten Oszillators.

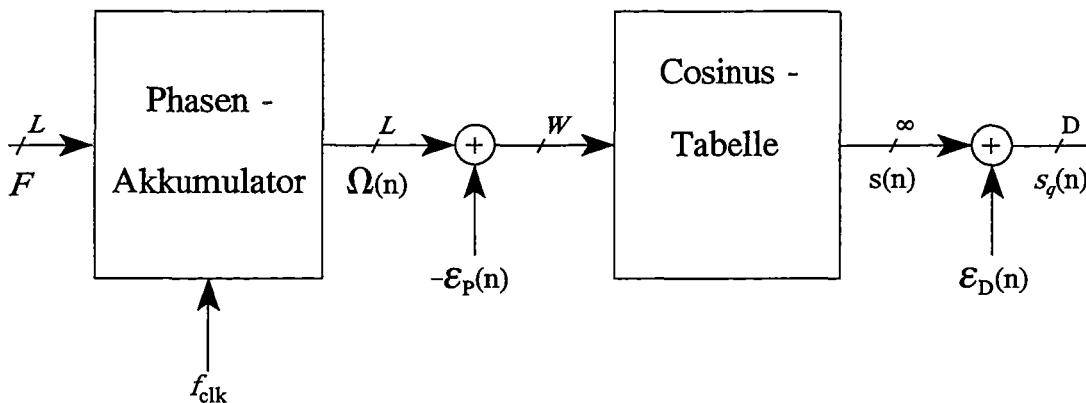
### 3.3 Auswirkung der Wortlängenreduktionen

#### 3.3.1 Allgemeines

Ein in der Praxis sehr wichtiger Gesichtspunkt ist die Wirkung der Quantisierung auf die Ausgangsfolge. In praktischen numerisch gesteuerten Oszillatoren gibt es zwei Ursachen für Quantisierungs-Verzerrungen:

- Die Quantisierung des Phasenwinkels und
- die Quantisierung der Amplitude der Ausgangsfolge.

Zusammen ergeben die beiden Quantisierungsfehler unerwünschte Komponenten im Ausgangsspektrum, die von der gewünschten Ausgangsfrequenz, der Anzahl der Werte in der Funktionstabelle und der Amplitudenauflösung der Ausgangsfolge abhängen. Während die durch den Phasenfehler verursachten Störkomponenten durch erhöhten Aufwand gedämpft werden können [Wil 91, Zim 92, Rei 93], kann der Effekt der Amplitudenquantisierung der Ausgangsfolge kaum beeinflusst werden. Eine Eliminierung der dadurch entstehenden Störkomponenten durch Filterung ist praktisch unmöglich.



**Bild 3.2** Mathematisches Modell eines numerisch gesteuerten Oszillators mit Cosinus-Funktionstabelle

Die Effekte der Quantisierungsfehler auf die Ausgangsfolge eines numerisch gesteuerten Oszillators lassen sich mit Hilfe des in Bild 3.2 dargestellten mathematischen Modells beschreiben. Dieses mathematische Modell gilt prinzipiell für alle numerisch gesteuerten Oszillatoren mit Funktionstabelle, deren innerer Aufbau einer Pipeline-Architektur entspricht [Nic 87, Garv 90, O'Lea 91].

### 3.3.2 Quantisierung des Phasenwinkels

Bei der praktischen Realisierung von numerisch gesteuerten Oszillatoren ist es aus technischen Gründen nicht möglich, Sinus- oder Cosinus-Funktionstabellen im Hinblick auf eine hohe Frequenzauflösung mit  $2^L$  Einträgen herzustellen. Daher ist es notwendig, die ursprüngliche Wortlänge  $L$  des Phasenwortes im Akkumulator auf

eine Adresswortlänge von  $W$  bit zu reduzieren. Diese Reduzierung des Phasenwortes entspricht einer Quantisierung des Phasenwinkels.

Entsprechend des in Bild 3.2 dargestellten mathematischen Modells, läßt sich die Ausgangsfolge eines numerisch gesteuerten Oszillators, unter Berücksichtigung der Quantisierung des Phasenwinkels, wie folgt beschreiben

$$s_q(n) = \cos \left\{ \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega(n) - \varepsilon_p(n)] \right\}, \quad (3.6)$$

wobei  $\varepsilon_p(n)$  der Phasenfehlerfolge entspricht. Ein Vergleich mit Gl. (3.5) zeigt, daß durch die Wortlängenreduktion des Phasenwinkels eine zusätzliche Phasenmodulation des Ausgangssignales entsteht. Aufgrund der gewünschten hohen Frequenzauflösung besitzen kommerzielle Frequenzsynthesizer zumeist Phasenakkumulatoren mit einer Wortlänge von  $L \geq 24$  bit. Daher ist der Phasenfehler sehr klein gegenüber der eigentlichen Phase, so daß  $\varepsilon_p(n) / 2^L \ll 1, \forall n$ , gilt und somit Gl. (3.6) mit Hilfe von elementaren trigonometrischen Beziehungen sowie den Näherungen  $\cos[\varepsilon_p(n) / 2^L] \approx 1$  und  $\sin[\varepsilon_p(n) / 2^L] \approx \varepsilon_p(n) / 2^L$  in

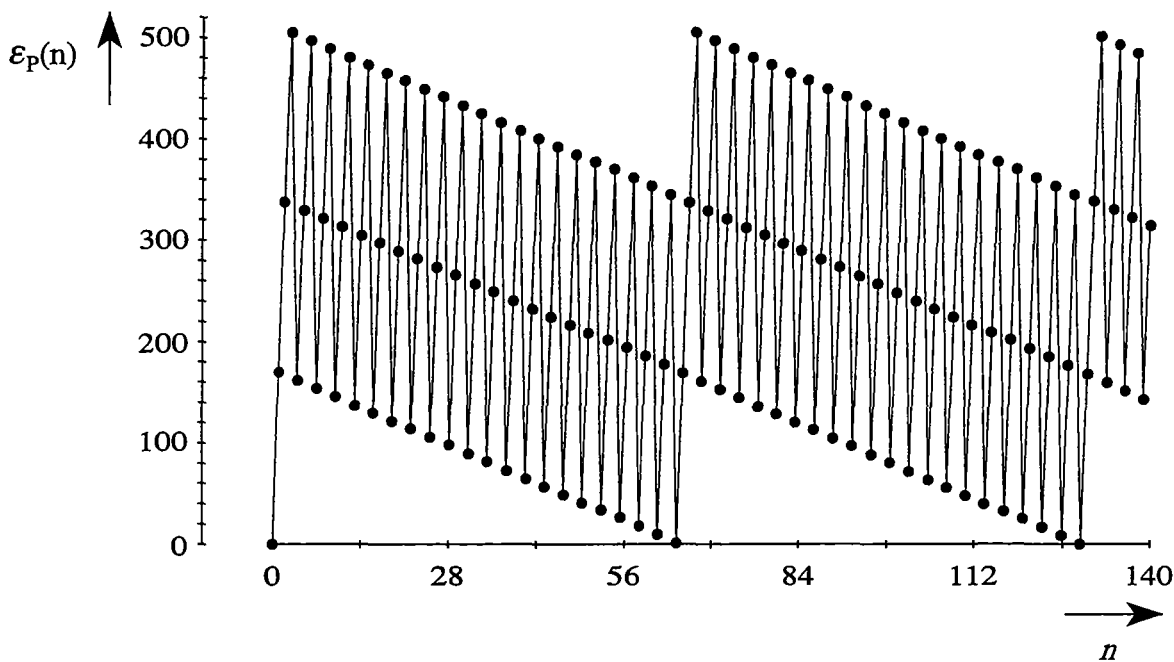
$$s_q(n) \approx \cos \left[ \frac{2\pi}{2^L} \cdot \Omega(n) \right] + \frac{2\pi}{2^L} \cdot \varepsilon_p(n) \cdot \sin \left[ \frac{2\pi}{2^L} \cdot \Omega(n) \right] \quad (3.7)$$

übergeht. Demnach setzt sich das Ausgangsspektrum des numerisch gesteuerten Oszillators aus der gewünschten Cosinusschwingung und dem Spektrum des mit der Phasenfehlerfolge  $\varepsilon_p(n)$  amplitudenmodulierten Quadratursignals der jeweiligen Wellenform zusammen.

Die Phasenfehlerfolge  $\varepsilon_p(n)$  entspricht infolge einer Abschneideoperation einer Überlagerung zeitdiskreter Sägezahnfunktionen [Meh 83, Nic 87, Kro 93] und läßt sich mathematisch durch

$$\varepsilon_p(n) = \Omega(n) \bmod 2^B, \quad B = L - W, \quad B, W \in \mathbb{N}_0, \quad (3.8)$$

beschreiben (Bild 3.3). Hierbei stellt  $B$  die Anzahl der Binärstellen dar, um die die Wortlänge des Phasenakkumulators reduziert wurde.



**Bild 3.3** Ausschnitt der Phasenfehlerfolge  $\varepsilon_P(n)$ ;  $F = 20A8_{16}$ ;  $L = 16$  bit;  $W = 7$  bit;  $D \rightarrow \infty$

Aufgrund der Periodizität des Phasenwinkels gemäß Gl. (3.4), folgt für die Periode der Phasenfehlerfolge

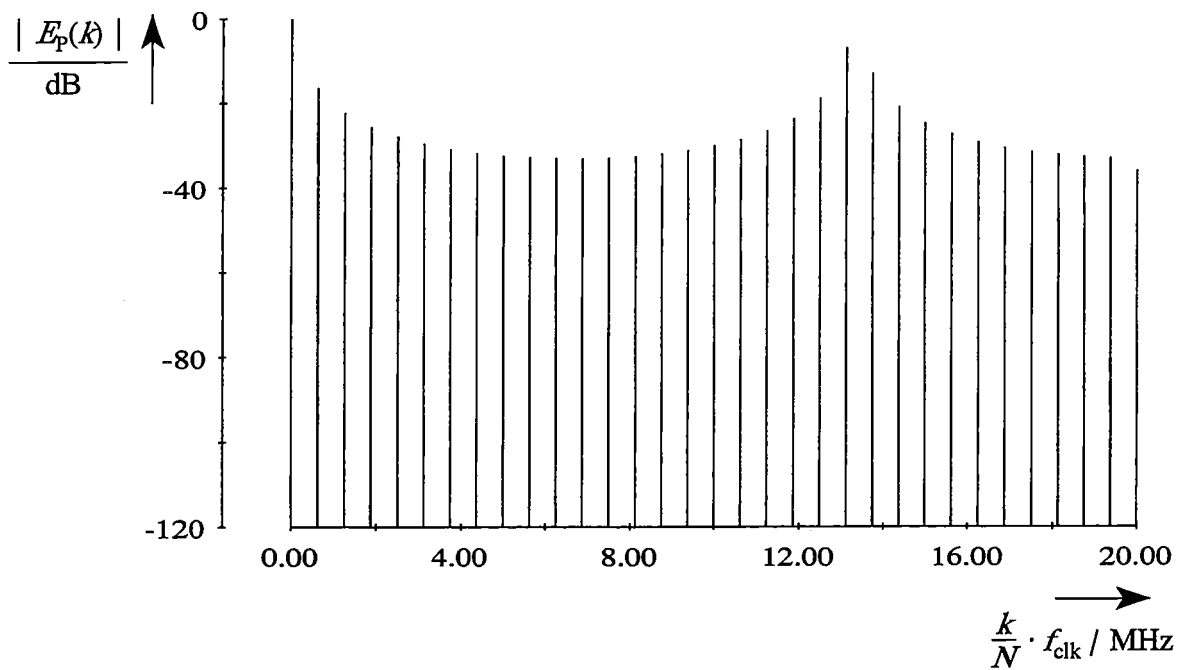
$$M = \frac{2^B}{\text{ggT}(F, 2^B)} . \quad (3.9)$$

Ein Beispiel für das Spektrum der Phasenfehlerfolge und das entsprechende Ausgangsspektrum eines numerisch gesteuerten Oszillators zeigen Bild 3.4 und Bild 3.5.

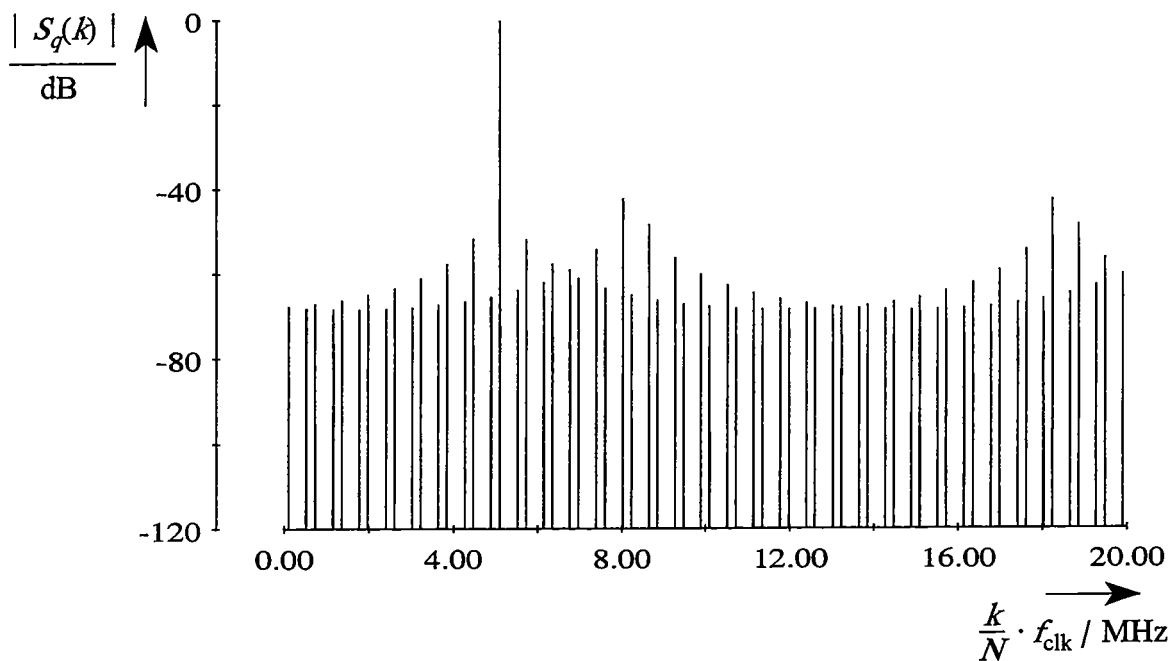
Wie aus Gl. (3.7) zu erkennen ist, treten die Spektrallinien des Phasenfehlerspektrums als Spektrallinienpaare im Ausgangsspektrum in Erscheinung, wobei deren Lage im Ausgangsspektrum aus

$$f_q = f_s \pm \frac{F \bmod 2^B}{2^B} \cdot k \cdot f_{clk} , \quad k = 0, \dots, \frac{M}{2} , \quad (3.10)$$

resultiert. Die Amplituden der auftretenden Spektrallinien lassen sich anhand einer Fourieranalyse bestimmen. Nach [Ols 87, Cer 90] gilt



**Bild 3.4** Spektrum der Phasenfehlerfolge  $\varepsilon_p(n)$ ;  $F = 20A8_{16}$ ;  $L = 16$  bit;  $W = 7$  bit;  $D \rightarrow \infty$



**Bild 3.5** Spektrum der Ausgangsfolge  $s_q(n)$ ;  $F = 20A8_{16}$ ;  $L = 16$  bit;  $W = 7$  bit;  $D \rightarrow \infty$



$$|S_q(k)| = \left| \frac{\sin(-\pi \cdot 2^{-W})}{M \cdot \sin\left[\frac{\pi}{M} \cdot (k - 2^{-W})\right]} \right|, \quad 0 \leq k \leq M-1, \quad (3.11)$$

Die Anzahl der Spektrallinien entspricht hierbei stets der Periodenlänge  $M$  der Phasenfehlerfolge. Die Amplitude des Nutzsignales folgt aus Gl. (3.11) für den Fall  $k = 0$  und die Amplitude der größten Störkomponente für den Fall  $k = 1$ . Gemäß Gl. (2.10) ergibt sich demnach der störfreie Dynamikbereich zu

$$\frac{a_{\text{stör}}}{\text{dB}} = 10 \cdot \log \left[ \frac{\sin^2\left[\frac{\pi}{M} \cdot (1 - 2^{-W})\right]}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M} \cdot 2^{-W}\right)} \right]. \quad (3.12)$$

Mit der Signalleistung  $P_S = |S_q(0)|^2$  und der durch die Quantisierung des Phasenwinkels verursachten Rauschleistung  $P_N = 1 - |S_q(0)|^2$  folgt schließlich entsprechend Gl. (2.9) ein Signal-Rausch-Abstand von

$$\frac{a_{S/N}}{\text{dB}} = 10 \cdot \log \left[ \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^{-W})}{M^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{M} \cdot 2^{-W}\right) - \sin^2(\pi \cdot 2^{-W})} \right]. \quad (3.13)$$

Aus Gl. (3.12) und Gl. (3.13) ist ersichtlich, daß der störfreie Dynamikbereich und der Signal-Rausch-Abstand ausschließlich von der Phasenauflösung  $W$  und der Periodenlänge  $M$  der Phasenfehlerfolge und somit vom ganzzahligen Frequenzwort  $F$  (vgl. Gl. (3.9)), abhängen. Unter der Annahme, daß bei kommerziell erhältlichen numerisch gesteuerten Oszillatoren stets  $2^W \gg \pi$  gilt, kann mit  $\sin^2(x) \approx x^2 - x^4/3$  der minimal erzielbare Signal-Rausch-Abstand in guter Näherung zu

$$\frac{a_{S/N}}{\text{dB}} \approx W \cdot 6,02 - 5,17 \quad (3.14)$$

bestimmt werden. Weitere Untersuchungen [Zav 88, She 90] haben gezeigt, daß aufgrund besserer Algorithmen zur Berechnung der in der Funktionstabelle enthaltenen Werte der jeweiligen Wellenform, ein störfreier Dynamikbereich von bis zu 8 dB/bit möglich ist.

### 3.3.3 Quantisierung der Ausgangsamplitude

Der Grund für die Quantisierung der Amplitude der Ausgangsfolge besteht in der endlichen Genauigkeit, mit der die Amplitudenwerte in der Funktionstabelle enthalten sind. Der Einfluß des Quantisierungsfehlers auf die Ausgangsfolge des numerisch gesteuerten Oszillators läßt sich, entsprechend Bild 3.2, durch eine additive Überlagerung der Ausgangsfolge mit einer Amplitudenfehlerfolge  $\varepsilon_D(n)$  beschreiben. Demnach gilt der mathematische Zusammenhang

$$s_q(n) = \cos \left\{ \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega(n) - \varepsilon_p(n)] \right\} + \varepsilon_D(n) . \quad (3.15)$$

Verkürzt man die Wortlänge der Amplitudenwerte auf  $D$  Binärstellen (einschließlich Vorzeichenbit) durch Rundung, so ergibt sich die Amplitudenfehlerfolge zu

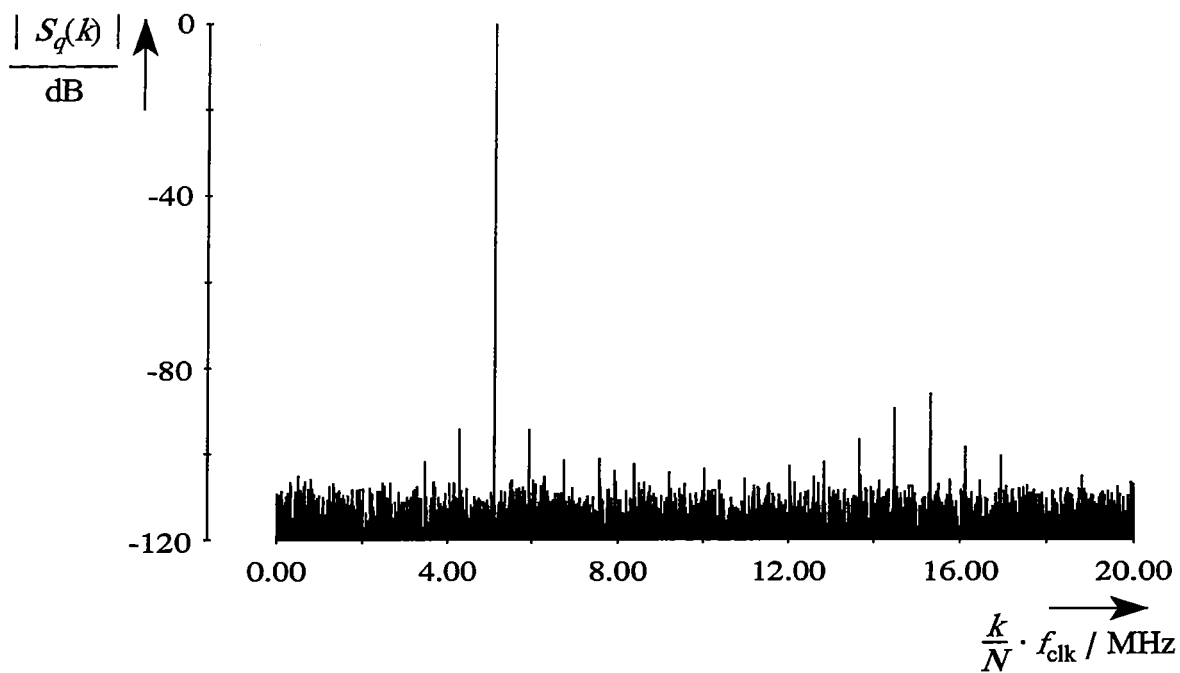
$$\varepsilon_D(n) = \frac{1}{2^{D-1}} \cdot \left[ 2^{D-1} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega(n) - \varepsilon_p(n)] \right\} + 0,5 \right] - \cos \left\{ \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega(n) - \varepsilon_p(n)] \right\} , \quad (3.16)$$

wobei  $\lfloor x \rfloor$  die größte ganze Zahl darstellt, die nicht größer als  $x$  ist. In Bild 3.6 ist ein Beispiel für das Spektrum der Ausgangsfolge  $s_q(n)$  gemäß Gl. (3.15) dargestellt.

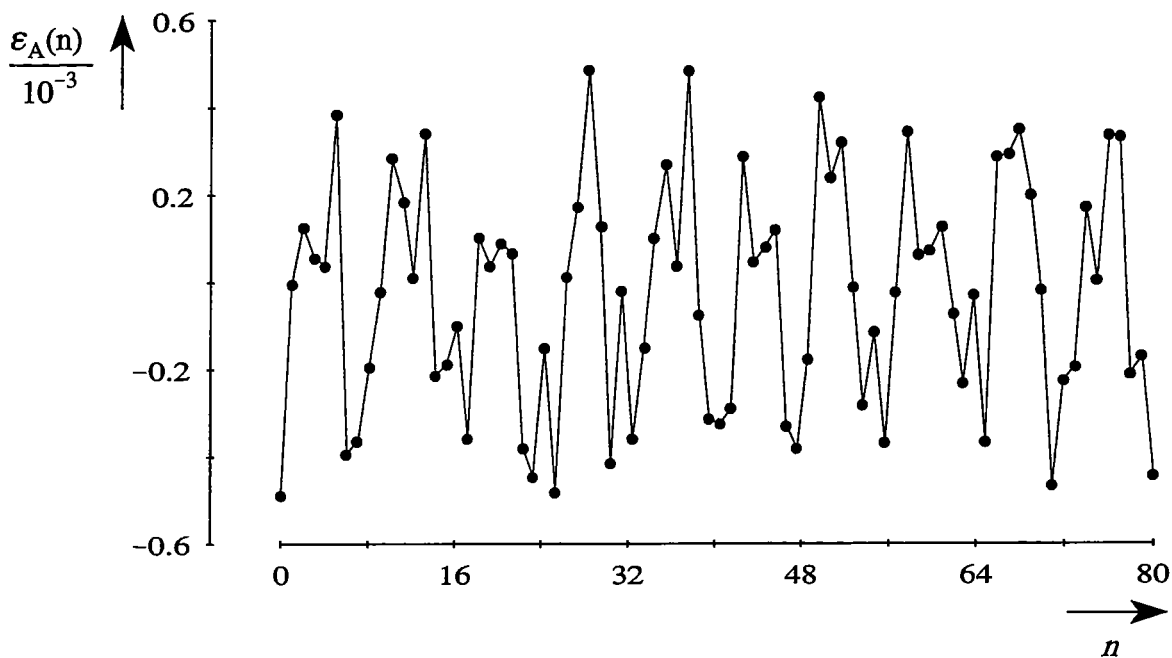
Anhand statistischer Untersuchungen läßt sich zeigen [Pap 91, Schü 94], daß die Amplitudenfehlerfolge als ein periodischer stationärer Prozeß aufgefaßt werden kann, dessen maximale Amplitude  $\max |\varepsilon_D(n)| = 2^{-D}$  beträgt (Bild 3.7). Unter der Annahme, daß die Amplitudenverteilung von  $\varepsilon_D(n)$  einer Gleichverteilung im Intervall  $[-2^{-D}, 2^{-D}]$  entspricht und keine Wortlängenreduktion des Phasenwinkels ( $L = W$ ) vorliegt, folgt für die gesamte Quantisierungsrauschleistung

$$P_N = \sigma_D^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2D} . \quad (3.17)$$

Die Annahme einer näherungsweise Gleichverteilung der Amplitudenfehlerfolge  $\varepsilon_D(n)$  ist hier zulässig, da numerisch gesteuerte Oszillatoren in der Praxis stets eine Amplitudenauflösung von  $D \geq 8$  bit aufweisen.



**Bild 3.6** Spektrum der Ausgangsfolge  $s_q(n)$ ;  $F = 20A8_{16}$ ;  $L = W = 16$  bit;  $D = 14$  bit



**Bild 3.7** Ausschnitt der Amplitudenfehlerfolge  $\epsilon_D(n)$ ;  $F = 20A8_{16}$ ;  $L = W = 16$  bit;  $D = 14$  bit

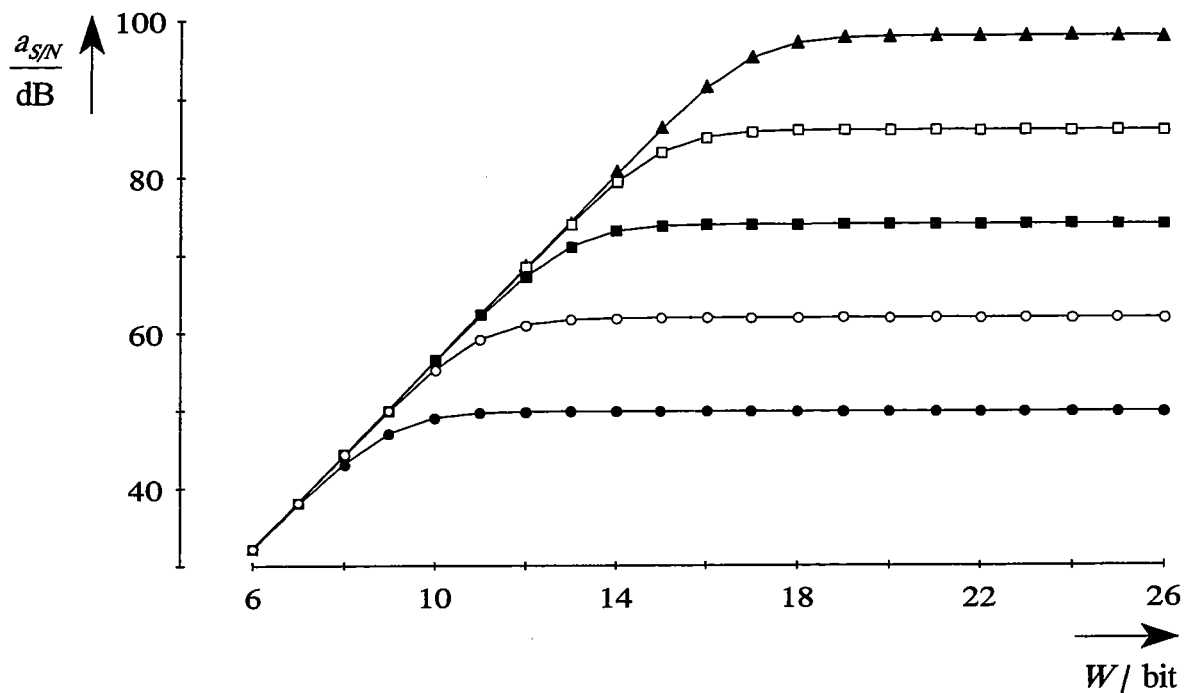
Ausgehend von Gl. (3.13) kann nun unter Beachtung von Gl. (3.17) und mit der Signalleistung  $P_S = 0,5$  einer Cosinusfunktion der Amplitude 1 ein allgemeiner Ausdruck für den theoretisch erzielbaren Signal-Rausch-Abstand am Ausgang des numerisch gesteuerten Oszillators angegeben werden, der beide Quantisierungseffekte berücksichtigt. Es gilt

$$\frac{a_{S/N}}{dB} = 10 \cdot \log \left[ \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^{-W})}{M^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{M} \cdot 2^{-W}\right) \cdot \left[1 + \frac{1}{1,5 \cdot (2^D - 1)^2}\right] - \sin^2(\pi \cdot 2^{-W})} \right] \quad (3.18)$$

Für den Fall, daß keine Quantisierung des Phasenwinkels vorliegt ( $M = 1$ ) und unter der Annahme, daß wiederum  $2^W \gg \pi$  gilt, läßt sich der Signal-Rausch-Abstand näherungsweise zu

$$\frac{a_{S/N}}{dB} \approx D \cdot 6,02 + 1,76 \quad (3.19)$$

bestimmen. Somit ist der Signal-Rausch-Abstand im wesentlichen von der Wortlänge  $D$  abhängig, mit der die Amplitudenwerte in der Funktionstabelle enthalten sind. Gl. (3.19) stellt hierbei die obere Schranke des aufgrund der Amplitudenquantisierung theoretisch erzielbaren Signal-Rausch-Abstandes dar.

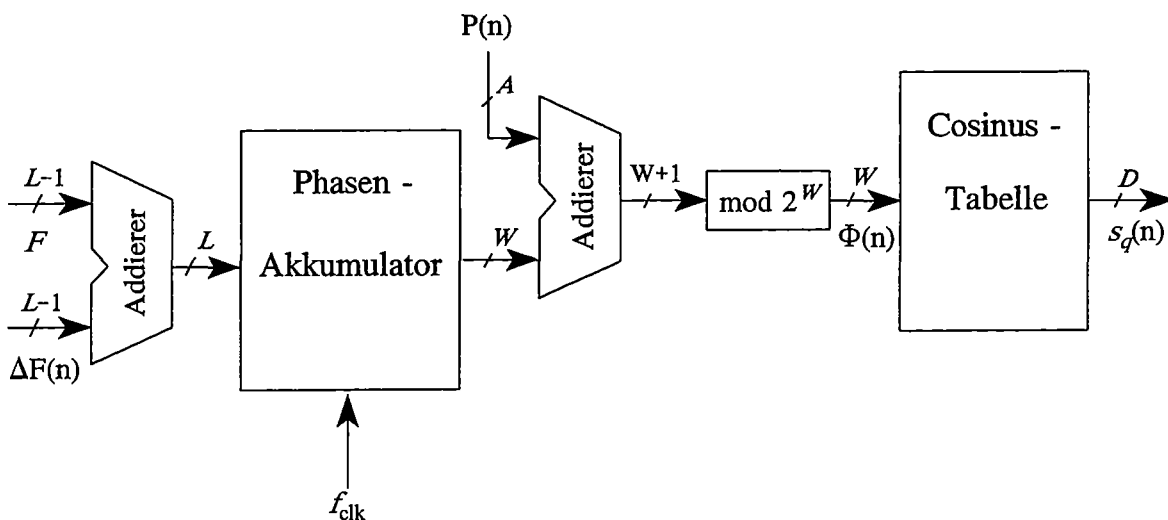


**Bild 3.8** Theoretisch erzielbarer Signal-Rausch-Abstand in Abhängigkeit der Wortlängen  $W$  und  $D$ ; ●:  $D = 8$  bit; ○:  $D = 10$  bit; ■:  $D = 12$  bit; □:  $D = 14$  bit; ▲:  $D = 16$  bit

Ein Vergleich von Gl. (3.18) mit Gl. (3.13) zeigt, daß bei gleicher Wortlänge  $W = D$  und ganzzahliger Werte von  $F$ , so daß im ungünstigsten Fall  $M = 2$  gilt, der Effekt der Quantisierung des Phasenwinkels dominiert. Die Wortlängen  $W$  und  $D$  sind daher wichtige Parameter bei der Auswahl eines geeigneten numerisch gesteuerten Oszillators. Bild 3.8 veranschaulicht noch einmal den Zusammenhang zwischen dem Signal-Rausch-Abstand einerseits und den Wortlängen  $W$  und  $D$  andererseits.

### 3.4 Modulation mit numerisch gesteuerten Oszillatoren

Um die Vorteile der direkten digitalen Signalsynthese voll auszunutzen, ist es sinnvoll, auch die Modulation auf digitaler Ebene durchzuführen. Numerisch gesteuerte Oszillatoren sind dazu sehr gut geeignet, da sie die Fähigkeit besitzen, die Frequenz oder die Phase des Trägersignales zu beeinflussen. Demzufolge sind Frequenzmodulation (FM), Phasenmodulation (PM), *Frequency-Shift-Keying* (FSK), *Phase-Shift-Keying* (PSK), *Quadrature-Phase-Shift-Keying* (QPSK) und deren Varianten möglich.



**Bild 3.9** Digitale Frequenz- und Phasenmodulation mit numerisch gesteuertem Oszillator

Es genügt, die Information durch Addition auf dem Weg vom Frequenzregister zum Phasenakkumulator (FM), oder auf dem Weg vom Phasenakkumulator zur Funktionstabelle (PM) einzufügen (Bild 3.9). Bei der Amplitudenmodulation (AM) ist die Information auf dem Signalweg vom numerisch gesteuerten Oszillator zum Digi-

tal/Analog-Umsetzer einzufügen, da bei diesem Modulationsverfahren das Ausgangssignal aus dem Produkt von Träger- und Modulationssignal besteht. Schaltungstechnisch läßt sich dies durch Einfügen eines digitalen Multiplizierers realisieren. Auf eine detailliertere Beschreibung der digitalen Amplituden- und Frequenzmodulation wird jedoch hier verzichtet, da in der vorliegenden Arbeit ausschließlich die digitale Phasenmodulation mit numerisch gesteuertem Oszillator von Interesse ist (vgl. Abschnitt 2.4.4).

Unter Beachtung von Gl. (3.15) folgt für die Ausgangsfolge  $s_{PM}(n)$  eines phasenmodulierten numerisch gesteuerten Oszillators

$$s_{PM}(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{2^W} \cdot \Phi(n) \right] + \varepsilon_D(n) , \quad (3.20)$$

mit

$$\Phi(n) = \left\{ \frac{1}{2^B} \cdot [\Omega(n) - \varepsilon_P(n)] + 2^{W-A} \cdot P(n) \right\} \bmod 2^W , \quad (3.21)$$

wobei  $P(n)$  das ganzzahlige Modulationswort am Phasenmodulationseingang zum Zeitpunkt  $n$  beschreibt. Der Faktor  $2^{W-A}$  dient hierbei der Anpassung bei unterschiedlichen Wortlängen  $A$  und  $W$ , wie dies bei kommerziell verfügbaren numerisch gesteuerten Oszillatoren zumeist gegeben ist. Für den Wertebereich von  $P(n)$  folgt somit

$$0 \leq P(n) \leq 2^A - 1 , \quad P(n) \in \mathbb{N}_0 , \quad A \in \mathbb{N} . \quad (3.22)$$

Die endliche Wortlänge  $A$  der ganzzahligen Modulationsfolge bedeutet jedoch eine Quantisierung der Phaseninformation. Demzufolge ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Phasenmodulationsfolge  $\phi_{PM}(n)$  und der ganzzahligen Modulationsfolge  $P(n)$  zu

$$P(n) = \frac{2^A}{2\pi} \cdot [\phi_{PM}(n) + \varepsilon_A(n)] . \quad (3.23)$$

Hierbei bezeichnet  $\varepsilon_A(n)$  die Modulationsfehlerfolge.

Bei der Phasenmodulation eines numerisch gesteuerten Oszillators wird — wie bereits gesagt — die Information auf dem Signalweg vom Phasenakkumulator zur Funktionstabelle hinzugefügt. Ausgehend von den in Abschnitt 3.3.2 gewonnenen Erkennt-

nissen stellt sich diesbezüglich die Frage, welche Auswirkung die Phasenmodulation auf die durch die Wortlängenreduktion des Phasenakkunulators verursachten Störkomponenten hat. Zur Beantwortung dieser Frage ist zunächst eine Umwandlung der in Gl. (3.21) enthaltenen Modulo-Operation entsprechend der Form

$$a \bmod b = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b \quad (3.24)$$

notwendig. Nach Einsetzen von Gl. (3.23) in Gl. (3.21) resultiert unter Beachtung von Gl. (3.24) für den Phasenwinkel

$$\Phi(n) = \frac{1}{2^B} \cdot [\Omega(n) - \varepsilon_P(n)] + \frac{2^W}{2\pi} \cdot [\phi_{PM}(n) + \varepsilon_A(n)] - \varepsilon_\Phi(n) \cdot 2^W, \quad (3.25)$$

mit

$$\varepsilon_\Phi(n) = \left\lfloor \frac{1}{2^L} \cdot [\Omega(n) - \varepsilon_P(n)] + \frac{1}{2\pi} \cdot [\phi_{PM}(n) + \varepsilon_A(n)] \right\rfloor. \quad (3.26)$$

Für die Ausgangsfolge des phasenmodulierten numerisch gesteuerten Oszillators folgt daraus

$$s_{PM}(n) = \cos \left\{ \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega(n) - \varepsilon_P(n)] + \phi_{PM}(n) + \varepsilon_A(n) - 2\pi \cdot \varepsilon_\Phi(n) \right\} + \varepsilon_D(n). \quad (3.27)$$

Berücksichtigt man wiederum, daß bei kommerziell verfügbaren numerisch gesteuerten Oszillatoren stets  $L \geq 24$  bit (vgl. Abschnitt 3.3.2) und für die Wortlänge der Phasenmodulationsfolge in der Regel  $A \geq 8$  bit gilt, so ergibt sich schließlich in guter Näherung unter Anwendung elementarer trigonometrischer Beziehungen

$$s_{PM}(n) \approx \cos \left[ \frac{2\pi}{2^L} \cdot \Omega(n) + \phi_{PM}(n) - 2\pi \cdot \varepsilon_\Phi(n) \right] + \left[ \frac{2\pi}{2^L} \cdot \varepsilon_P(n) + \varepsilon_A(n) \right] \cdot \sin \left[ \frac{2\pi}{2^L} \cdot \Omega(n) + \phi_{PM}(n) - 2\pi \cdot \varepsilon_\Phi(n) \right] + \varepsilon_D(n). \quad (3.28)$$

Demnach setzt sich das Ausgangsspektrum des numerisch gesteuerten Oszillators aus der gewünschten Cosinusschwingung und dem Spektrum des mit den Fehlerfolgen amplitudenmodulierten Quadratursignals zusammen. Aus Gl. (3.28) ist allerdings

unmittelbar zu erkennen, daß nicht nur die Trägerschwingung phasenmoduliert wird, sondern auch die im Ausgangsspektrum als Spektrallinienpaare auftretenden Störkomponenten der Phasenfehlerfolge. Ferner führt das der Phasenfehlerfolge überlagerte Quantisierungsrauschen zu einer Anhebung des gesamten Rauschpegels im Ausgangsspektrum. Wie Abschnitt 4.4.3 noch zeigen wird, bedeutet dies eine Verringerung des erzielbaren störfreien Dynamikbereiches und Signal-Rausch-Abstandes.

Da numerisch gesteuerte Oszillatoren die jeweilige Ausgangsfolge durch kontinuierliche Inkrementierung des Phasenwinkels bilden, sind sie theoretisch in der Lage, die Frequenz bzw. die Phase der Ausgangsfolge von einer Taktperiode zur nächsten zu ändern. In der Praxis besitzen numerisch gesteuerte Oszillatoren jedoch immer eine sogenannte Durchlaufverzögerung. Durch eine *Pipeline*-Architektur des Phasenakkumulators wird zwar in jeder Taktperiode eine Addition ausgeführt, jedoch erfordert der gesamte Informationsfluß mehrere Takte. Die Folge ist eine Verzögerung zwischen dem Laden eines neuen Frequenz- bzw. Phasenwortes in das jeweilige Eingangsregister und dem Zeitpunkt, zu dem sich die Frequenz bzw. die Phase der Ausgangsfolge tatsächlich ändert. Die Durchlaufverzögerung hängt in erster Linie von der Frequenz- bzw. Phasenauflösung eines numerisch gesteuerten Oszillators ab. Die tatsächliche Änderung der Ausgangsfolge wird jedoch immer innerhalb einer Taktperiode ausgeführt.

Bei den bisherigen Betrachtungen in diesem Kapitel stand die Synthese eines zeitdiskreten Signales mittels numerisch gesteuertem Oszillator im Vordergrund. In der Praxis werden jedoch zumeist analoge Signale eingesetzt. Der folgende Abschnitt befaßt sich daher mit der Problematik der Digital/Analog-Umsetzung im Hinblick auf die direkte digitale Signalsynthese.

## **3.5 Problematik der Digital/Analog-Umsetzung**

### **3.5.1 Einführung**

Die direkte digitale Signalsynthese stellt hohe Anforderungen an die spektrale Reinheit von Digital/Analog-Umsetzern, die die Schnittstelle zwischen der analogen Umwelt und der digitalen Signalverarbeitung darstellen. Aus diesem Grund sind vor dem



Einsatz eines Digital/Analog-Umsetzers eine Anzahl von Fehlerquellen in bezug auf die zulässigen Fehlergrenzen des Umsetzprozesses abzuschätzen. Hierbei unterscheidet man im allgemeinen zwischen den Fehlerquellen, die aufgrund realer, fehlerbehafteter Digital/Analog-Umsetzer auftreten und Fehlern, die im allgemeinen dem Prozeß der Rekonstruktion des zeitkontinuierlichen Ausgangssignales zuzuordnen sind. Der nachfolgende Abschnitt befaßt sich daher zunächst mit den aufgrund der Rekonstruktion des zeitkontinuierlichen Signales entstehenden systematischen Fehlern, bevor anschließend in Abschnitt 3.5.3 die Fehlerquellen des realen Digital/Analog-Umsetzers in bezug auf die direkte digitale Signalsynthese diskutiert werden. Die Auswahl eines geeigneten Rekonstruktionsfilters ist Thema des abschließenden Abschnittes.

### 3.5.2 Rekonstruktion des analogen Signales

Entsprechend dem Abtasttheorem läßt sich ein zeitkontinuierliches bandbegrenztetes Signal aus zeitdiskreten Signalwerten und der Kenntnis der Taktperiode mit Hilfe eines idealen Interpolationsfilters rekonstruieren [Opp 92, Pro 92]. Unter Anwendung der Fouriertransformation lautet der entsprechende Zusammenhang

$$S_K(j\omega) = S_{DA}(e^{j\omega T}) \cdot H_I(j\omega) , \quad (3.29)$$

wobei  $S_{DA}(e^{j\omega T})$  der zeitdiskreten Fouriertransformierten der Folge von Signalwerten  $s_{DA}(n)$  und  $S_K(j\omega)$  der Fouriertransformierten des rekonstruierten zeitkontinuierlichen Signales  $s_K(t)$  entspricht. Das Interpolationsfilter  $H_I(j\omega)$  besitzt hierbei die Übertragungsfunktion eines idealen Tiefpaßfilters mit der Grenzfrequenz  $\pi / T$ .

Zur Approximation des idealen Tiefpaßfilters, das sich in der Praxis nicht realisieren läßt, verwendet man zumeist ein Halteglied nullter Ordnung [Opp 92, Pro 92], im folgenden Halteglied genannt, mit der Übertragungsfunktion

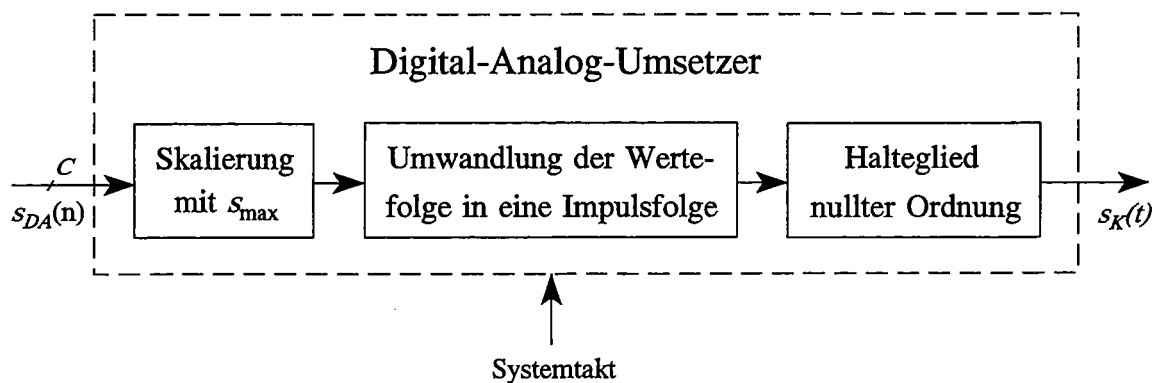
$$H_0(j\omega) = T \cdot \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} , \quad (3.30)$$

wobei  $T$  der Periodendauer des Systemtaktes entspricht. Das rekonstruierte zeitkontinuierliche Ausgangssignal des realen Digital/Analog-Umsetzers weist somit einen näherungsweise treppenförmigen Verlauf auf, da dieser die quantisierten Werte für

eine Taktperiode konstant hält. Nach Einsetzen von Gl. (3.30) in Gl. (3.29) und anschließender inverser Fouriertransformation lautet die Beziehung im Zeitbereich für das zeitkontinuierliche Ausgangssignal

$$s_K(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{DA}(n) \cdot h_0(t - nT) , \quad (3.31)$$

wobei  $h_0(t)$  die Impulsantwort des Haltegliedres darstellt. Bild 3.10 zeigt das zugehörige mathematische Modell.



**Bild 3.10** Mathematisches Modell des Digital/Analog-Umsetzers

Aufgrund der Ausführungen zum numerisch gesteuerten Oszillator ist im Rahmen dieser Arbeit der spezielle Fall einer in  $n$  periodischen Wertefolge der Periode  $N$ , gemäß  $s_{DA}(n) = s_{DA}(n + N)$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{I}$ , von besonderem Interesse. Allgemein läßt sich jede periodische Wertefolge in Form einer diskreten Fourierreihe darstellen. Unter Beachtung dieses Sachverhaltes folgt mit Gl. (3.31) das rekonstruierte periodische, zeitkontinuierliche Signal zu

$$s_K(t) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(t - nT) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} S_{DA}(k) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} , \quad (3.32)$$

mit  $S_{DA}(k)$  als den Fourierkoeffizienten der periodischen Wertefolge. Die Fourieranalyse von Gl. (3.32) führt zur entsprechenden Beziehung im Frequenzbereich. Es gilt

$$\begin{aligned}
S_K(j\omega) &= H_0(j\omega) \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} S_{DA}(k) \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} \cdot k - 2\pi \cdot l\right) \\
&= \frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{DA}(k) \cdot H_0\left(j \frac{2\pi}{N \cdot T} \cdot k\right) \cdot \delta\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} \cdot k\right).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Aufgrund der Übertragungsfunktion  $H_0(j\omega)$  des Haltegliedes treten im Unterschied zum idealen Tiefpaßfilter im Ausgangsspektrum des Digital/Analog-Umsetzers unerwünschte Frequenzkomponenten oberhalb der halben Systemtaktrate auf, deren Lage sich aus

$$f_{stör} = m \cdot f_{clk} \pm f_s, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.34}$$

bestimmen läßt (vgl. Bild 3.15). Ferner ergeben sich Amplitudenverluste im oberen Frequenzbereich des zu rekonstruierenden Signales, was eine Informationsverfälschung zur Folge haben kann. Ein Amplitudenabfall von 3 dB wird demzufolge bei einer Frequenz erreicht, die 44,2% der Systemtaktrate entspricht. Wie Abschnitt 3.5.4 noch zeigen wird, lassen sich diese nichtidealen Rekonstruktionsbedingungen durch ein dem Digital/Analog-Umsetzer nachgeschaltetes analoges Tiefpaßfilter in gewissen Grenzen verbessern.

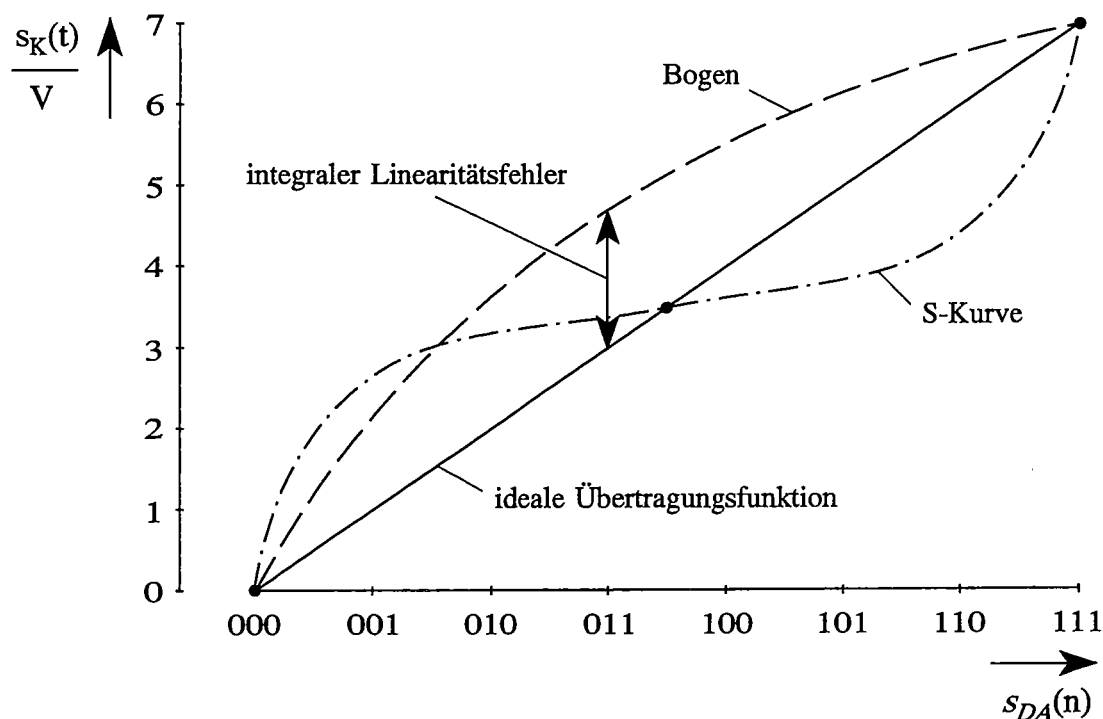
### 3.5.3 Der reale Digital/Analog-Umsetzer

Neben den im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen systematischen Fehlern sind die im Hinblick auf die direkte digitale Signalsynthese wichtigsten Fehlerquellen des realen Digital/Analog-Umsetzers die statischen und dynamischen Kenngrößen [McC 88, Buc 93]. Bei den statischen Kenngrößen sind vor allem der integrale und der differentielle Linearitätsfehler, sowie bei den dynamischen Kenngrößen die Anstiegsgeschwindigkeit, die Einstellzeit und die auftretenden Störspannungen am Ausgang des Digital/Analog-Umsetzers von Bedeutung. Demgegenüber sind z.B. der *Offset*- und der Verstärkungsfehler für diese Anwendung unkritisch [Buc 93], so daß diese bei der weiteren Betrachtung vernachlässigt werden dürfen.

### Integraler und differentieller Linearitätsfehler

Eines der wichtigen Kriterien eines Digital/Analog-Umsetzers ist das Linearitätsverhalten. Hervorgerufen durch nicht optimal abgestimmte interne Widerstände und durch Toleranzen der internen Stromquellen lassen sich Fehler dieser Art beim praktischen Einsatz nicht abgleichen. Man unterscheidet hierbei zwischen dem integralen und dem differentiellen Linearitätsfehler.

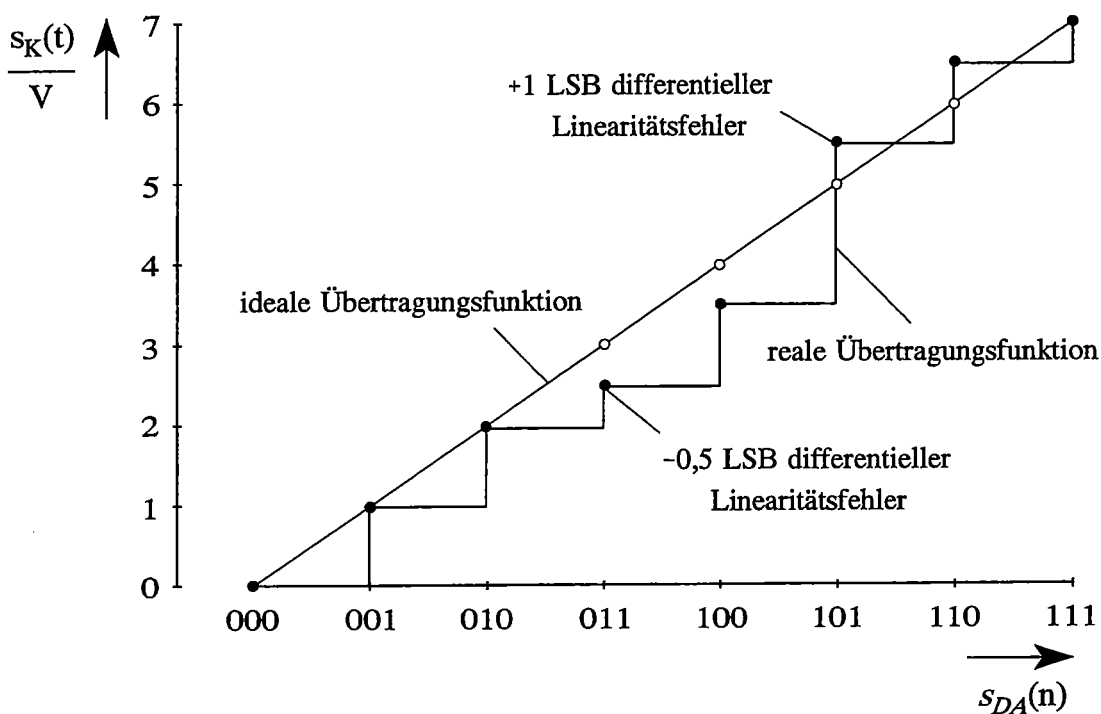
Der integrale Linearitätsfehler zeigt an, welche maximalen Differenzen zwischen der realen und der idealen Übertragungsfunktion auftreten. Die Spezifikation erfolgt in der Regel in Bruchteilen des LSB (*Least Significant Bit*). Im Idealfall ist die Übertragungsfunktion eine Gerade. Die Übertragungsfunktion des realen Digital/Analog-Umsetzers kann aber beispielsweise die Form eines Bogens oder einer S-Kurve haben, oder auch scharfe Diskontinuitäten in der Mitte oder anderswo aufweisen (Bild 3.11). Demzufolge beeinflusst der integrale Linearitätsfehler die nichtlineare Verzerrung des Umsetzers. Die aufgrund dieses Sachverhaltes entstehenden Störgrößen im Frequenzbereich lassen sich mittels der Fourieranalyse abschätzen. So führt beispiels-



**Bild 3.11** Beispiele für integrale Linearitätsfehler des realen Digital/Analog-Umsetzers

weise eine Übertragungsfunktion in Form eines Bogens zu einer starken 2. Harmonischen (quadratische Kennlinie), während eine Übertragungsfunktion in Form einer symmetrischen S-Kurve eine starke 3. Harmonische (kubische Kennlinie) der Signalfrequenz bedeutet.

Im Unterschied zum integralen Linearitätsfehler, bei dem — wie gesagt — die Fehler aller darstellbaren Ausgangswerte des Digital/Analog-Umsetzers auf die ideale Übertragungsfunktion bezogen werden, erfaßt der differentielle Linearitätsfehler die Abweichung eines einzelnen Ausgangswertes, bei einer Umschaltung des Codewortes am Eingang des Digital/Analog-Umsetzers um 1 LSB, vom idealen, theoretisch zu erwartenden Wert (Bild 3.12). Im Frequenzbereich tritt der Fehler in Form von Intermodulationsprodukten und Harmonischen höherer Ordnung der Signalfrequenz in Erscheinung [DeB 92]. Diese führen bei einem Wert von mehr als 0,5 LSB zu einer Verschlechterung des erzielbaren Signal-Rausch-Abstandes. Für den Fall, daß der differentielle Linearitätsfehler größer als 1 LSB ist, besteht zudem keine Garantie mehr, daß der Digital/Analog-Umsetzer monoton umsetzt [Zan 90, Buc 93]. Bei der Angabe



**Bild 3.12** Beispiele für differentielle Linearitätsfehler des realen Digital/Analog-Umsetzers

des integralen Linearitätsfehlers ist hingegen der Wert  $\pm 0,5$  LSB von Bedeutung, weil nur unterhalb dieses Grenzwertes ein monotoner Umsetzbetrieb des Digital/Analog-Umsetzers gewährleistet ist [Zan 90].

Im Hinblick auf die direkte digitale Signalsynthese ist festzuhalten, daß die Linearitätsfehler des Digital/Analog-Umsetzers ein wichtiges Kriterium darstellen, da sie im Ausgangsspektrum sowohl zu unerwünschten Störkomponenten führen, die bei Harmonischen der Signalfrequenz auftreten, als auch Intermodulationsverzerrungen zwischen der Systemtaktrate  $f_{clk}$  und der Signalfrequenz  $f_s$  hervorrufen. Unter Anwendung des Modells eines Mischers mit nichtlinearer Kennlinie zur Beschreibung dieser Effekte, kann die Lage der Störkomponenten im Ausgangsspektrum allgemein zu

$$f_{stör} = \pm m \cdot f_{clk} \pm n \cdot f_s, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad (3.35)$$

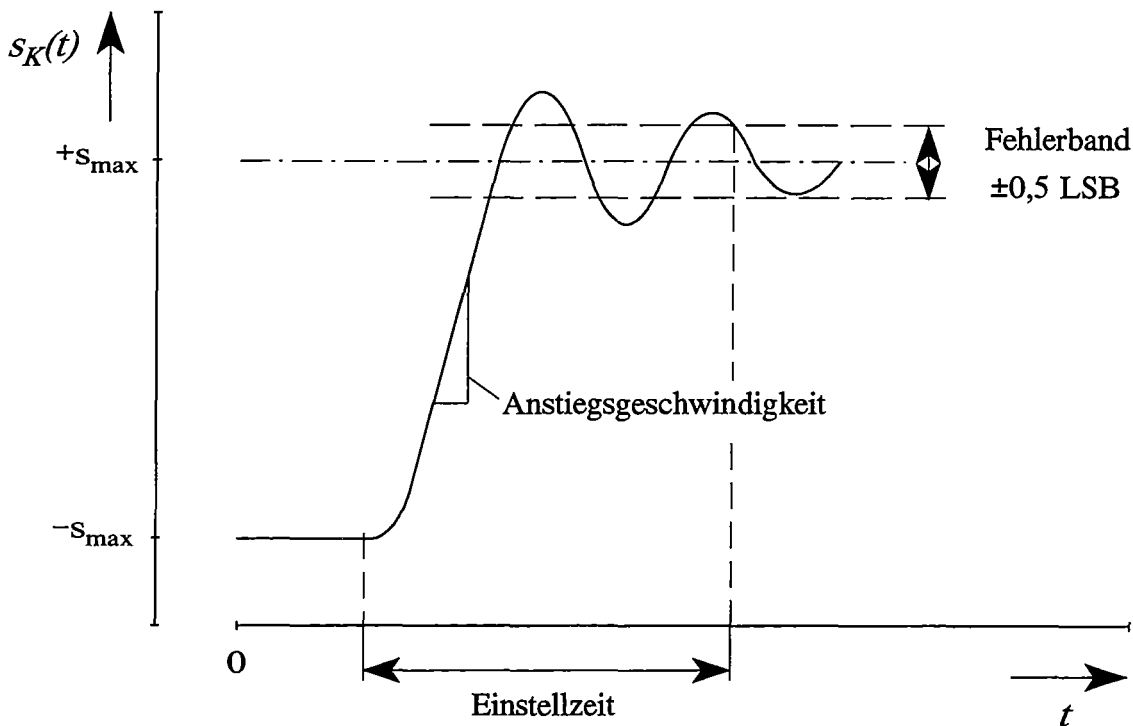
bestimmt werden [DeB 92, Buc 93, Kro 93]. Bei dem im Rahmen dieser Arbeit betrachteten System mit konstanter Taktrate ist die Lage der Störkomponenten demzufolge nur von der jeweiligen Signalfrequenz  $f_s$  abhängig. Die für die direkte digitale Signalsynthese ungünstigsten Störkomponenten treten bei Frequenzen von  $2f_s$ ,  $f_{clk} - 2f_s$ ,  $3f_s$  und  $f_{clk} - 3f_s$  auf, weil diese zumeist in den Durchlaßbereich des analogen Rekonstruktionsfilters fallen und somit von diesem Filter nicht zu eliminieren sind.

#### *Anstiegsgeschwindigkeit, Einstellzeit und Glitch-Effekt*

Die in bezug auf die direkte digitale Signalsynthese wichtigsten drei dynamischen Kenngrößen eines realen Digital/Analog-Umsetzers sind Anstiegsgeschwindigkeit, Einstellzeit und auftretende transiente Störspannungen des zeitkontinuierlichen Ausgangssignales (Bild 3.13). Angesichts der Tatsache, daß diese Kenngrößen zur Charakterisierung eines Digital/Analog-Umsetzers von den Herstellern zumeist im Zeitbereich spezifiziert werden, ist eine Abschätzung ihrer jeweiligen Auswirkungen auf den Frequenzbereich sehr schwierig. Wenn auch gute Eigenschaften im Zeitbereich nicht automatisch gute Eigenschaften im Frequenzbereich garantieren, so sind doch zumindest in gewissen Grenzen Rückschlüsse aus diesen Kenngrößen auf das Verhalten im Frequenzbereich möglich [DeB 92, Buc 93, Beh 94].

Die Einstellzeit eines Digital/Analog-Umsetzers erfaßt die Zeitspanne, die der Umsetzer benötigt, bis sich nach einem Sprung des Eingangscodewortes die Spannung oder

der Strom an seinem Ausgang innerhalb eines definierten Fehlerbandes eingestellt hat. Die endliche Einstellzeit bewirkt zusätzliche Linearitätsfehler, deren Auswirkungen im Ausgangsspektrum nach [Fre 77] als zusätzliche Klirrkomponenten aufgefaßt werden können.



**Bild 3.13** Dynamische Kenngrößen des realen Digital/Analog-Umsetzers

Die maximale Anstiegsgeschwindigkeit eines Digital/Analog-Umsetzers wird durch den steilsten Anstieg der Ausgangsspannung oder des Ausgangsstromes bei einer Änderung des Eingangscodewortes über den maximalen Bereich bestimmt. Wie aus Bild 3.13 ersichtlich, besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Anstiegsgeschwindigkeit und der Einstellzeit. Somit ist generell eine hohe Anstiegsgeschwindigkeit zu bevorzugen. Allerdings führen unterschiedliche Anstiegs- und Abfallzeiten des Ausgangssignales zu unerwünschten Frequenzkomponenten im Ausgangsspektrum, die bei Harmonischen gerader Ordnung der Signalfrequenz liegen [McC 88].

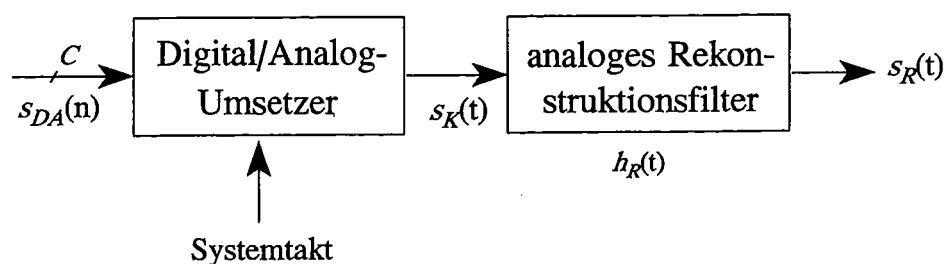
Parasitäre Kapazitäten und ungleiche Schaltverzögerungen der internen Stromquellen eines Digital/Analog-Umsetzers verursachen an seinem Ausgang transiente Störspannungen in Form von kurzzeitigen Spannungsspitzen bei einem Codewortwechsel am Eingang. In der englischsprachigen Literatur bezeichnet man diese transienten

Störspannungen als *Glitches*. Die eingeschlossene Fläche von Zeit und Amplitudenabweichung, der sogenannte Glitch-Impuls, wird in der Regel als Kenngröße spezifiziert. Infolge der codewortabhängigen Natur der Glitches zeigen sich diese im Ausgangsspektrum als Störlinien bei Frequenzen, die Harmonischen der Signalfrequenz entsprechen [DeB 92, Beh 94]. Die Amplitude dieser Störkomponenten ist von der Größe des jeweiligen Glitch-Impulses abhängig.

Die Diskussion in diesem Abschnitt hat gezeigt, daß die statischen und dynamischen Kenngrößen des realen Digital/Analog-Umsetzers einen nicht unerheblichen Einfluß auf die spektrale Reinheit des zeitkontinuierlichen Signales haben. Daher ist bei der Auswahl eines für die direkte digitale Signalsynthese geeigneten Digital/Analog-Umsetzers eine diesbezügliche Abschätzung der auftretenden Störkomponenten anhand der Herstellerspezifikationen unerlässlich.

### 3.5.4 Einfluß des analogen Rekonstruktionsfilters

Aufgrund der Fehlerquellen des realen Digital/Analog-Umsetzers und der Approximation des idealen Interpolationsfilters kann das rekonstruierte zeitkontinuierliche Signal Frequenzanteile bis zu einem Mehrfachen der Taktrate enthalten (Bild 3.15). Zur Unterdrückung dieser unerwünschten Störfrequenzen sind auf der analogen Seite stets Rekonstruktionsfilter einzusetzen, die als Tiefpaß- oder Bandpaßfilter realisiert sind (Bild 3.14). Die Auslegung des analogen Rekonstruktionsfilters beeinflusst die maximal erzeugbare Signalfrequenz, den Phasengang und die spektrale Reinheit. Da die Anforderungen an das Rekonstruktionsfilter für sinusförmige und nichtsinusförmige Signale unterschiedlich sind, letztere jedoch für das im Rahmen dieser Arbeit betrachtete digitale System nicht relevant sind, beschränkt sich die weitere Diskussion ausschließlich auf sinusförmige Signale.



**Bild 3.14** Realisierung der Digital/Analog-Umsetzung



In Analogie zu Abschnitt 3.5.2 ergibt sich der Bild 4.14 entsprechende mathematische Zusammenhang zu

$$s_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_K(\tau) \cdot h_R(t - \tau) d\tau, \quad (3.36)$$

wobei  $h_R(t)$  die Impulsantwort des analogen Rekonstruktionsfilters darstellt. In Anlehnung an Gl. (3.29) folgt für das Spektrum am Ausgang

$$S_R(j\omega) = S_K(j\omega) \cdot H_R(j\omega). \quad (3.37)$$

Hierbei beschreibt  $H_R(j\omega)$  die Übertragungsfunktion des Rekonstruktionsfilters. Unter Berücksichtigung von Gl. (3.30) ergibt sich schließlich aus Gl. (3.37) für das Ausgangsspektrum

$$S_R(j\omega) = S_{DA}(e^{j\omega T}) \cdot H_0(j\omega) \cdot H_R(j\omega). \quad (3.38)$$

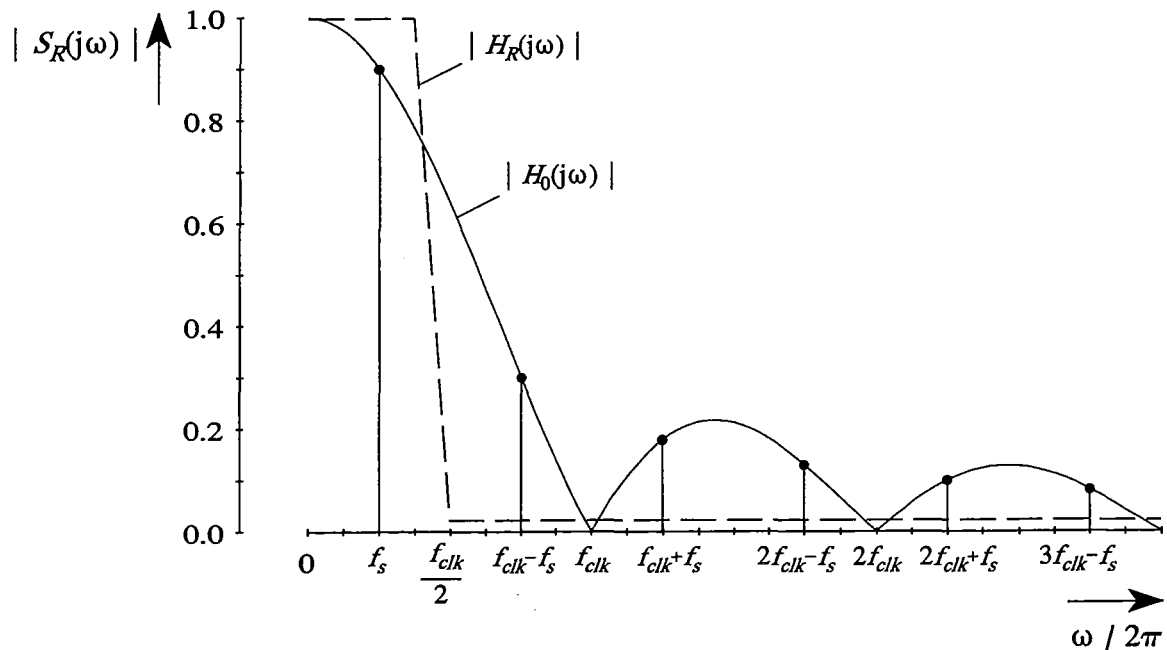
Aus Gl. (3.38) wird deutlich, daß durch geeignete Festlegung der Übertragungsfunktion des analogen Rekonstruktionsfilters eine Kompensation des nichtidealen Verhaltens des Halteglieders erfolgen kann [Opp 92]. Ein anderer Ansatz ist es, die Kompensation bereits auf digitaler Seite durch ein dem Digital/Analog-Umsetzer vorgeschaltetes digitales Filter zu realisieren [Sam 88, Lin 91]. Dies führt jedoch zu einer Limitierung der erzielbaren maximalen Datenrate des Systems [Spa 93]. Bei dem im Rahmen dieser Arbeit betrachteten digitalen Rauschgenerator bietet es sich hingegen an, die Kompensation in den Synthesealgorithmus mit einzubeziehen, so daß kein zusätzlicher Schaltungsaufwand notwendig wird.

Im Hinblick auf die direkte digitale Signalsynthese beginnt die Auslegung eines geeigneten analogen Rekonstruktionsfilters bereits mit der Festlegung der durch das digitale System zu erzeugenden maximalen Signalfrequenz  $f_{smax}$ . Das Nyquist-Theorem limitiert im allgemeinen die durch ein digitales System erzeugbare maximale Signalfrequenz, unter der Annahme der Realisierung des analogen Rekonstruktionsfilters in Form eines Tiefpaßfilters, auf die halbe Systemtakttrate  $f_{clk} / 2$ . Infolge der nicht idealen Rekonstruktion des zeitkontinuierlichen Signales (vgl. Abschnitt 3.5.2) treten gemäß Gl. (3.34) Spektralanteile oberhalb der halben Systemtakttrate auf, wobei insbesondere die Störkomponente bei der Frequenz  $f_{stör} = f_{clk} - f_s$  von Bedeutung ist.

Diese Störkomponente nähert sich um so mehr der Signalfrequenz  $f_s$ , je mehr sich diese der halben Systemtakttrate nähert. Dies führt zu dem Effekt, daß oberhalb einer bestimmten Signalfrequenz ein realisierbares Rekonstruktionsfilter das Nutzsignal und die Störkomponente nicht mehr voneinander trennen kann (vgl. Bild 3.15). In der Praxis empfiehlt sich daher eine maximale Signalfrequenz von

$$f_{smax} \leq 0,4 \cdot f_{clk} \quad (3.39)$$

Im ungünstigsten Fall  $f_s = 0,4 \cdot f_{clk}$  tritt somit im Ausgangsspektrum des Digital/Analog-Umsetzers eine Störkomponente bei der Frequenz  $f_{stör} = 0,6 \cdot f_{clk}$  auf. Aufgrund der nicht idealen Übertragungsfunktion des Halteglieders resultiert eine Dämpfung der Amplitude dieser Störkomponente um ca.  $-3,5$  dB gegenüber der Amplitude der Signalfrequenz. Ein gewünschter Signal-Rausch-Abstand von beispielsweise  $a_{SN} = 74$  dB erfordert somit eine Abschwächung bei der Frequenz  $f_{stör}$  um weitere  $a_s = 70,5$  dB durch das analoge Rekonstruktionsfilter. Es sei angemerkt, daß die Betrachtung höherer Störkomponenten entfallen kann, da sie einerseits aufgrund der Übertragungsfunktion des Halteglieders eine geringere Amplitude aufweisen und andererseits das Rekonstruktionsfilter so ausgelegt sein sollte, daß die spezifizierete minimale Dämpfung im gesamten Sperrbereich nicht unterschritten wird.



**Bild 3.15** Spektrum des rekonstruierten zeitkontinuierlichen Signales

Das analoge Rekonstruktionsfilter muß im allgemeinen die geforderte Dämpfung im Sperrbereich innerhalb des Übertragungsbereiches erreichen. Für die in diesem Beispiel geforderte Sperrdämpfung  $a_s = 70,5$  dB bei  $f_{stör} = 0,6 \cdot f_{clk}$  ergibt sich ein Übertragungsbereich von ungefähr 0,58 Oktaven. Dies entspricht einer Dämpfung von 120 dB/Oktave. Nach [Unb 93] läßt sich bei gegebener Sperrdämpfung  $a_s$  und normierter Eckfrequenz  $\omega_s$  die erforderliche Filterordnung aus der charakteristischen Funktion des Filters bestimmen. Dementsprechend gilt für das analoge Rekonstruktionsfilter bei gegebenem Signal-Rausch-Abstand  $a_{S/N}$  und maximaler Signalfrequenz  $f_{smax}$

$$\log \left[ 1 + |C_R(j\omega_s)|^2 \right] \geq \frac{a_{S/N}}{10} - 2 \cdot \log(\omega_s) , \quad (3.40)$$

mit

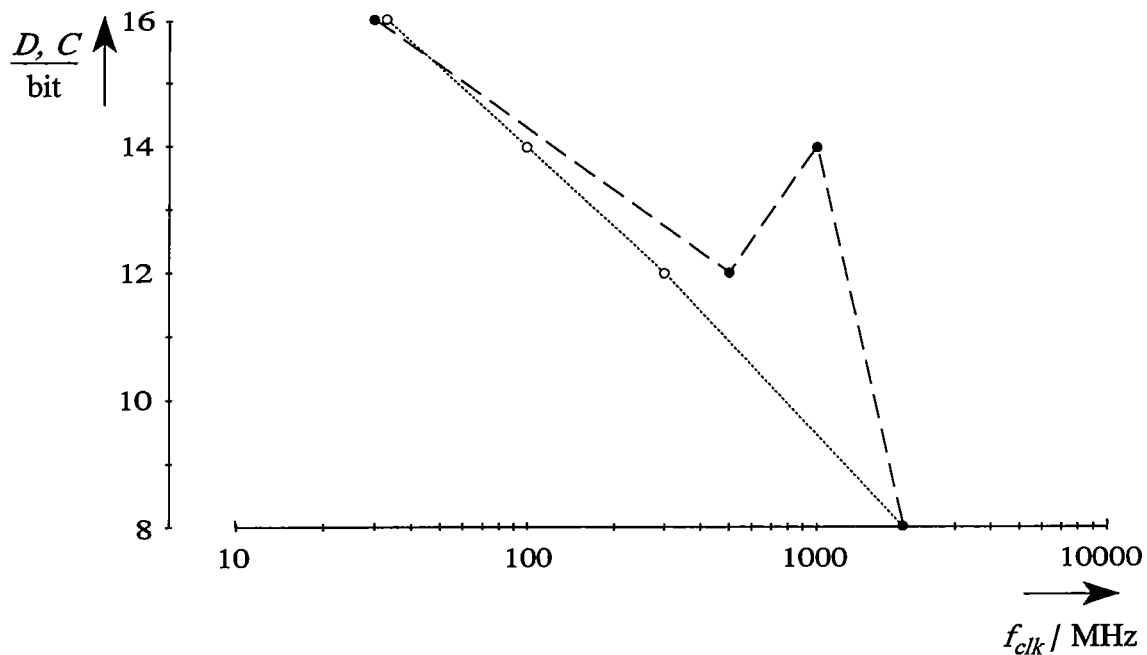
$$\omega_s = \frac{f_{stör}}{f_{smax}} = \frac{f_{clk}}{f_{smax}} - 1 , \quad (3.41)$$

wobei  $C_R(j\omega)$  die charakteristische Funktion des Rekonstruktionsfilters darstellt. Für den hier betrachteten ungünstigsten Fall wäre beispielsweise ein Butterworth-Filter 20-ter Ordnung erforderlich um einen Signal-Rausch-Abstand von  $a_{S/N} = 74$  dB zu erreichen.

Aus Gl. (3.40) und Gl. (3.41) ist ersichtlich, daß bei konstanter Systemtakttrate die Filterordnung im wesentlichen von dem geforderten Signal-Rausch-Abstand, von der maximal zu erzeugenden Signalfrequenz und von der charakteristischen Funktion des verwendeten Filters abhängt. Somit sind verschiedene Auslegungen möglich, wobei die Verfügbarkeit und die Toleranz der Komponenten eine Rolle spielt. Im Hinblick auf die direkte digitale Signalsynthese ist allerdings zu beachten, daß aufgrund der nicht idealen statischen und dynamischen Kenngrößen des realen Digital/Analog-Umsetzers und infolge der Quantisierung des Phasenwinkels und der Ausgangsamplitude des numerisch gesteuerten Oszillators durchaus Störkomponenten auch in den Durchlaßbereich des analogen Rekonstruktionsfilters fallen können und damit durch dieses Filter nicht zu eliminieren sind.

Die Ausführungen in diesem Kapitel verdeutlichen, daß der numerisch gesteuerte Oszillator aufgrund seiner Fähigkeit zur digitalen Phasenmodulation und der Möglich-

keit zur Variation der Trägerfrequenz in Realzeit in besonderem Maße für das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Konzept eines digitalen Rauschgenerators geeignet ist. Bevor im nächsten Kapitel, welches die wesentlichen neuen Aspekte der vorliegenden Arbeit beinhaltet, die Möglichkeit der Synthese schmalbandiger Rauschsignale auf der Basis der direkten digitalen Signalsynthese betrachtet und untersucht wird, zeigt Bild 3.16 abschließend die Grenzen derzeit am Markt verfügbarer Komponenten [Mot 92, Ple 92, Bur 94, Har 94, Sta 94, Ana 95]. Allgemein gilt, daß sich bei höheren Taktraten die Wortlänge der signalverarbeitenden Komponenten verringert. Die heutige Grenze bezüglich der direkten digitalen Signalsynthese bilden numerisch gesteuerte Oszillatoren und Digital/Analog-Umsetzer mit einer Taktrate von 2 GHz bei einer Wortlänge von 8 bit.



**Bild 3.16** Zusammenhang zwischen Amplitudenauflösung und maximaler Taktrate derzeit verfügbarer ○: numerisch gesteuerter Oszillatoren und ●: Digital/Analog-Umsetzer

## 4 Synthese bandbegrenzter Rauschsignale mit numerisch gesteuerten Oszillatoren

### 4.1 Einführung

Ein wesentlicher Gesichtspunkt hinsichtlich der Einsatzmöglichkeiten eines digitalen Rauschgenerators stellt die maximal erzeugbare Signalfrequenz dar. Aufgrund der in den letzten Jahren erzielten Fortschritte auf dem Gebiet der Digital/Analog-Umsetzung wird der Einsatz der digitalen Signalsynthese bis in den UHF- und unteren Mikrowellenbereich möglich [Wei 91, Tri 94]. Die in Abschnitt 2.4.4 beschriebene Schaltungsstruktur bedingt jedoch eine Begrenzung der maximal erzeugbaren Signalfrequenz durch die bei gleicher Wortlänge niedrigere Verarbeitungsgeschwindigkeit derzeit verfügbarer digitaler Multiplizierer gegenüber den numerisch gesteuerten Oszillatoren. In Abschnitt 4.2 wird daher auf der Grundlage der in Bild 2.10 dargestellten Schaltungsstruktur ein Lösungsvorschlag in Form eines neuartigen Konzeptes entwickelt, das ohne Multiplizierer auskommt.

Den Kern des digitalen Rauschgenerators bildet neben der neuartigen Schaltungsstruktur der Synthesalgorithmus zur Berechnung der komplexen stochastischen Einhüllenden  $a(n)$ . Ausgehend von den in Abschnitt 2.3 gewonnenen Erkenntnissen zur Beschreibung stationärer zeitdiskreter Bandpaßprozesse erfolgt in Abschnitt 4.3 die Ableitung eines Algorithmus zur numerischen Berechnung der komplexen stochastischen Einhüllenden anhand eines vorgegebenen Leistungsdichtespektrums des äquivalenten Basisbandprozesses, bevor abschließend in Abschnitt 4.4 die Simulation des Gesamtsystems vorgestellt wird.

### 4.2 Eine neuartige Schaltung mit zwei numerisch gesteuerten Oszillatoren

Die arithmetischen Grundoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation bilden einen wesentlichen Bestandteil der digitalen Datenverarbeitung. Bei allen diesen Operationen sind, im Hinblick auf eine schaltungstechnische Realisierung, die Auflösung, die Operationsgeschwindigkeit, die Schaltungskomplexität und der Leistungsverbrauch wichtige Entwurfskriterien. Eine schaltungstechnische Realisierung dieser Operationen stellt daher immer einen Kompromiß dar, wobei die Begrenzung durch

die zur Verfügung stehende Technologie und durch die Realisierungskosten gegeben ist.

Aufgrund der mathematischen Axiome zur Multiplikation zweier Dualzahlen ist bei gleicher Wortlänge der schaltungstechnische Aufwand zur Realisierung eines Multiplizierers wesentlich höher als derjenige zur Realisierung eines Addierers [Wal 80, Azi 90, Hes 93]. Insbesondere für die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Anwendung, bei der die Multiplikation trotz Einsatz schneller Multiplizierer zu langsam von statten geht, erscheint eine Schaltungsstruktur zweckmäßig, die ohne Multiplikation auskommt. Hinsichtlich der in Bild 2.10 vorgestellten Schaltungsstruktur stellt sich damit die Aufgabe, die Multiplikation beim phasenmodulierten Trägersignal durch eine bezüglich der Verarbeitungsgeschwindigkeit effizientere arithmetische Operation zu ersetzen.

Ausgangspunkt der Überlegungen bildet die Darstellung eines reellen zeitdiskreten Bandpaßprozesses nach Gl. (2.18). Für den Betrag der komplexen stochastischen Einhüllenden sei folgende Definition eingeführt:

$$|a(n)| = \cos \Theta(n), \quad \Theta(n) \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{I}, \quad (4.1)$$

wobei  $\Theta(n)$  einem reellen stationären Zufallsprozeß entspricht. Nach Einsetzen von Gl. (4.1) in Gl. (2.18) erhält man für den reellen Bandpaßprozeß

$$s(n) = \cos \Theta(n) \cdot \cos [\Omega_0 \cdot n + \phi(n)]. \quad (4.2)$$

Mit Hilfe von elementaren trigonometrischen Beziehungen ergibt sich daraus

$$s(n) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos [\Omega_0 \cdot n + \Psi_1(n)] + \cos [\Omega_0 \cdot n + \Psi_2(n)] \right\}, \quad (4.3)$$

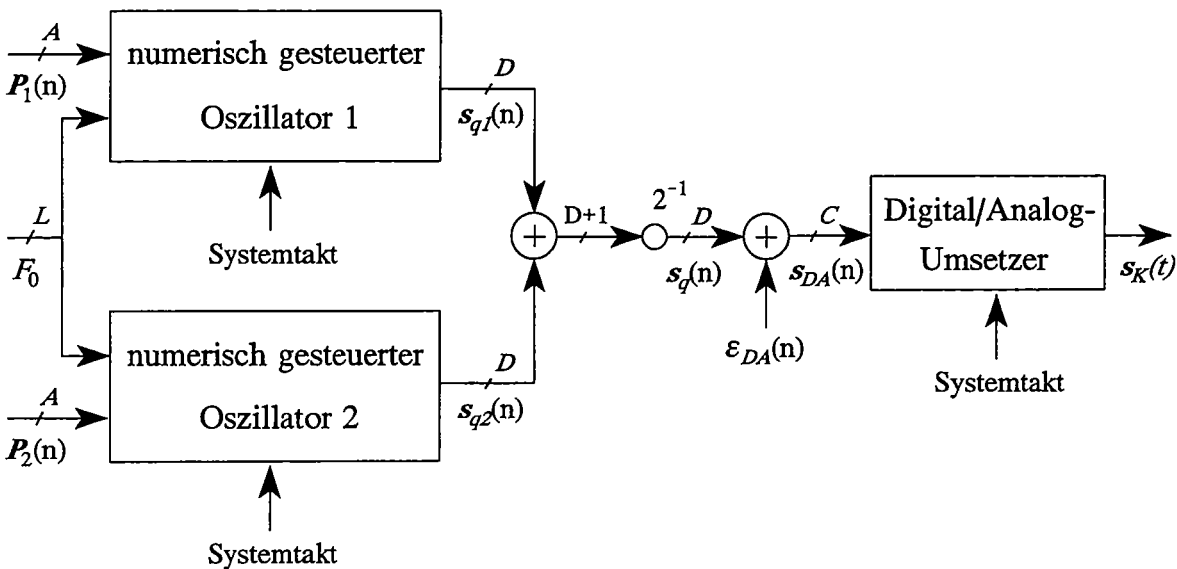
wobei die beiden Phasenfolgen  $\Psi_1(n)$  und  $\Psi_2(n)$  reelle stationäre Zufallsprozesse darstellen und durch

$$\Psi_1(n) = \phi(n) + \Theta(n), \quad \Psi_2(n) = \phi(n) - \Theta(n) \quad (4.4)$$

gegeben sind.

Als ein für die schaltungstechnische Realisierung wichtiges Ergebnis folgt aus Gl. (4.3), daß, abgesehen von einem konstanten Faktor, ein reeller zeitdiskreter Bandpaßprozeß durch zwei zeitdiskrete Phasenmodulationen und eine zeitdiskrete Addition beschrieben werden kann. Dies führt zu einer erheblich höheren maximalen Verarbeitungsgeschwindigkeit, da aufgrund der mathematischen Axiome die Addition gegenüber der Multiplikation bei gleicher Wortlänge eine höhere maximale Datenrate erlaubt. Die Multiplikation der Ausgangsfolge des Addierers mit dem konstanten Faktor  $2^{-1}$  führt in diesem Fall zu keiner Verringerung der maximalen Verarbeitungsgeschwindigkeit, da diese Multiplikation lediglich einer Reduzierung der Wortlänge der Ausgangsfolge um eine Binärstelle entspricht.

Ausgehend von der in Bild 2.10 dargestellten Schaltungsstruktur läßt sich nun unter Beachtung von Gl. (4.3) eine äquivalente Schaltungsstruktur entwickeln, wobei ein zweiter numerisch gesteuerter Oszillator und ein digitaler Addierer den in Bild 2.10 enthaltenen Multiplizierer ersetzen. Bild 4.1 zeigt eine entsprechend modifizierte Schaltungsstruktur einschließlich Digital/Analog-Umsetzer.



**Bild 4.1** *Quadraturamplitudenmodulation mit zwei numerisch gesteuerten Oszillatoren*

Für die weitere Betrachtung sei zweckmäßigerweise angenommen, daß zwei numerisch gesteuerte Oszillatoren gleichen Typs verwendet werden, so daß die jeweiligen Wortlängen  $L$ ,  $W$ ,  $A$  und  $D$  (vgl. Kapitel 3) bei beiden identisch sind.

Anhand der in Abschnitt 3.4 beschriebenen digitalen Phasenmodulation mittels numerisch gesteuertem Oszillator ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (3.20) in Gl. (4.3) der Bild 4.1 entsprechende mathematische Zusammenhang zu

$$s_q(n) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{2^W} \cdot \Phi_1(n) \right] + \varepsilon_{D_1}(n) + \cos \left[ \frac{2\pi}{2^W} \cdot \Phi_2(n) \right] + \varepsilon_{D_2}(n) \right\}, \quad (4.5)$$

mit

$$\Phi_1(n) = \left\{ \frac{1}{2^B} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + 2^{W-A} \cdot P_1(n) \right\} \bmod 2^W \quad (4.6)$$

und

$$\Phi_2(n) = \left\{ \frac{1}{2^B} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + 2^{W-A} \cdot P_2(n) \right\} \bmod 2^W. \quad (4.7)$$

Hierbei beschreiben  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  die ganzzahligen stochastischen Modulationsfolgen am Phasenmodulationseingang des jeweiligen numerisch gesteuerten Oszillators (vgl. Bild 3.9) und  $\Omega_0(n)$  die Ausgangsfolge des Phasenakkumulators beim ganzzahligen Frequenzwort  $F_0$ .

Die endliche Wortlänge  $A$  der ganzzahligen Modulationsfolgen bedeutet hinsichtlich der beiden stochastischen Phasenfolgen  $\Psi_1(n)$  und  $\Psi_2(n)$  eine Quantisierung der Phaseninformation. Unter Beachtung von Gl. (3.23) gilt demnach

$$P_1(n) = \frac{2^A}{2\pi} \cdot [\Psi_1(n) + \varepsilon_{A_1}(n)] \quad (4.8)$$

und

$$P_2(n) = \frac{2^A}{2\pi} \cdot [\Psi_2(n) + \varepsilon_{A_2}(n)]. \quad (4.9)$$

Erfolgt die Reduzierung der Wortlänge der Phaseninformation auf  $A$  Binärstellen durch Rundung, so ergeben sich die Modulationsfehlerfolgen zu



$$\varepsilon_{A_1}(n) = \frac{2\pi}{2^A} \cdot \left[ \frac{2^A}{2\pi} \cdot \Psi_1(n) + 0,5 \right] - \Psi_1(n) \quad (4.10)$$

bzw.

$$\varepsilon_{A_2}(n) = \frac{2\pi}{2^A} \cdot \left[ \frac{2^A}{2\pi} \cdot \Psi_2(n) + 0,5 \right] - \Psi_2(n) . \quad (4.11)$$

Die sich aufgrund der numerisch gesteuerten Oszillatoren ergebenden Abweichungen gegenüber dem Idealfall nach Gl. (4.2) lassen sich anhand einer Umformung von Gl. (4.5) erkennen. Nach Anwendung elementarer trigonometrischer Beziehungen kann für Gl. (4.5) auch

$$s_q(n) = \cos \left\{ \frac{\pi}{2^W} \cdot [\Phi_1(n) - \Phi_2(n)] \right\} \cdot \quad (4.12)$$

$$\cos \left\{ \frac{\pi}{2^W} \cdot [\Phi_1(n) + \Phi_2(n)] \right\} + \frac{1}{2} \cdot [\varepsilon_{D_1}(n) + \varepsilon_{D_2}(n)]$$

geschrieben werden. Um die Summe und die Differenz von  $\Phi_1(n)$  und  $\Phi_2(n)$  bestimmen zu können, ist eine Umwandlung der Modulo-Operation entsprechend Gl. (3.24) notwendig. Nach Einsetzen von Gl. (3.24) in Gl. (4.6) und Gl. (4.7), sowie unter Beachtung von Gl. (4.8) und Gl. (4.9), resultiert für die Differenz

$$\Phi_1(n) - \Phi_2(n) = \frac{2^W}{\pi} \cdot \Theta(n) + \frac{2^W}{2\pi} \cdot \varepsilon_{\Theta}(n) - 2^W \cdot \varepsilon_1(n) \quad (4.13)$$

und für die Summe

$$\Phi_1(n) + \Phi_2(n) = \frac{2}{2^B} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + \frac{2^W}{\pi} \cdot \phi(n) + \quad (4.14)$$

$$\frac{2^W}{2\pi} \cdot \varepsilon_{\phi}(n) - 2^W \cdot \varepsilon_2(n) ,$$

mit

$$\varepsilon_{\Theta}(n) = \varepsilon_{A_1}(n) - \varepsilon_{A_2}(n) , \quad \varepsilon_{\phi}(n) = \varepsilon_{A_1}(n) + \varepsilon_{A_2}(n) \quad (4.15)$$

und

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(n) &= \left[ \frac{1}{2^L} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + \frac{1}{2^A} \cdot P_1(n) \right] - \\
&\quad \left[ \frac{1}{2^L} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + \frac{1}{2^A} \cdot P_2(n) \right], \\
\varepsilon_2(n) &= \left[ \frac{1}{2^L} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + \frac{1}{2^A} \cdot P_1(n) \right] + \\
&\quad \left[ \frac{1}{2^L} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + \frac{1}{2^A} \cdot P_2(n) \right].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Die Folgen  $\varepsilon_\phi(n)$  und  $\varepsilon_\Theta(n)$  beschreiben hierbei den Quantisierungsfehler der stochastischen Phasenfolgen  $\phi(n)$  und  $\Theta(n)$  und die Folgen  $\varepsilon_1(n)$  und  $\varepsilon_2(n)$  den Effekt der Modulo-Operation. Für die Ausgangsfolge  $s_q(n)$  der in Bild 4.1 dargestellten Schaltungsstruktur erhält man schließlich aus Gl. (4.12)

$$\begin{aligned}
s_q(n) &= \cos \left[ \Theta(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\Theta(n) - \pi \cdot \varepsilon_1(n) \right] \cdot \\
&\quad \cos \left\{ \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + \phi(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\phi(n) - \pi \cdot \varepsilon_2(n) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot [\varepsilon_{D_1}(n) + \varepsilon_{D_2}(n)].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Ein Vergleich der quantisierten Ausgangsfolge nach Gl. (4.17) mit der nichtquantisierten Ausgangsfolge gemäß Gl. (4.2) zeigt, daß nicht nur die Quantisierung des Phasenakkumulators und der Amplitudenwerte der Funktionstabelle des numerisch gesteuerten Oszillators das Ausgangssignal beeinflussen, sondern auch die Quantisierung der Phasenmodulationsfolgen. Dies läßt eine Verschlechterung des erzielbaren störfreien Dynamikbereiches erwarten (vgl. Abschnitt 4.4.3).

Im Unterschied zur Betrachtung in Abschnitt 3.5 entspricht die Eingangsfolge  $s_{DA}(n)$  des Digital/Analog-Umsetzers nun einer Zufallsfolge eines stationären Prozesses. Das Zufallssignal  $s_K(t)$  am Ausgang des Digital/Analog-Umsetzers läßt sich wiederum über die Faltungssumme nach Gl. (3.31) berechnen. Damit folgt für die Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignales

$$r_{KK}(\tau) = h_0(\tau) * h_0^*(-\tau) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{ss}(k) \cdot \delta(\tau - kT), \quad (4.18)$$

wobei  $r_{ss}(k)$  die zugehörige Autokorrelationsfolge der Zufallsfolge  $s_{DA}(n)$  und das Symbol  $*$  die Faltungsoperation beschreibt. Ist die Eingangsfolge mittelwertfrei, so erhält man mit Hilfe der Fouriertransformation für das Leistungsdichtespektrum am Ausgang des Digital/Analog-Umsetzers

$$S_{KK}(j\omega) = S_{ss}(e^{j\omega T}) \cdot |H_0(j\omega)|^2, \quad (4.19)$$

mit  $S_{ss}(e^{j\omega T})$  als spektrale Leistungsdichte der Zufallsfolge  $s_{DA}(n)$ . Aus Gl. (4.18) ist unmittelbar zu erkennen, daß das Halteglied die Autokorrelierte der Eingangsfolge verändert. In Analogie zu Gl. (3.38) folgt schließlich für das Leistungsdichtespektrum am Ausgang des analogen Rekonstruktionsfilters

$$S_{RR}(j\omega) = S_{ss}(e^{j\omega T}) \cdot |H_0(j\omega) \cdot H_R(j\omega)|^2, \quad (4.20)$$

wobei  $H_R(j\omega)$  die Übertragungsfunktion des Rekonstruktionsfilters beschreibt.

Als Ergebnis der bisherigen Betrachtungen läßt sich festhalten, daß die auf der Grundlage der eingeführten Definition nach Gl. (4.1) entwickelte neuartige Schaltungsstruktur gemäß Bild 4.1, die Synthese reeller zeitdiskreter Bandpaßprozesse ohne Multiplikation erlaubt. Voraussetzung ist allerdings ein geeigneter Synthesalgorithmus zur Berechnung der stochastischen Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$ .

## 4.3 Das numerische Syntheseverfahren

### 4.3.1 Einführung

Eine Schlüsselkomponente des digitalen Rauschgenerators ist der numerische Synthesalgorithmus zur Berechnung der stochastischen Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$ , entsprechend dem gewünschten Leistungsdichtespektrum. Aufgrund der geforderten Einsatzmöglichkeit des digitalen Rauschgenerators bis in den Hochfrequenzbereich ist jedoch derzeit eine Werteberechnung in Realzeit aus technischen Gründen ausgeschlossen (vgl. Abschnitt 2.1). Somit ist eine Vorabberechnung der Phasenfolgen notwendig.

Die praktische Realisierung des digitalen Systems hat einen großen Einfluß auf die berechnete Wertefolge, zum einen durch die endliche Darstellungsgenauigkeit von Signalwerten und zum anderen durch die begrenzte Speicherkapazität. Letzteres führt insbesondere bei einer Vorabberechnung von Wertefolgen dazu, daß zur Erzeugung eines kontinuierlichen Datenstromes als Ausgangsfolge ein zyklisches Auslesen der berechneten Signalwerte notwendig wird. Infolgedessen erhält man stets ein periodisches zeitdiskretes Signal als Ausgangsfolge, dessen maximale Periodenlänge  $N$  von der Größe des jeweiligen Datenspeichers abhängt.

Im Hinblick auf die gestellte Aufgabe der Synthese schmalbandiger Rauschsignale bedeutet dies, daß ein zyklisches Auslesen der stochastischen Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  unvermeidbar zu einem periodischen zeitdiskreten Bandpaßprozeß führt. Aufgrund dieser Tatsache erfolgt daher in Abschnitt 4.3.2 zunächst eine Beschreibung periodischer zeitdiskreter stochastischer Signale. Aufbauend auf den hieraus gewonnenen Erkenntnissen wird anschließend in Abschnitt 4.3.3 ein numerischer Synthesalgorithmus zur Berechnung der stochastischen Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  abgeleitet, wobei die Realisierbarkeit mittels eines digitalen Signalprozessors eine wichtige Randbedingung darstellt.

### 1.3.2 Beschreibung periodischer zeitdiskreter stochastischer Signale

Für eine Reihe von stochastischen Signalen [Gard 90] stellt gerade die Periodizität eine wichtige Charakterisierung dar. Obwohl periodische Funktionen im allgemeinen streng determiniert, also für alle Zeiten genau bekannt sind, kann man sie als lokal stationäre Signale behandeln. Dies eröffnet die Möglichkeit periodische Zufallssignale durch periodische Zufallsprozesse zu beschreiben, welche in der englischsprachigen Literatur als *cyclostationary processes* bezeichnet werden [Gard 90, Pap 91, The 92].

Ein zeitdiskreter Zufallsprozeß heißt im strengen Sinne periodisch mit der Periode  $N$ , wenn die statistischen Eigenschaften der Zufallsgröße  $s(n)$  mit denen der Zufallsgröße  $s(n + mN)$  für beliebige ganzzahlige Werte von  $n$  und  $m$  identisch sind. Dies bedeutet, daß die Verbundverteilungsfunktion dieses Prozesses unabhängig gegenüber einer Verschiebung um ganzzahlige Vielfache der Periode  $N$  sein muß [Pap 91, The 92]:

$$F_s(s_0, \dots, s_L; n_0 + m \cdot N, \dots, n_L + m \cdot N) = F_s(s_0, \dots, s_L; n_0, \dots, n_L) , \quad (4.21)$$

für alle  $m, L \in \mathbb{I}$ . Neben der Definition der Periodizität im strengen Sinne gibt es noch den Begriff der Periodizität im weiten Sinne. Periodisch im weiten Sinne sind solche Zufallsprozesse, bei denen nur der Mittelwert und die Autokorrelationsfolge periodisch mit der Periode  $N$  sind. Zufallsprozesse die entsprechend der Definition im strengen Sinne periodisch sind, sind dies selbstverständlich auch im weiten Sinne. Bei den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten periodischen zeitdiskreten stochastischen Signalen wird stets Periodizität im weiten Sinne vorausgesetzt.

Im allgemeinen besitzen reelle zeitdiskrete Zufallsprozesse eine gerade, reelle Autokorrelationsfolge. Demgegenüber ist jedoch die Autokorrelationsfolge eines periodischen zeitdiskreten Zufallsprozesses eine periodische Folge mit der gleichen Periode wie die des zugrunde liegenden Prozesses [Gard 90, Bac 92, The 92]. Demzufolge sei die periodische Autokorrelationsfolge eines stationären, periodischen zeitdiskreten Zufallsprozesses der Periode  $N$  definiert als

$$r_{ss}(k) = r_{ss}(k + m \cdot N) = E\{s^*(n) \cdot s(n + k + m \cdot N)\}, \quad \forall m \in \mathbb{I}. \quad (4.22)$$

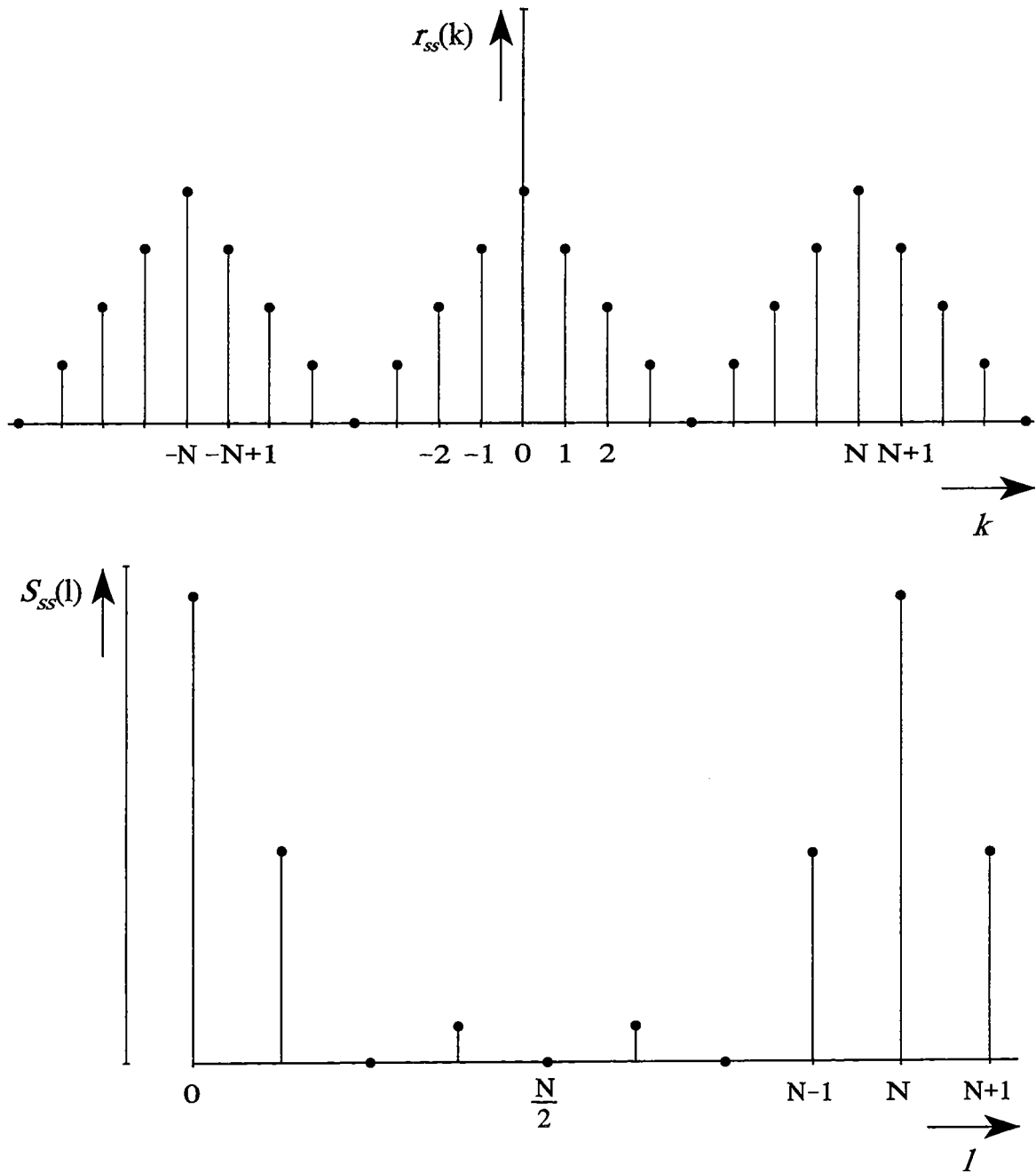
Die Fourieranalyse der periodischen Autokorrelationsfolge mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation ergibt die spektrale Leistungsdichte. Man erhält

$$S_{ss}(l) = \sum_{k=0}^{N-1} r_{ss}(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot l}, \quad l = 0, \dots, N-1. \quad (4.23)$$

Grundsätzlich resultiert aus der diskreten Fouriertransformation einer periodischen zeitdiskreten Folge ein periodisches frequenzdiskretes Spektrum. Dementsprechend besteht die spektrale Leistungsdichte aus einer Folge von gewichteten Delta-Impulsen, die bei Harmonischen der Grundfrequenz auftreten, weshalb ein solches Spektrum auch als Linienspektrum bezeichnet wird (Bild 4.2). Die Grundfrequenz, in der Literatur auch als spektrale Auflösung bezeichnet [Kam 89, Pro 92], legt den Abstand zwischen benachbarten Spektrallinien fest und läßt sich zu

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot T}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (4.24)$$

bestimmen. Bei digitalen Systemen ist demzufolge die spektrale Auflösung sowohl von der Systemtaktate  $f_{clk} = 1 / T$  als auch von der Periodenlänge  $N$  der stochastischen Ausgangsfolge abhängig.



**Bild 4.2** *Beispiel einer periodischen Autokorrelationsfolge  $r_{ss}(k)$  mit dem zugehörigen periodischen frequenzdiskreten Leistungsdichtespektrum  $S_{ss}(l)$*

Die zeitdiskrete Karhunen-Loève-Transformation [Pap 91, The 92] führt zu einer weiteren Möglichkeit der Beschreibung eines periodischen zeitdiskreten Zufallsprozesses. Im allgemeinen Fall ermöglicht die diskrete Karhunen-Loève-Transformation die Darstellung eines beliebigen zeitdiskreten Zufallsprozesses  $s(n)$  durch eine Zufallsfolge endlicher Länge unter Verwendung eines Satzes von orthonormalen Basisfolgen  $g_\nu(n)$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , gemäß

$$s(n) = \sum_{\nu=0}^{N-1} c_\nu \cdot g_\nu(n), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (4.25)$$

wobei die Koeffizienten  $c_\nu$  komplexe Zufallsvariablen darstellen und  $N$  der Länge der Folge des Zufallsprozesses entspricht. Wählt man die orthonormalen Basisfolgen derart, daß sie mit den Eigenvektoren der Autokorrelationsmatrix des zeitdiskreten Zufallsprozesses übereinstimmen, so läßt sich zeigen, daß in diesem Fall die Koeffizienten orthogonal im statistischen Sinne bzw. unkorreliert sind [The 92]. Es gilt

$$\mathbb{E}\{c_\nu \cdot c_\mu^*\} = \lambda_\nu \cdot \delta_K(\mu - \nu), \quad \nu, \mu \in \mathbb{N}_0, \quad (4.26)$$

mit  $\lambda_\nu$  als den Eigenwerten der Autokorrelationsmatrix und dem Kronecker-Symbol  $\delta_K(\bullet)$ .

Von besonderem Interesse ist im Rahmen dieser Arbeit die diskrete Karhunen-Loève-Transformation periodischer zeitdiskreter Zufallsprozesse, weil in diesem Fall die Eigenvektoren der Autokorrelationsmatrix den Basisfolgen der diskreten Fouriertransformation und die zugehörigen Eigenwerte der spektralen Leistungsdichte nach Gl. (4.23) entsprechen [Pap 91, The 92]. Aufgrund dieses Sachverhaltes folgt mit Gl. (4.25)

$$s(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} c_\nu \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot \nu \cdot n}, \quad (4.27)$$

sowie unter Beachtung von Gl. (4.26)

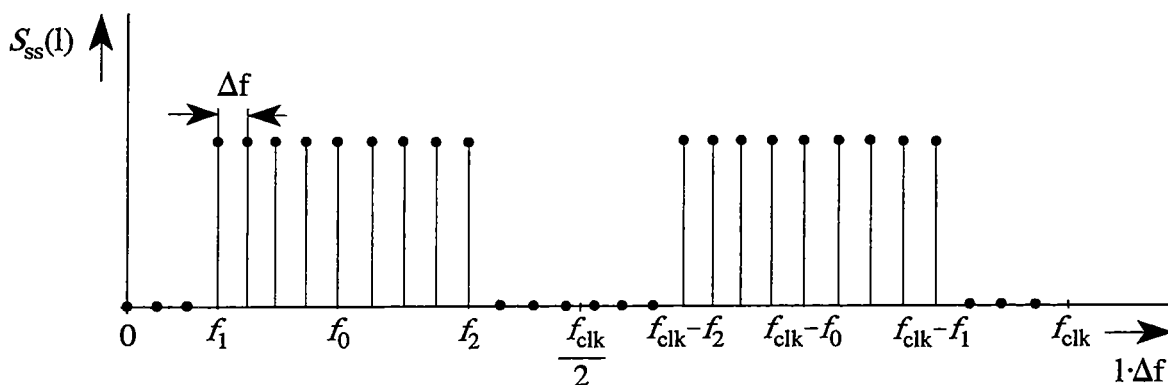
$$\mathbb{E}\{c_\nu \cdot c_\mu^*\} = S_{ss}(\nu) \cdot \delta_K(\mu - \nu). \quad (4.28)$$

Hierbei beschreibt  $N$  die Periodenlänge von  $s(n)$ . Somit läßt sich jeder periodische zeitdiskrete Zufallsprozeß als eine endliche Summe gewichteter komplexer Exponenti-

abfolgen ausdrücken. Dieses Ergebnis stellt eine wichtige Grundlage für den im nächsten Abschnitt diskutierten Synthesealgorithmus dar.

### 1.3.3 Der numerische Synthesealgorithmus

In diesem Abschnitt wird ein Synthesealgorithmus vorgestellt, der sich mit einem Mikroprozessorsystem leicht bearbeiten läßt und die numerische Berechnung der stochastischen Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  entsprechend einem vorgegebenem Leistungsdichtespektrum ermöglicht. Ausgangspunkt der Überlegungen bildet der in Abschnitt 4.3.1 beschriebene Sachverhalt, daß bei einer Vorabberechnung der Phasen, aufgrund der begrenzten Speicherkapazität eines digitalen Systems, zur Erzeugung eines kontinuierlichen Datenstromes am Ausgang stets ein zyklisches Auslesen der Phasenfolgen notwendig ist. Demzufolge sind die Phasen als periodische Zufallsprozesse aufzufassen, so daß sich nach Gl. (4.3) ein reeller, periodischer zeitdiskreter Bandpaßprozeß ergibt. Dieser besitzt — wie in Abschnitt 4.3.2 gezeigt — eine periodische Autokorrelationsfolge und ein periodisches Leistungsdichtespektrum in Form eines Linienspektrums. In Bild 4.2 ist exemplarisch eine Periode eines möglichen Leistungsdichtespektrums des reellen, periodischen zeitdiskreten Bandpaßprozesses dargestellt.



**Bild 4.3** *Eine Periode eines möglichen Leistungsdichtespektrums des reellen, periodischen zeitdiskreten Bandpaßprozesses*

Umgekehrt bedeutet dies, daß aufgrund der notwendigen Periodizität des Bandpaßprozesses das vorgegebene Leistungsdichtespektrum ein Linienspektrum sein muß.



Somit stellt sich die Frage, wie man aus einem vorgegebenen periodischen Linienspektrum den zugehörigen periodischen zeitdiskreten Zufallsprozeß gewinnen kann.

Die Ausführungen im vorhergehenden Abschnitt zeigen, daß grundsätzlich jeder periodische zeitdiskrete Zufallsprozeß als eine endliche Summe gewichteter komplexer, harmonischer Exponentialfolgen aufgefaßt werden kann. Ausgehend von Gl. (4.27) sei daher ein beliebiger periodischer zeitdiskreter Zufallsprozeß  $s(n)$  der Periode  $N$  definiert als

$$s(n) = \sum_{v=0}^{N-1} A_v \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot n} . \quad (4.29)$$

Hierbei stellen die Amplitudengewichtungen  $A_v$ , jeweils zeitunabhängige komplexe Zufallsvariablen der Form

$$A_v = |A_v| \cdot e^{j\Phi_v} , \quad |A_v| \in \mathbb{R}^+ , \quad \Phi_v \in \mathbb{R} , \quad (4.30)$$

dar, wobei der Betrag und die Phase im allgemeinen zufällig und unabhängig von  $s(n)$  sind. In Anlehnung an den in der englischsprachigen Literatur verwendeten Begriff einer *harmonic-series representation* [Gard 75], sei im Rahmen dieser Arbeit die Darstellungsform nach Gl. (4.29) als harmonischer Prozeß bezeichnet.

Weil im Rahmen dieser Arbeit nur reelle bandbegrenzte Rauschsignale von Interesse sind, beschränkt sich die weitere Diskussion auf Leistungsdichtespektren, die eine gerade, reelle und nichtnegative Funktion der Frequenz sind, nicht die Frequenz  $f = 0$  enthalten und deren Bandbreite  $f_B = f_2 - f_1$  wesentlich kleiner als die Trägerfrequenz  $f_0$  sei (vgl. Bild 4.3). Eine weitere Einschränkung ergibt sich hinsichtlich der oberen Grenzfrequenz  $f_2$ . Aufgrund des Nyquist-Theorems kann ein digitales System bei Verwendung eines Tiefpaßfilters an seinem Ausgang nur Signalfrequenzen erzeugen, die maximal seiner halben Taktrate entsprechen. Somit erhält man als Randbedingungen

$$f_1 > 0 , \quad f_2 < \frac{f_{clk}}{2} , \quad f_B = f_2 - f_1 \ll f_0 . \quad (4.31)$$

Für den harmonischen Prozeß  $s(n)$  nach Gl. (4.29) resultiert daraus

$$\begin{aligned}
s(n) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=m_1}^{m_2} A_v \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot n} \right\} \\
&= \sum_{v=m_1}^{m_2} |A_v| \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot n + \Phi_v \right), \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

wobei sich die Summationsgrenzen  $m_1$  und  $m_2$  anhand der gewünschten unteren und oberen Grenzfrequenz  $f_1$  bzw.  $f_2$  zu

$$m_1 = \left\lfloor \frac{f_1}{f_{clk}} \cdot N + 0,5 \right\rfloor, \quad m_2 = \left\lfloor \frac{f_2}{f_{clk}} \cdot N + 0,5 \right\rfloor \tag{4.33}$$

bestimmen lassen. Hierbei ist eine Normierung der Summationsgrenzen auf die jeweilige Systemtakttrate notwendig, da infolge der Periodizität der stochastischen Phasenfolgen das Leistungsdichtespektrum nur Frequenzanteile enthalten kann, die einem ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz  $\Delta f$  entsprechen (vgl. Gl. (4.24)). Die dadurch entstehende Abweichung von der jeweils vorgegebenen Grenzfrequenz beträgt maximal  $\pm \Delta f / 2$ .

Nach Einsetzen von Gl. (4.32) in Gl. (4.22) und unter Berücksichtigung von Gl. (4.23) ergibt sich die spektrale Leistungsdichte des reellen harmonischen Prozesses zu

$$S_{ss}(l) = \frac{N}{4} \cdot \sum_{v=0}^{N-1} \mathbb{E} \{ |A_v|^2 \} \cdot [\delta_K(l-v) + \delta_K(l+v-N)]. \tag{4.34}$$

Anhand von Gl. (4.34) wird deutlich, daß die Gewichte der einzelnen Spektrallinien des Leistungsdichtespektrums dem quadratischen Mittelwert der jeweiligen Beträge der komplexen Zufallsvariablen  $A_v$  entsprechen. Die Grundlage bei der Berechnung der spektralen Leistungsdichte bildete allerdings ein stationärer harmonischer Prozeß. Nach [The 92] ist eine notwendige Bedingung für die Stationarität des harmonischen Prozesses  $s(n)$  die Orthogonalität der komplexen Zufallsvariablen  $A_v$  im statistischen Sinne. Die komplexen Zufallsvariablen müssen demnach der Bedingung

$$\mathbb{E} \{ A_v \cdot A_\mu^* \} = 0, \quad \mu \neq v, \quad v, \mu \in \mathbb{N}_0, \tag{4.35}$$

genügen. Um diese Forderung erfüllen zu können, müssen Betrag und Phase der komplexen Zufallsvariablen  $A_v$  zueinander unkorreliert sein und die Verteilungsdichte der Phase  $\Phi_v$  einer Gleichverteilung im Intervall  $[-\pi, \pi]$  entsprechen [Gard 90, Pap 91, The 92]. Von besonderem Interesse für die weitere Betrachtung ist hierbei die Tatsache, daß die Verteilungsdichtefunktion des Betrages  $|A_v|$  nahezu beliebig sein kann.

Gleichverteilte Zufallsprozesse kann man synthetisch durch geeignete Algorithmen erzeugen. Grundsätzlich entstehen dabei sogenannte Pseudozufallsfolgen, die durch ihre stets vorhandene Periodizität von einem wirklichen stationären Zufallsprozeß abweichen. Allerdings sind die Periodenlängen in der Regel außerordentlich groß, so daß von einer hinreichend guten Approximation eines stationären Zufallsprozesses ausgegangen werden kann [Jam 90, L'Ecu 90, Kam 92]. Die Verteilungsdichtefunktion der Phasen  $\Phi_v$  sei daher wie folgt definiert:

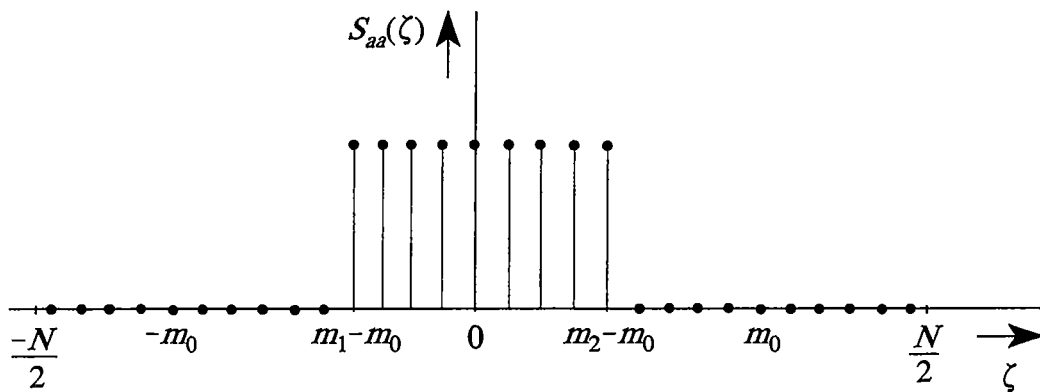
$$p_{\Phi_v}(\varphi_v) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} , & -\pi \leq \varphi_v \leq \pi \\ 0 , & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.36)$$

Wie bereits erwähnt, kann die Verteilungsdichtefunktion des Betrages nahezu beliebig gewählt werden. Im Hinblick auf die gestellte Aufgabe ist es daher zweckmäßig, den Betrag der komplexen Zufallsvariablen  $A_v$  — in Anlehnung an Gl. (2.13) — entsprechend der Gewichtung der Spektrallinien des Leistungsdichtespektrums  $S_{aa}(\zeta)$  des zum reellen bandbegrenzten harmonischen Prozeß  $s(n)$  äquivalenten Basisbandprozesses zu wählen. In Bild 4.4 ist exemplarisch das vorgegebene Leistungsdichtespektrum des zum reellen Bandpaßprozeß gemäß Bild 4.3 zugehörigen äquivalenten Basisbandprozesses dargestellt, welches in Form eines periodischen Linienspektrums gegeben sei.

Aufgrund der vorhergehenden Überlegungen sei somit der Betrag der komplexen Zufallsvariablen  $A_v$  zu

$$|A_v| = \sqrt{S_{aa}(v)/N} , \quad v = \zeta + m_0 , \quad |\zeta| < m_0 , \quad \zeta \in \mathbb{I} \quad (4.37)$$

definiert, wobei  $S_{aa}(\zeta)$  den Betrag der Spektrallinien der vorgegebenen Leistungsdichte des äquivalenten Basisbandprozesses beschreibt. Aus Gl. (4.37) ist unmittelbar



**Bild 4.4** Exemplarisch vorgegebenes frequenzdiskretes Leistungsdichtespektrum des äquivalenten Basisbandprozesses

zu erkennen, daß die Beträge deterministisch sind und es somit zulässig ist, die Beträge und die Phasen der komplexen Zufallsvariablen  $A_\nu$  als zueinander unkorreliert anzusehen.

Betrachtet man wieder die Orthogonalitätsbedingung wird deutlich, daß mit Gl. (4.36) und Gl. (4.37) die Bedingungen für die Stationarität erfüllt sind, da gilt:

$$E\{A_\nu \cdot A_\mu^*\} = \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot S_{aa}(\nu) , & \mu = \nu \\ 0 & , \quad \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4.38)$$

Wegen der im allgemeinen unendlichen Anzahl von Musterfunktionen der Zufallsvariablen  $A_\nu$  ist es in der Praxis mit großem Aufwand verbunden einen reellen harmonischen Prozeß gemäß Gl. (4.32) nachzubilden. Bei stationären Prozessen geht man deshalb zumeist von der Ergodenhypothese aus, d.h. man setzt Ergodizität voraus. Dies ist für den hier betrachteten reellen harmonischen Prozeß ebenfalls zulässig, da nach [Por 94] alle seine Momente ergodisch sind. Demzufolge reicht es aus, eine einzige Musterfolge des den periodischen Zufallsprozeß beschreibenden harmonischen Prozesses zu erzeugen. Aufgrund der Ergodizität haben alle Musterfolgen des reellen harmonischen Prozesses im zeitlichen Mittel gleiche statistische Eigenschaften.

Aufgrund dieses Sachverhaltes kann Gl. (4.32) zu

$$s(n) = \sum_{v=m_1}^{m_2} |a_v| \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot n + \phi_v\right) \quad (4.39)$$

vereinfacht werden, wobei die Beträge  $|a_v|$  und die Phasen  $\phi_v$  die Musterfolge der komplexen Zufallsvariablen  $A_v$  darstellen. Die daraus resultierende reelle harmonische Zufallsfolge  $s(n)$  entspricht somit einer Musterfolge des zeitdiskreten reellen harmonischen Prozesses  $s(n)$ . Aufgrund der Orthogonalitätsbedingung müssen hierbei die Phasen  $\phi_v$  gleichverteilt im Intervall  $[-\pi, \pi]$  sein.

Zur Bestimmung der spektralen Leistungsdichte kann nun — wegen der Ergodizität — der Erwartungswert in der ursprünglichen Definition der Autokorrelationsfolge nach Gl. (4.22) durch den zeitlichen Mittelwert ersetzt werden. Demnach sei die Autokorrelationsfolge einer periodischen Zufallsfolge  $s(n) \in \mathbb{C}$  aus einem ergodischen, periodischen Zufallsprozeß der Periode  $N$  definiert als

$$r_{ss}(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s^*(n) \cdot s(n+k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (4.40)$$

Nach Einsetzen von Gl. (4.39) in Gl. (4.40) folgt unter Berücksichtigung von Gl. (4.37) und Gl. (4.23) die spektrale Leistungsdichte der reellen harmonischen Zufallsfolge  $s(n)$  zu

$$\begin{aligned} S_{ss}(l) &= N \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{4} \cdot [\delta_K(l-v) + \delta_K(l+v-N)] \\ &= \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{S_{aa}(v)}{4} \cdot [\delta_K(l-v) + \delta_K(l+v-N)] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Somit kann jedes periodische bandbegrenzte Leistungsdichtespektrum  $S_{ss}(l)$ , welches in Form einer äquivalenten Basisbanddarstellung gemäß Bild 4.4 gegeben sei, durch eine reelle harmonische Zufallsfolge entsprechend Gl. (4.39) im Zeitbereich beschrieben werden. Ein Vergleich von Gl. (4.41) mit der reellen harmonischen Zufallsfolge nach Gl. (4.39) zeigt, daß in Analogie zu Gl. (4.34) die Gewichte der einzelnen

Spektrallinien die Betragsquadrate der komplexen Musterfolge  $a_v$  sind. Infolge der Orthogonalitätsbedingung ist hierbei als wichtige Randbedingung die Gleichverteilung der Phasen  $\phi_v$  im Intervall  $[-\pi, \pi]$  zu beachten.

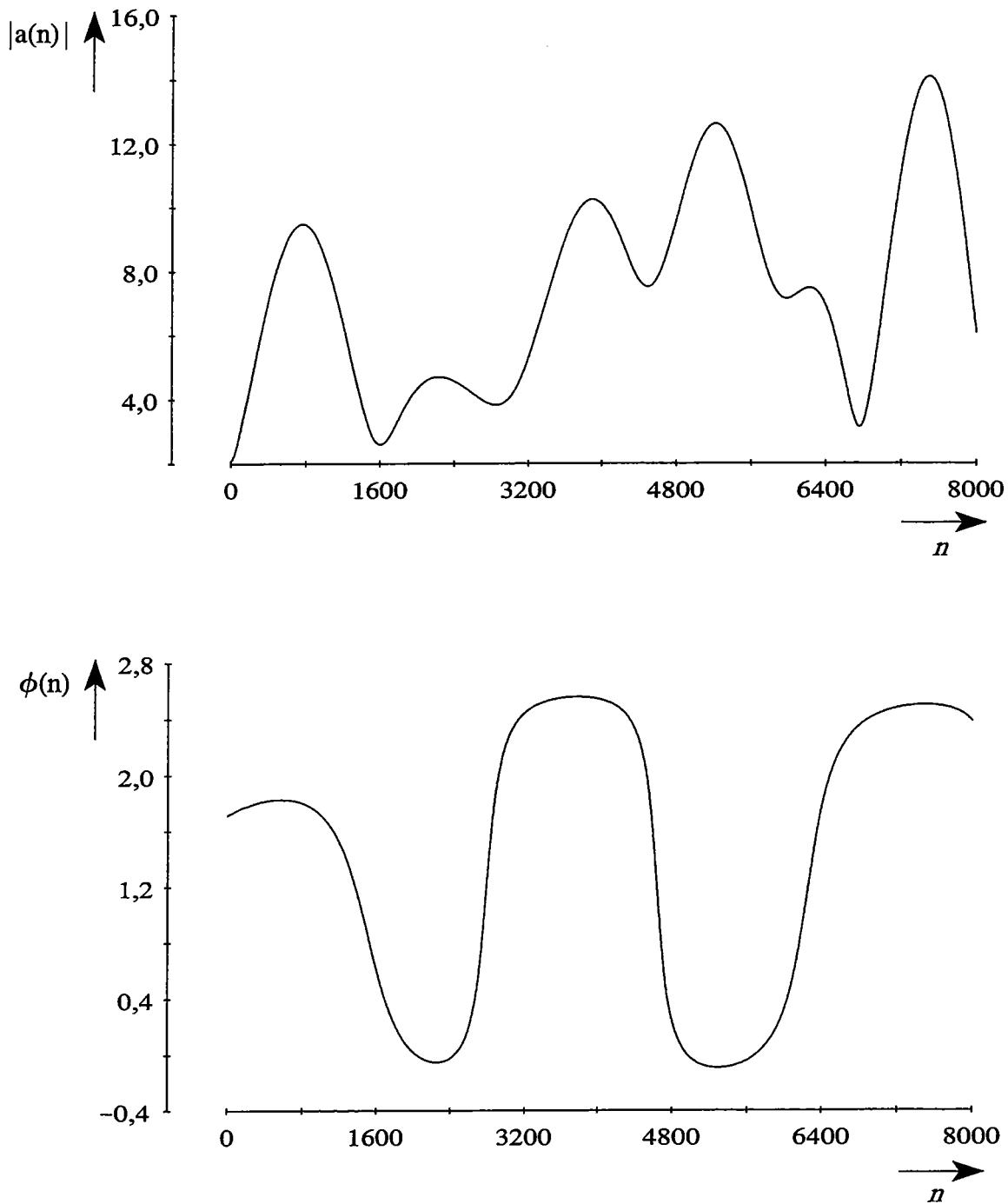
Auf der Grundlage der bisherigen Überlegungen können nun die Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  zur Phasenmodulation der beiden numerisch gesteuerten Oszillatoren, die jeweils Musterfolgen der stochastischen Modulationsfolgen  $P_1(n)$  bzw.  $P_2(n)$  darstellen, anhand der nach Gl. (4.39) berechneten reellen harmonischen Zufallsfolge bestimmt werden. Wie Abschnitt 2.3 zeigt, läßt sich ein beliebiger Bandpaßprozeß als das Ergebnis einer komplexen Modulation eines komplexen Trägers interpretieren. Umgekehrt bedeutet dies, daß aus einem gegebenen Bandpaßprozeß durch komplexe Demodulation der Betrag und die Phase der komplexen stochastischen Einhüllenden zurückgewonnen werden können. Voraussetzung hierzu ist allerdings zum einen die Kenntnis der jeweiligen Trägerfrequenz  $f_0$  (vgl. Gl. (2.12)) und zum anderen die Bandbegrenzung der komplexen stochastischen Einhüllenden entsprechend Gl. (2.13). In dem hier betrachteten Fall sind diese Bedingungen aufgrund der vorgegebenen spektralen Leistungsdichte und der Festlegungen gemäß Gl. (4.31) stets erfüllt. Somit kann in Analogie zu Gl. (2.14) die nach Gl. (4.39) berechnete reelle harmonische Zufallsfolge  $s(n)$  als Realteil der zugehörigen analytischen Zufallsfolge aufgefaßt werden. Durch komplexe Demodulation der analytischen Zufallsfolge entsprechend

$$a(n) = \sum_{v=m_1}^{m_2} a_v \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot n} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot n} \quad (4.42)$$

läßt sich daraus die Betrags- und Phasenfolge der komplexen stochastischen Einhüllenden bei gegebener Trägerfrequenz (Mittelfrequenz)  $f_0$  zu

$$|a(n)| = \sqrt{\sum_{v=m_1}^{m_2} \sum_{\mu=m_1}^{m_2} |a_v| \cdot |a_\mu| \cdot \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot (v - \mu) \cdot n + \phi_v - \phi_\mu \right]},$$

$$\phi(n) = \arctan \left\{ \frac{\sum_{v=m_1}^{m_2} |a_v| \cdot \sin \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot (v - m_0) \cdot n + \phi_v \right]}{\sum_{v=m_1}^{m_2} |a_v| \cdot \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot (v - m_0) \cdot n + \phi_v \right]} \right\} + k \cdot \pi, \quad (4.43)$$



**Bild 4.5** Ausschnitt eines Amplituden- und Phasenverlaufes der komplexen stochastischen Einhüllenden  $a(n)$  für ein rechteckförmiges Leistungsdichtespektrum  $S_{aa}(\zeta)$  der Bandbreite  $f_B = 10$  kHz;  $f_{clk} = 50$  MHz;  $f_0 = 11,98349$  MHz;

bestimmen, wobei  $k \in \{-1, 0, 1\}$  vom jeweiligen Quadranten des Argumentes der arctan-Funktion abhängig ist, so daß die Phasenfolge  $\phi(n)$  im Intervall  $[-\pi, \pi)$  definiert sei. Bild 4.5 zeigt exemplarisch jeweils einen Ausschnitt eines typischen Amplituden- und Phasenverlaufes der komplexen Einhüllenden  $a(n)$  gemäß Gl. (4.43).

Unter Berücksichtigung der Ergodizität des reellen harmonischen Prozesses ergibt sich durch Umkehrung der nach Gl. (4.1) eingeführten Definition des Betrages der komplexen stochastischen Einhüllenden die Musterfolge der äquivalenten stochastischen Phasenfolge  $\Theta(n)$  zu

$$\Theta(n) = \arccos \left[ \frac{|a(n)|}{a_{norm}} \right], \quad a_{norm} \in \mathbb{R} \quad (4.44)$$

und schließlich nach Einsetzen von Gl. (4.44) in Gl. (4.4) die beiden Musterfolgen der stochastischen Phasenfolgen  $\Psi_1(n)$  und  $\Psi_2(n)$  entsprechend

$$\Psi_1(n) = \phi(n) + \arccos \left[ \frac{|a(n)|}{a_{norm}} \right] \quad (4.45)$$

und

$$\Psi_2(n) = \phi(n) - \arccos \left[ \frac{|a(n)|}{a_{norm}} \right]. \quad (4.46)$$

Die Einführung des Normierungsfaktors  $a_{norm}$  ist hier notwendig, da der Betrag der komplexen Einhüllenden im allgemeinen Fall beliebige positive Werte annehmen kann (vgl. Bild 4.5). Entsprechend der Definition des Betrages der komplexen stochastischen Einhüllenden gemäß Gl. (4.1) ist jedoch die stochastische Phasenfolge  $\Theta(n)$  stets reellwertig. Die arccos-Funktion liefert aber nur für den Fall reelle Werte, wenn ihr Argument dem Intervall  $[-1, 1]$  entstammt [Bro 91]. Demnach muß für das Argument der arccos-Funktion

$$\frac{1}{a_{norm}} \cdot \max_n |a(n)| \leq 1 \quad (4.47)$$

gelten. Nach Einsetzen von Gl. (4.43) in Gl. (4.47) und anschließendem Quadrieren folgt daraus



$$a_{norm}^2 \geq \max_n \sum_{\nu=m_1}^{m_2} \sum_{\mu=m_1}^{m_2} |a_\nu| \cdot |a_\mu| \cdot \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot (\nu - \mu) \cdot n + \phi_\nu - \phi_\mu \right]. \quad (4.48)$$

Im Fall der Gültigkeit des Gleichheitszeichens stellt dies eine untere Schranke für den Normierungsfaktor  $a_{norm}$  dar. Wie Kapitel 6 noch zeigen wird, beeinflusst der Normierungsfaktor die statistischen Eigenschaften und den störfreien Dynamikbereich des synthetisierten Rauschsignales. Um die auftretenden Abweichungen zu minimieren, soll daher für den Normierungsfaktor gelten:

$$a_{norm} = \begin{cases} \max_n |a(n)|, & |a(n)| > 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.49)$$

Anhand der in den Abschnitten 3.4 und 4.2 beschriebenen digitalen Phasenmodulation mit einem numerisch gesteuerten Oszillator läßt sich erkennen, daß eine Quantisierung der stochastischen Phasenfolgen  $\psi_1(n)$  und  $\psi_2(n)$  auf  $A$  Binärstellen, entsprechend der Wortlänge des Phasenmodulationseinganges, nach Gl. (4.8) bzw. Gl. (4.9) notwendig ist. Wegen der  $2\pi$ -Periodizität des Phasenmodulationswortes  $P$  des numerisch gesteuerten Oszillators sind zuvor die Phasenwerte der stochastischen Phasenfolgen auf das Intervall  $[0, 2\pi)$  zu begrenzen, da aufgrund der Addition bzw. Subtraktion von  $\phi(n)$  und  $\Theta(n)$  — entsprechend Gl. (4.45) und Gl. (4.46) — der minimale Phasenwert im ungünstigsten Fall  $\psi_1(n) = -\pi$  bzw.  $\psi_2(n) = -3\pi/2$  entsprechen kann. Es gilt

$$\xi_1(n) = \psi_1(n) - \left\lfloor \frac{\psi_1(n)}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi \quad (4.50)$$

und

$$\xi_2(n) = \psi_2(n) - \left\lfloor \frac{\psi_2(n)}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi. \quad (4.51)$$

Nach Ersetzen von  $\Psi_1(n)$  und  $\Psi_2(n)$  in Gl. (4.8) und Gl. (4.9) durch  $\xi_1(n)$  und  $\xi_2(n)$  erhält man schließlich die den stochastischen Phasenmodulationsfolgen entsprechenden ganzzahligen Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  zur Phasenmodulation der beiden numerisch gesteuerten Oszillatoren zu

$$P_1(n) = \frac{2^A}{2\pi} \cdot \left[ \xi_1(n) + \varepsilon_{A_1}(n) \right] \quad (4.52)$$

und

$$P_2(n) = \frac{2^A}{2\pi} \cdot [\xi_2(n) + \varepsilon_{A_2}(n)]. \quad (4.53)$$

Die Ausführungen in diesem Abschnitt haben gezeigt, daß auf der Grundlage eines vorgegebenen bandbegrenzten periodischen, frequenzdiskreten Leistungsdichtespektrums, unter Beachtung der im Rahmen dieser Arbeit hinsichtlich der praktischen Realisierung durch ein digitales System gegebenen Randbedingungen – Periodenlänge  $N$  und Systemtakttrate  $f_{clk}$  – die numerische Berechnung der Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  zur Phasenmodulation der beiden numerisch gesteuerten Oszillatoren durch einen Synthesealgorithmus möglich ist.

## **4.4 Modellierung und Simulation des digitalen Rauschgenerators**

### **4.4.1 Allgemeines**

Für Untersuchungen zur Auslegung und Leistungsfähigkeit von digitalen Systemen werden diese häufig auf Digitalrechnern simuliert. Dabei ist die möglichst realitätsnahe Nachbildung der für die praktische Realisierung in Betracht kommenden Systemkomponenten von großer Bedeutung. Die Simulation digitaler Systeme eignet sich ferner zur Untersuchung der durch die endliche Wortlänge auftretenden Effekte bei der schaltungstechnischen Realisierung. Bevor in Abschnitt 4.4.3 die Eignung der entwickelten Schaltungsstruktur und des numerischen Synthesealgorithmus anhand von Simulationsergebnissen untersucht wird, befaßt sich der nachfolgende Abschnitt zunächst mit der Modellierung und der Auslegung der Systemkomponenten des digitalen Rauschgenerators.

### **4.4.2 Untersuchungen zur Auslegung der digitalen Systemkomponenten**

Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet die in Bild 4.6 dargestellte Gesamtstruktur des digitalen Rauschgenerators. Ein Signalprozessorsystem soll hierbei zur Berechnung des in Abschnitt 4.3 abgeleiteten numerischen Synthesealgorithmus dienen.

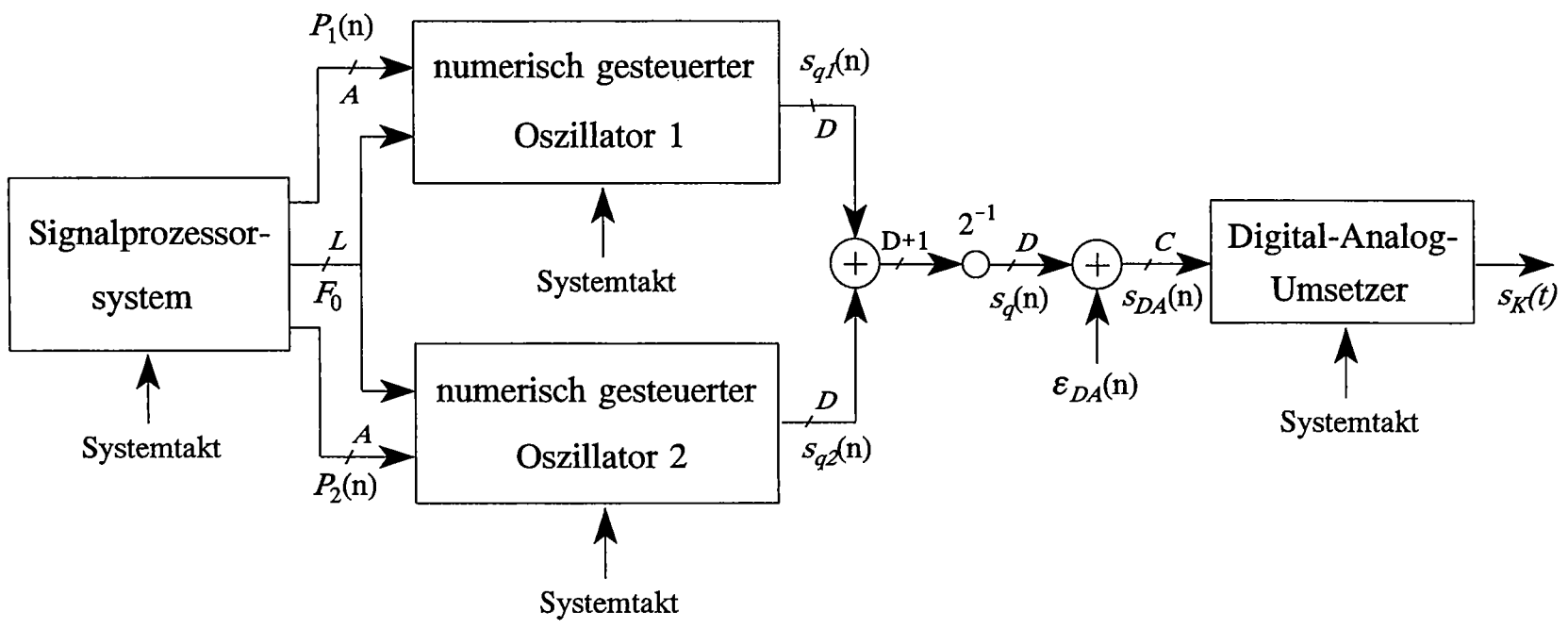


Bild 4.6

Blockdiagramm des digitalen Rauschgenerators

Moderne Signalprozessoren basieren zumeist auf Parallelmultiplizierer-Akkumulator-Strukturen mit Schieberegistern. Arithmetik-Logik-Einheit und Akkumulator weisen dabei eine größere — in vielen Fällen die doppelte — Wortlänge als die des Datenbusses auf, um die Multiplikationsergebnisse ohne Wortlängenreduktion weiterverarbeiten zu können. Eine diesbezügliche Simulation des Synthesealgorithmus auf einem Signalprozessor mit den exemplarisch ausgewählten Datenwortlängen 32 bit, 48 bit und 64 bit zeigt, daß bei Verwendung der Gleitkomma-Arithmetik und einer Datenwortlänge von 32 bit die dabei aufgrund der endlichen Wortlänge auftretenden Rundungsfehler gegenüber der Quantisierung der Modulationsfolgen  $\xi_1(n)$  und  $\xi_2(n)$  vernachlässigbar sind, da numerisch gesteuerte Oszillatoren in der Praxis zumeist eine Phasenmodulationswortlänge von  $A \leq 16$  bit aufweisen. Demzufolge wird im Rahmen dieser Arbeit ein Signalprozessor mit Gleitkomma-Arithmetik und einer Datenwortlänge von 32 bit, bei einer Akkumulatorwortlänge von 64 bit, zur Vorabberechnung der Modulationsfolgen  $\xi_1(n)$  und  $\xi_2(n)$  eingesetzt. Die entsprechende Simulation des numerischen Synthesealgorithmus auf einem Digitalrechner erfolgt mit einer Datenwortlänge von 64 bit.

Die Simulation der numerisch gesteuerten Oszillatoren beruht auf dem in Bild 3.9 dargestellten mathematischen Modell. Dieses gilt prinzipiell für alle numerisch gesteuerten Oszillatoren mit Funktionstabelle und Phasenmodulationseingang, deren innerer Aufbau einer Pipeline-Struktur entspricht (vgl. Kapitel 3). Die Basis zur Simulation des Digital/Analog-Umsetzers bildet das in Bild 3.10 abgebildete Modell, wobei ideale statische und dynamische Kenngrößen vorausgesetzt werden (vgl. Abschnitt 3.5.3). Weiterhin sei zunächst angenommen, daß der Digital/Analog-Umsetzer ein ideales Interpolationsfilter besitzt und keine zusätzliche Amplitudenquantisierung ( $C = D$ ) verursacht. Ferner ist es ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit zulässig, die Addition stets als ideal zu betrachten. Als Gütekriterium dient der aus der Ausgangsgröße des Digital/Analog-Umsetzers ermittelte störfreie Dynamikbereich. Die beiden numerisch gesteuerten Oszillatoren werden zunächst nicht moduliert, so daß am Ausgang des Digital/Analog-Umsetzers nur das Trägersignal vorliegt.

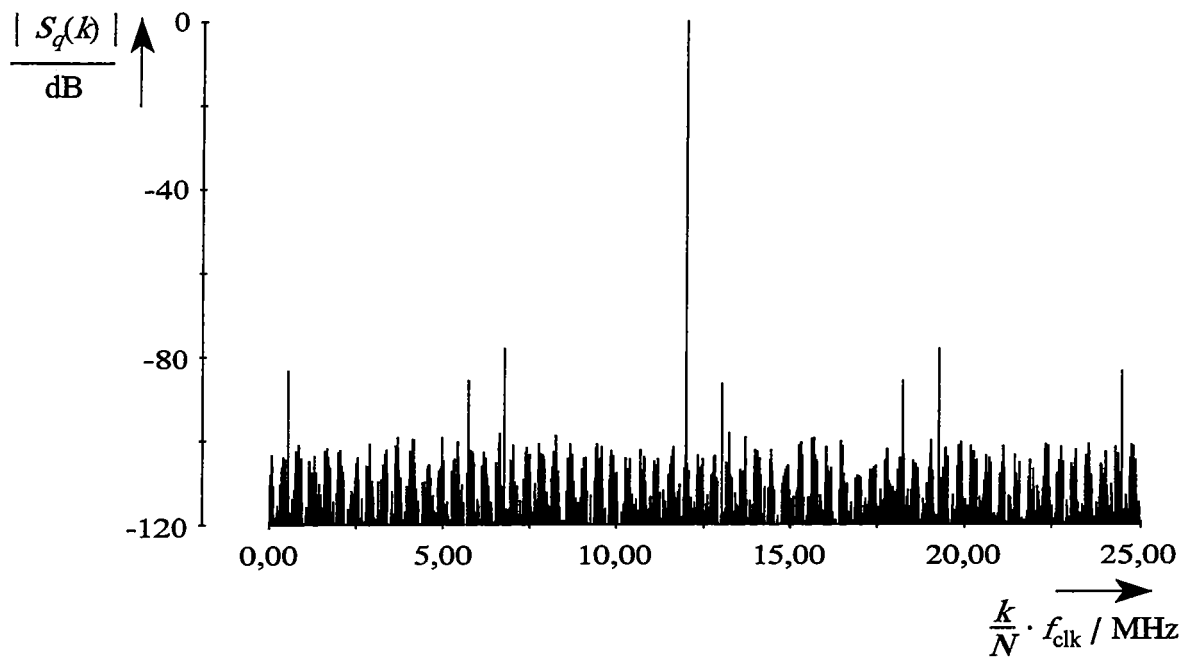
Die Simulationsergebnisse in den Bildern 4.7 und 4.8 stellen typische, auf den jeweiligen Maximalwert normierte Ausgangsspektren des unmodulierten digitalen Systems dar. Den Simulationen liegen als Beispiel zwei numerisch gesteuerte Oszillatoren mit den Wortlängen  $L = 32$  bit,  $W = 13$  bit und  $D = 12$  bit zugrunde. Die Systemtakttrate beträgt bei beiden Diagrammen  $f_{clk} = 50$  MHz. Zur Veranschaulichung der durch die

numerisch gesteuerten Oszillatoren hervorgerufenen Störkomponenten wurde die Trägerfrequenz bei dem in Bild 4.7 dargestellten Diagramm zu  $f_{s1} = 11,98349$  MHz und bei dem in Bild 4.8 dargestellten Ausgangsspektrum zu  $f_{s2} = 13,571167$  MHz gewählt, wobei  $f_{s2}$  im Hinblick auf den störfreien Dynamikbereich dem ungünstigsten Fall entspricht. Demzufolge ergeben sich die ganzzahligen Frequenzwerte gemäß Gl. (3.1) zu  $F_1 = 3D5B0000_{16}$  bzw.  $F_2 = 457C0000_{16}$ .

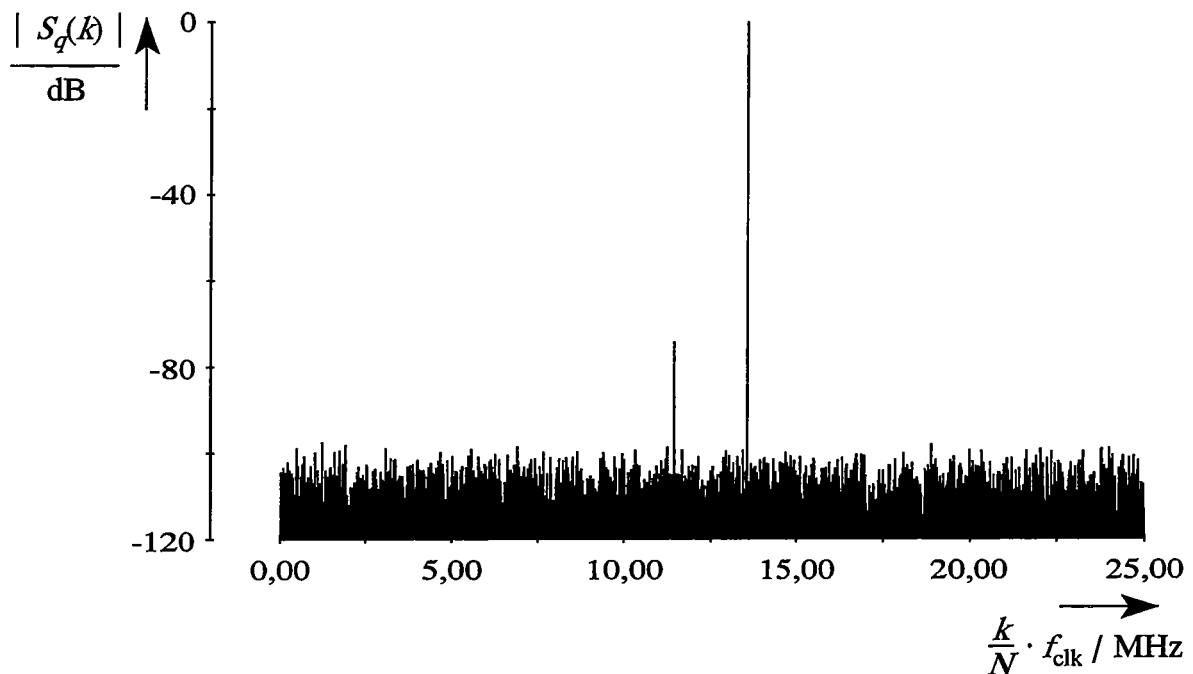
Anhand einer Fouriertransformation von Gl. (4.5) wird deutlich, daß das Ausgangsspektrum des digitalen Rauschgenerators einer additiven Überlagerung der jeweiligen Ausgangsspektren der beiden numerisch gesteuerten Oszillatoren entspricht. Aufgrund der zweckmäßigerweise angenommenen Gleichheit der beiden numerisch gesteuerten Oszillatoren muß daher das Ausgangsspektrum des unmodulierten Systems mit dem des unmodulierten numerisch gesteuerten Oszillators identisch sein. Demzufolge sind die in Kapitel 3 abgeleiteten Ergebnisse auch für das unmodulierte System uneingeschränkt gültig.

Aus den in den Bildern 4.7 und 4.8 abgebildeten Simulationsergebnissen ergibt sich beim ganzzahligen Frequenzwort  $F_1$  ein störfreier Dynamikbereich von  $a_{stör1} = 78,04$  dB und beim ganzzahligen Frequenzwort  $F_2$  von  $a_{stör2} = 74,34$  dB. Die anhand der beiden Ausgangsspektren ermittelten Signal-Rausch-Abstände betragen  $a_{SN1} = 70,56$  dB und  $a_{SN2} = 71,19$  dB. Der Vergleich zwischen diesen Werten und den nach Gl. (3.12) und Gl. (3.18) berechneten Werten des numerisch gesteuerten Oszillators bestätigt die im vorhergehenden Absatz gemachte Aussage bezüglich des Verhaltens des unmodulierten Systems, da keine wesentlichen Unterschiede bestehen. In Übereinstimmung mit den berechneten Werten beträgt die Differenz der störfreien Dynamikbereiche der beiden simulierten Ausgangsspektren 3,7 dB, wobei das ganzzahlige Frequenzwort  $F_2$  hierbei dem ungünstigsten Fall einer Periodenlänge von  $M = 2$  entspricht. Die dargestellten Diagramme verdeutlichen ferner die in Abschnitt 3.3 beschriebenen Effekte der Quantisierung des Phasenwinkels und der Amplitudenwerte des numerisch gesteuerten Oszillators anhand der auftretenden Störkomponenten, deren Lage im Ausgangsspektrum den nach Gl. (3.10) berechneten Frequenzen entspricht.

Den Simulationsergebnissen der Bilder 4.7 und 4.8 liegt ein idealer Digital/Analog-Umsetzer zugrunde. Reale Digital/Analog-Umsetzer besitzen jedoch stets eine endliche Amplitudenauflösung und dementsprechend eine auf die Wortlänge  $C$  begrenzte



**Bild 4.7** Ausgangsspektrum des unmodulierten Systems bei idealem Digital/Analog-Umsetzer;  $f_{\text{clk}} = 50 \text{ MHz}$ ;  $F = 3D5B0000_{16}$

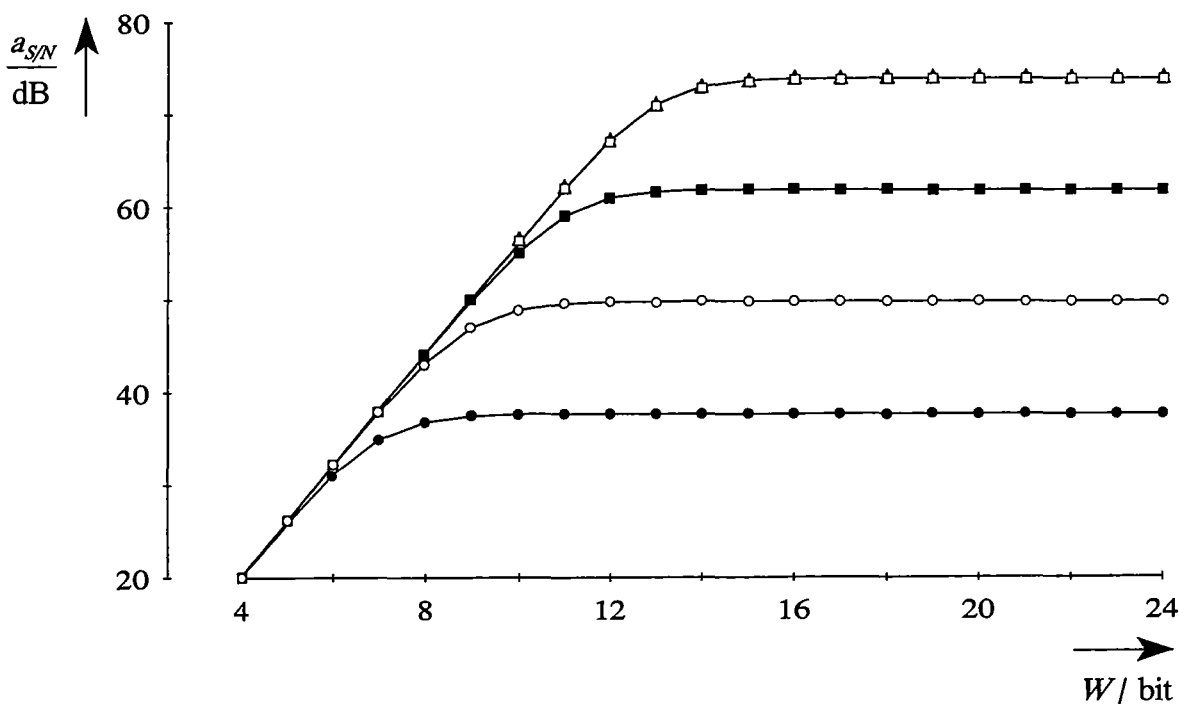


**Bild 4.8** Ausgangsspektrum des unmodulierten Systems bei idealem Digital/Analog-Umsetzer;  $f_{\text{clk}} = 50 \text{ MHz}$ ;  $F = 457C0000_{16}$

Eingangsfolge  $s_{DA}(n)$ . Unter Anwendung des Modells additiven Rauschens zur Beschreibung des durch die Quantisierung der Eingangsfolge auftretenden Quantisierungsfehlers  $\varepsilon_{DA}(n)$  (vgl. Abschnitt 3.3.3) und unter der Annahme einer idealen Rekonstruktion des analogen Signales sowie idealer statischer und dynamischer Kenngrößen läßt sich der theoretisch erzielbare Signal-Rausch-Abstand am Ausgang des Digital/Analog-Umsetzers in guter Näherung zu [Zan 90]

$$\frac{a_{SN}}{\text{dB}} \approx 6,02 \cdot C + 1,76 \tag{4.54}$$

bestimmen. Ausgehend von dieser Näherung stellt sich die Frage, welche Auswirkung eine gegenüber der Amplitudenauflösung der numerisch gesteuerten Oszillatoren abweichende Amplitudenauflösung des Digital/Analog-Umsetzers auf den Signal-Rausch-Abstand hat und bei welcher Wortlänge  $C$  dieser maximal wird.



**Bild 4.9** Theoretisch erzielbarer Signal-Rausch-Abstand in Abhängigkeit der Wortlängen  $W$  und  $C$ ;  $D = 12$  bit; ●:  $C = 6$  bit; ○:  $C = 8$  bit; ■:  $C = 10$  bit; □:  $C = 12$  bit; ▲:  $C = 14$  bit

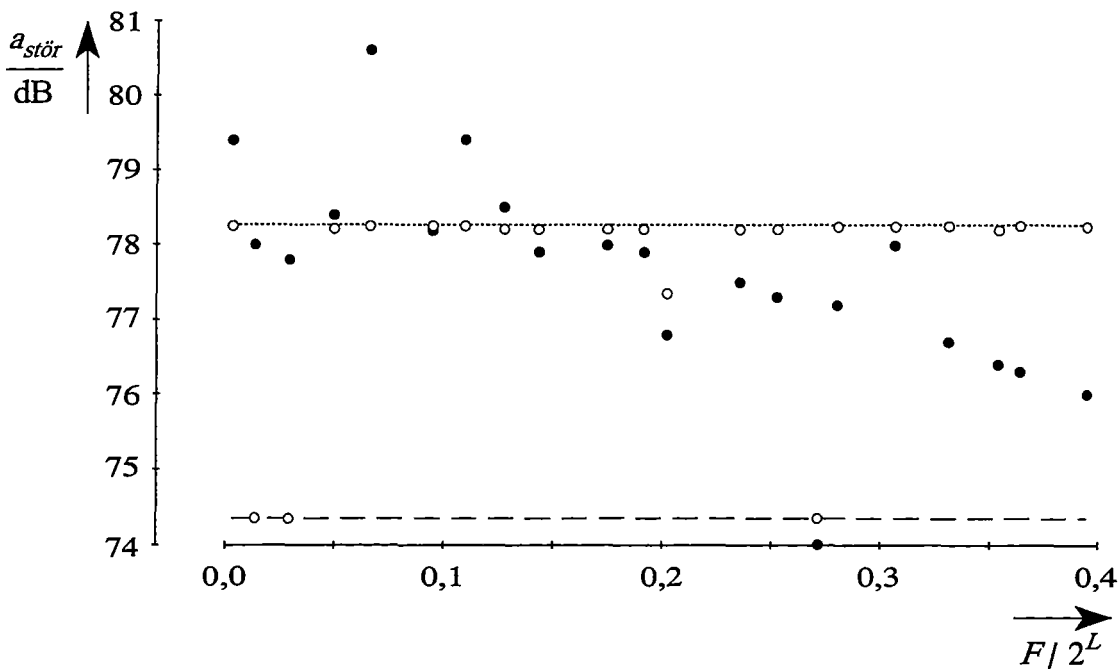
Zur Beantwortung dieser Frage zeigt Bild 4.9 die Ergebnisse einer Simulationsreihe für den theoretisch erzielbaren Signal-Rausch-Abstand am Ausgang des Digital/Analog-Umsetzers bei verschiedenen Wortlängen  $C$  und  $W$  und einer Wortlänge von  $D = 12$  bit am Ausgang der numerisch gesteuerten Oszillatoren (vgl. Bild 3.8).

Die Ergebnisse lassen erkennen, daß mit zunehmender Verringerung der Wortlänge  $C$  — wie zu erwarten war — eine zunehmende Verschlechterung des Signal-Rausch-Abstandes einhergeht. Demgegenüber führt eine Vergrößerung der Wortlänge  $C > D$  zu keiner weiteren Verbesserung des Signal-Rausch-Abstandes, so daß bei einer Wortlänge von  $C = D$  der jeweils maximale Wert erzielt wird. Die meßtechnische Überprüfung eines digitalen Systems in der Praxis liefert üblicherweise schlechtere Signal-Rausch-Abstände (vgl. Abschnitt 5.4). Dies ist zum einen auf die nichtidealen statischen und dynamischen Kenngrößen des Digital/Analog-Umsetzers und zum anderen auf Genauigkeitsverlust durch Rundungsfehler im System zurückzuführen.

Wie die Betrachtungen in Kapitel 3 zeigen, hängen der störfreie Dynamikbereich und der Signal-Rausch-Abstand im wesentlichen vom Parameter  $W$  und der Periodenlänge  $M$  der Phasenfehlerfolge des numerisch gesteuerten Oszillators ab. Die in den Bildern 3.8 und 4.9 dargestellten Signal-Rausch-Abstände basieren jeweils auf dem ungünstigsten Fall der Periodenlänge  $M = 2$ . Bei der praktischen Realisierung des digitalen Rauschgenerators sind die Parameter  $L$ ,  $W$  und  $D$ , und damit die Differenz  $B = L - W$ , aufgrund der getroffenen Auswahl der numerisch gesteuerten Oszillatoren festgelegt, so daß die Periodenlänge  $M$  nur noch vom ganzzahligen Frequenzwort  $F$  abhängt (vgl. Gl. (3.9)). Gemäß den Gleichungen (3.12) und (3.18) sind der störfreie Dynamikbereich und der Signal-Rausch-Abstand in diesem Fall ausschließlich eine Funktion der jeweiligen Trägerfrequenz.

In Bild 4.10 sind exemplarisch die Simulationsergebnisse für den störfreien Dynamikbereich mit (•) und ohne (○) Digital/Analog-Umsetzer bei zufällig gewählten Trägerfrequenzen  $f_0$  dargestellt. Die Grundlage des simulierten digitalen Rauschgenerators bilden wiederum zwei numerisch gesteuerte Oszillatoren mit den Parametern  $L = 32$  bit,  $W = 13$  bit und  $D = 12$  bit. Der Digital/Analog-Umsetzer weist ebenfalls eine Amplitudenauflösung von  $C = 12$  bit auf, wobei das ideale Interpolationsfilter durch ein Halteglied nullter Ordnung approximiert wird.





**Bild 4.10** Störfreier Dynamikbereich des unmodulierten Systems für verschiedene Trägerfrequenzen; •: mit und o: ohne Digital/Analog-Umsetzer

Zur besseren Einordnung der Simulationsergebnisse sind in dem dargestellten Diagramm zusätzlich die nach Gl. (3.12) berechnete untere Schranke für  $M = 2$  (----) und die obere Schranke für  $M = 2^B$  (.....) des störfreien Dynamikbereiches ohne Digital/Analog-Umsetzer, entsprechend den vorgegebenen Parametern  $L$  und  $W$ , eingezeichnet.

Die Ergebnisse unterstreichen den zuvor beschriebenen Sachverhalt bezüglich der Abhängigkeit des störfreien Dynamikbereiches von der jeweils gewählten Trägerfrequenz, wobei die ermittelten Werte ohne Digital/Analog-Umsetzer erwartungsgemäß innerhalb der angegebenen Schranken liegen. Anhand der Ergebnisgrafik läßt sich weiterhin der Einfluß des Digital/Analog-Umsetzers gut nachvollziehen. Je höher die Trägerfrequenz gewählt wird, desto größer ist die durch das Halteglied verursachte Dämpfung gegenüber dem theoretisch erzielbaren Wert gemäß Gl. (3.12), was auch nicht anders zu erwarten war. Die größte Abweichung beträgt für die hier betrachtete Simulationsreihe 2,3 dB. Interessant sind die Ergebnisse für Trägerfrequenzen  $f_0 < 7$  MHz, da verglichen mit den Resultaten ohne Digital/Analog-Umsetzer in diesem Bereich bessere Werte für den störfreien Dynamikbereich erzielt werden. Dieser

Effekt ist darauf zurückzuführen, daß bei diesen Trägerfrequenzen die größten der durch die beiden numerisch gesteuerten Oszillatoren verursachten Störkomponenten oberhalb der jeweiligen Trägerfrequenz auftreten und deshalb gegenüber dieser eine stärkere Dämpfung durch die Übertragungsfunktion des Halteglieders erfahren.

Als Ergebnis der Betrachtungen in diesem Abschnitt läßt sich festhalten, daß der theoretisch realisierbare störfreie Dynamikbereich und Signal-Rausch-Abstand im wesentlichen von den systemspezifischen Wortlängen  $W$ ,  $D$  und  $C$  abhängt. Die Auswahl geeigneter Systemkomponenten erfordert somit immer einen Kompromiß, wobei die Grenzen einerseits durch die geforderte maximale Signalfrequenz und andererseits durch den geforderten störfreien Dynamikbereich gegeben sind. Die Simulationen im nächsten Abschnitt sollen zeigen, ob dies auch bei der Synthese der bandbegrenzten Rauschsignale noch gilt.

#### 4.4.3 Simulationsergebnisse bei vorgegebenen Leistungsdichtespektren

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Simulationsergebnisse beziehen sich wiederum auf die in Bild 4.6 abgebildete Gesamtstruktur des digitalen Rauschgenerators. Als Rechenvorschrift dient der in Abschnitt 4.3 abgeleitete numerische Synthesalgorithmus auf der Basis entsprechend Bild 4.4 vorgegebener frequenzdiskreter Leistungsdichtespektren. Die Synthese der gleichverteilten Phasen  $\phi_v$  erfolgt mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators, dessen Algorithmus auf der Grundlage rückgekoppelter Schieberegister nach [Fus 90] beruht.

Zur besseren Einordnung der Meßergebnisse des in Kapitel 5 realisierten digitalen Rauschgenerators gegenüber den in diesem Abschnitt vorgestellten Simulationsergebnissen, ist es sinnvoll, zunächst einige allgemeine Simulationsparameter zu spezifizieren. Die Gewichtung der Spektrallinien der vorgegebenen Leistungsdichtespektren  $S_{aa}(\zeta)$  wird jeweils so gewählt, daß die mittlere Leistung des erzeugten Rauschsignales  $P_s = 0,125$  entspricht, da die maximale Ausgangsamplitude des verwendeten realen Digital/Analog-Umsetzers  $\pm 0,5$  V beträgt. Den Berechnungen liegt ferner eine Systemtakttrate von  $f_{clk} = 50$  MHz zugrunde. Für die numerisch gesteuerten Oszillatoren wird eine Frequenzauflösung von  $L = 32$  bit, eine Phasenauflösung von  $W = 13$  bit und eine Amplitudenauflösung von  $D = 12$  bit festgelegt. Entsprechend den Untersuchungen im vorhergehenden Abschnitt beträgt die Amplitudenauflösung des Digi-

tal/Analog-Umsetzers ebenfalls  $C = 12$  bit. Diese genannten allgemeinen Simulationsparameter, die die Spezifikationen der zur praktischen Realisierung des digitalen Rauschgenerators verwendeten Systemkomponenten betreffen, bilden im weiteren die Grundlage für alle nachfolgenden Simulationen. Sollten bei den in Kapitel 5 durchgeführten Messungen abweichende Einstellungen gewählt werden, so wird dies explizit erwähnt.

Die Simulation der Systemkomponenten beruht wiederum auf den in Bild 3.9 und Bild 3.10 angegebenen Modellierungen. Zusätzlich werden die statischen Kenngrößen des realen Digital/Analog-Umsetzers durch eine quadratische (2. Harmonische) und eine kubische (3. Harmonische) Übertragungsfunktion approximiert, wobei weiterhin ideale dynamische Kenngrößen vorausgesetzt seien. Als Gütekriterium dient neben dem störfreien Dynamikbereich das am Ausgang des Rauschgenerators ermittelte Leistungsdichtespektrum.

Das Spektrum eines stochastischen Prozesses ist im allgemeinen durch die Wiener-Khintchine Beziehung erklärt. Sie verknüpft die Autokorrelationsfunktion und die spektrale Leistungsdichte über die Fouriertransformation. In der Praxis zugänglich ist jedoch stets nur eine individuell beobachtete Musterfunktion des Prozesses. Aufgrund des endlichen Beobachtungsintervalls der Musterfunktion ist daher in der Regel nur eine Schätzung der spektralen Leistungsdichte möglich. Im Gegensatz dazu ist bei dem im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Fall eines periodischen, ergodischen Zufallsprozesses die Bestimmung der spektralen Leistungsdichte anhand der periodischen Musterfolge exakt möglich, wenn das Beobachtungsintervall genau einem ganzzahligen Vielfachen der Periodenlänge der Musterfolge entspricht. Ein Verfahren, das eine effiziente Berechnung der spektralen Leistungsdichte auf einem Digitalrechner gestattet, ist das sogenannte Periodogramm [Kam 89, Opp 92, Pro 92]. Dieses sei für eine periodische Musterfolge  $s(n)$  der Periodenlänge  $N$  definiert als

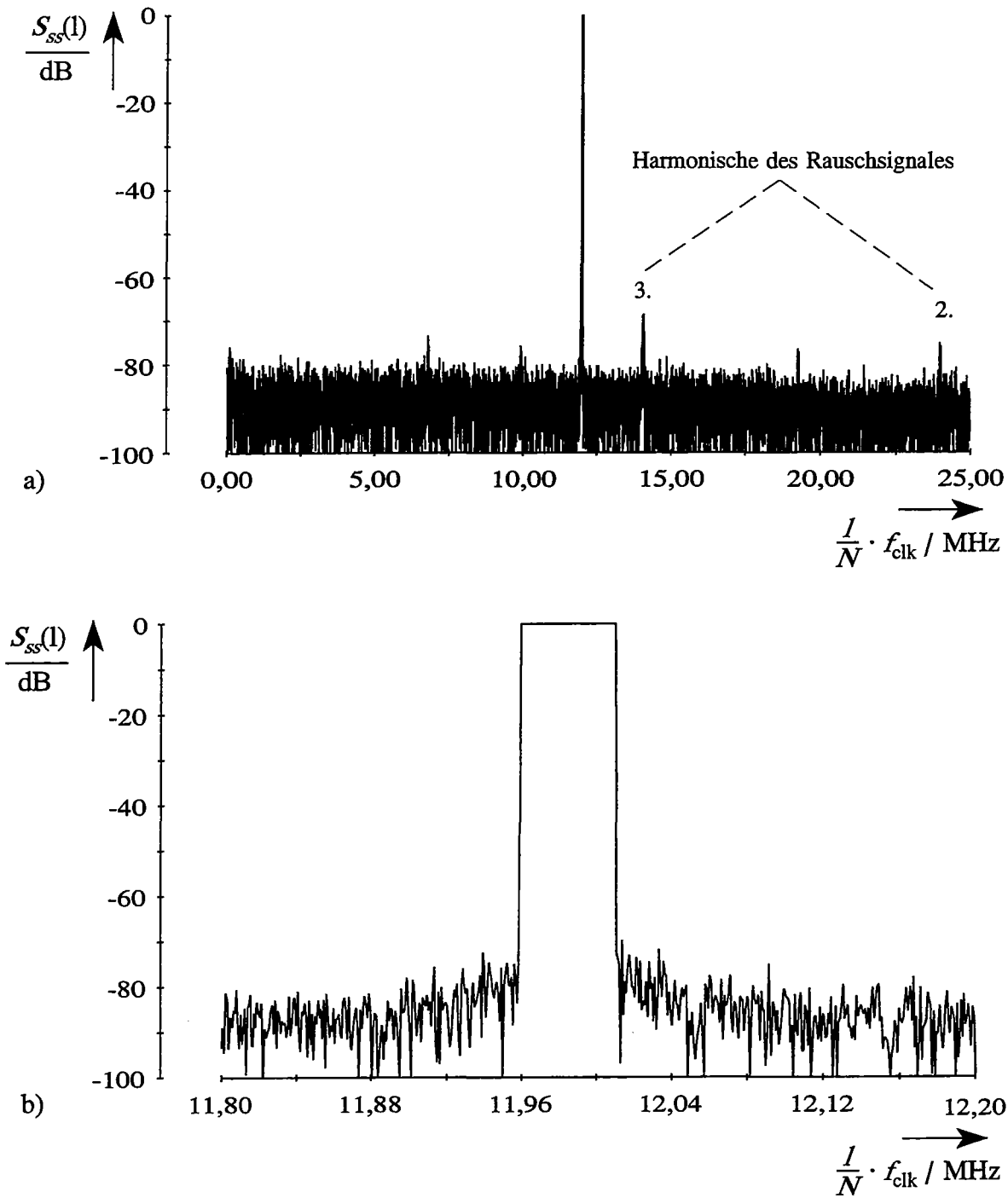
$$S_{ss}(l) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} s^*(n) \cdot s(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot (k-n) \cdot l}, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (4.55)$$

wobei dies in dem hier betrachteten Fall gleichbedeutend mit der spektralen Leistungsdichte des zugehörigen stochastischen Prozesses ist. Gl. (4.55) dient somit als Grundlage zur Berechnung der im Rahmen dieser Arbeit simulierten Leistungsdichtespektren.

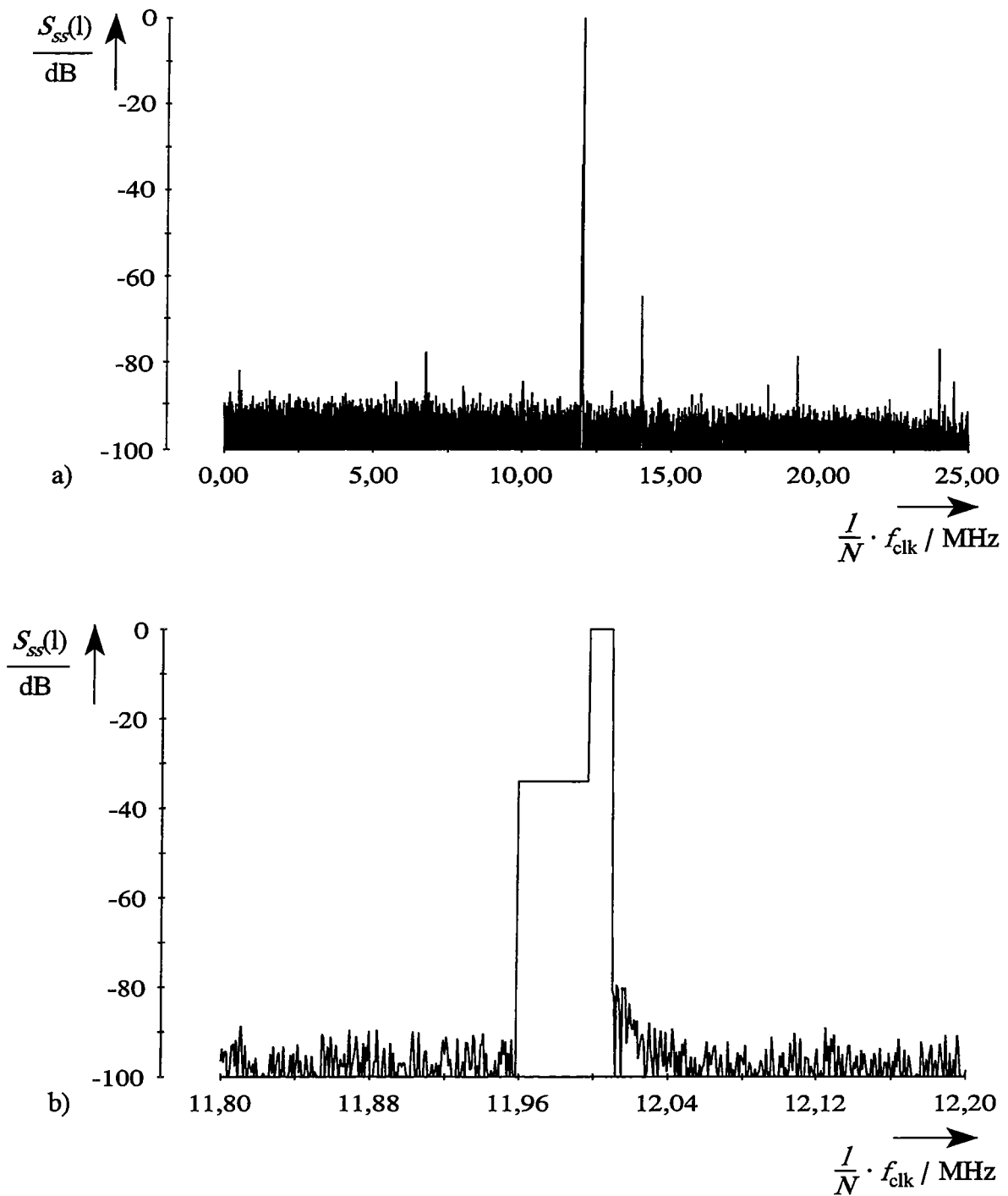
Die in den Bildern 4.11 bis 4.13 dargestellten Simulationsergebnisse verdeutlichen die Eignung der entwickelten Schaltungsstruktur und des numerischen Synthesealgorithmus anhand der ermittelten Leistungsdichtespektren bei unterschiedlichen Vorgaben. Der einfachste der drei hier gezeigten Fälle ist Bild 4.11 zu entnehmen, da aufgrund der entsprechend Bild 4.4 vorgegebenen Leistungsdichte das synthetisierte Leistungsdichtespektrum symmetrisch zur Mittenfrequenz  $f_0 = 11,98349$  MHz ist und alle Spektrallinien gleich gewichtet sind. Im Gegensatz dazu zeigen die Bilder 4.12 und 4.13 Leistungsdichtespektren, die unsymmetrisch bezüglich der Mittenfrequenz  $f_0$  sind und deren Spektrallinien eine unterschiedliche Gewichtung aufweisen. Die Bandbreite beträgt bei den ersten beiden vorgegebenen Leistungsdichtespektren  $f_B = 50$  kHz und bei dem zu Bild 4.13 vorgegebenen Leistungsdichtespektrum  $f_B = 100$  kHz, wobei jeweils eine Periodenlänge der Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  von  $N = 2^{23}$  gewählt wurde.

Die in den Bildern 4.11 bis 4.13 abgebildeten Leistungsdichtespektren weisen bezüglich ihres prinzipiellen Verlaufes keine wesentlichen Unterschiede zu den gemäß Bild 4.3 erwarteten Leistungsdichtespektren auf. Die vorgegebene Dämpfung von 34 dB bzw. 28 dB einer festgelegten Anzahl von Spektrallinien, bezogen auf den maximalen Leistungspegel, wird mit 33,98 dB (Bild 4.12) und 27,97 dB (Bild 4.13) nahezu exakt erreicht. Weiterhin lassen sich die durch die Wortlängenreduktion des Phasenakkumulators der numerisch gesteuerten Oszillatoren hervorgerufenen Störkomponenten gut lokalisieren. Eine genauere Betrachtung der Störkomponenten zeigt allerdings, daß diese, ebenso wie die Trägerfrequenz, entsprechend den vorgegebenen Leistungsdichtespektren moduliert sind. Dieser Effekt beruht auf dem bereits in Abschnitt 3.4 beschriebenen Sachverhalt, daß beim numerisch gesteuerten Oszillator die Information zur Phasenmodulation nach der Reduzierung der Wortlänge des Phasenakkumulators hinzugefügt wird (vgl. Bild 3.9) und demzufolge die dadurch hervorgerufenen Störkomponenten in gleicher Weise wie die Trägerfrequenz moduliert werden.

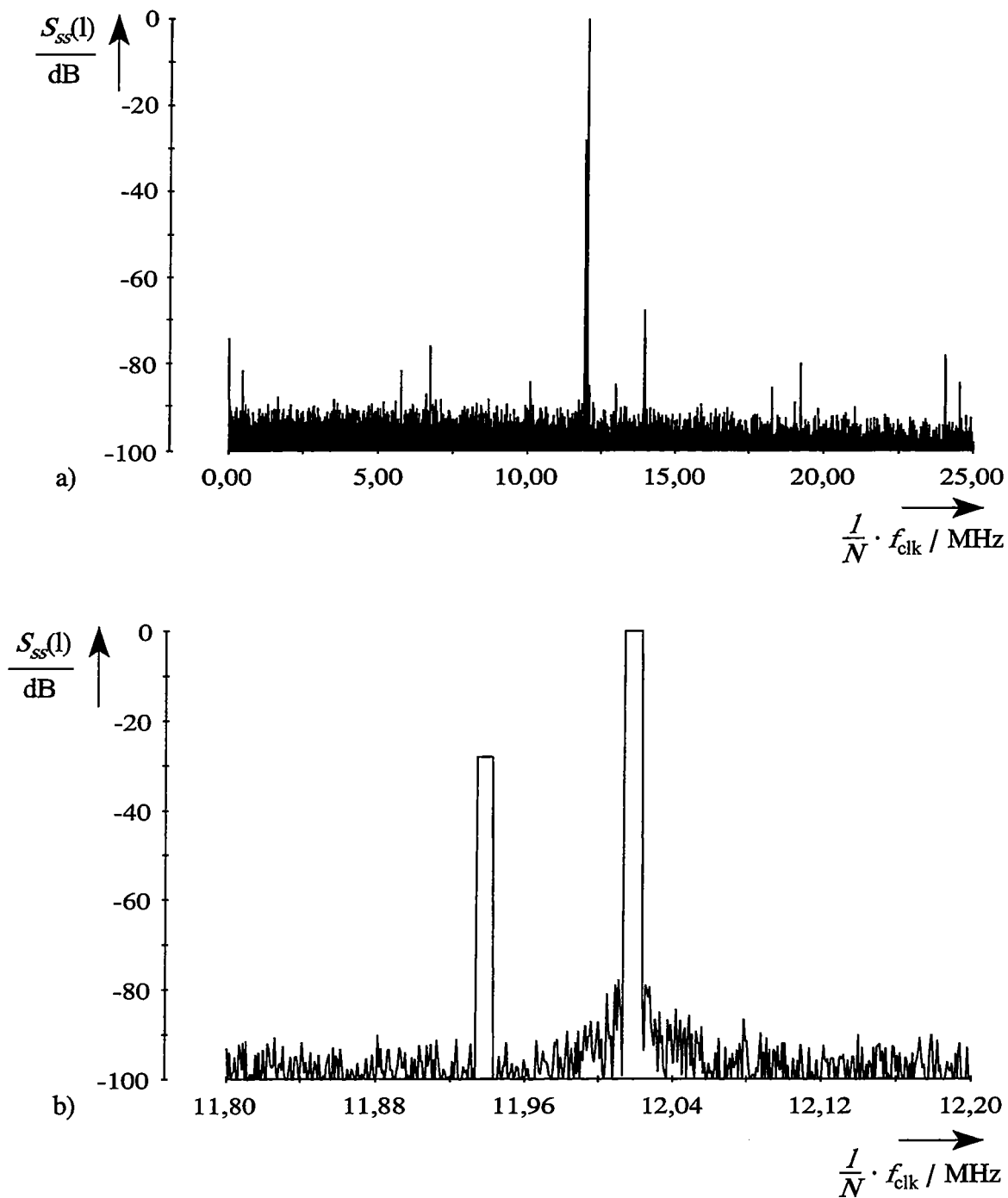
Abweichungen zwischen den erwarteten und den simulierten Leistungsdichtespektren ergeben sich zum einen bezüglich der mittleren Leistung und zum anderen hinsichtlich des störfreien Dynamikbereiches. Wie die Untersuchungen in Abschnitt 6.3 verdeutlichen, ist die Abweichung gegenüber der vorgegebenen mittleren Leistung im wesentlichen auf den Normierungsfaktor  $a_{norm}$  in Gl. (4.44) und auf die Quantisie-



**Bild 4.11** Berechnetes Leistungsdichtespektrum; a) gesamte Periode; b) Ausschnitt symmetrisch zur Trägerfrequenz;  $f_0 = 11,98349 \text{ MHz}$ ;  $f_B = 50 \text{ kHz}$



**Bild 4.12** *Berechnetes Leistungsdichtespektrum; a) gesamte Periode; b) Ausschnitt symmetrisch zur Trägerfrequenz;  $f_0 = 11,98349 \text{ MHz}$ ;  $f_B = 50 \text{ kHz}$*

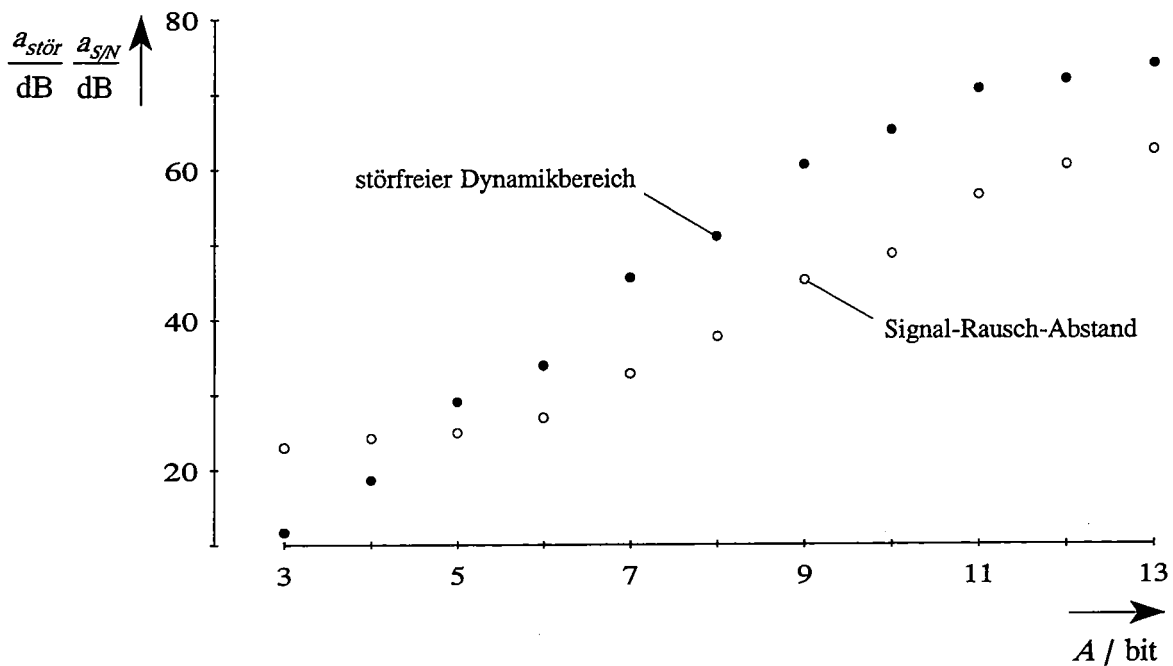


**Bild 4.13** Berechnetes Leistungsdichtespektrum; a) gesamte Periode; b) Ausschnitt symmetrisch zur Trägerfrequenz;  $f_0 = 11,98349 \text{ MHz}$ ;  $f_B = 100 \text{ kHz}$

rung der Phasenmodulationsfolgen zurückzuführen. Die Verringerung der mittleren Leistung des erzeugten Rauschsignales beträgt — in Übereinstimmung mit den Ergebnissen in Abschnitt 6.3 — bei den hier exemplarisch dargestellten Leistungsdichtespektren ungefähr 1,9 dB.

Zusätzlich zu der gerade beschriebenen Verringerung der mittleren Leistung führt der Genauigkeitsverlust verursacht durch die notwendige Quantisierung der Phasenmodulationsfolgen zu einer Verschlechterung des störfreien Dynamikbereiches und des Signal-Rausch-Abstandes gegenüber den Resultaten des unmodulierten Systems. Eine Bestimmung der störfreien Dynamikbereiche und der Signal-Rausch-Abstände anhand der simulierten Leistungsdichtespektren bestätigt dies. Für den ersten Fall (Bild 4.11) ergeben sich die Werte  $a_{stör} = 72,15$  dB und  $a_{SN} = 62,74$  dB, für den zweiten Fall (Bild 4.12)  $a_{stör} = 75,64$  dB und  $a_{SN} = 62,27$  dB und für den dritten Fall (Bild 4.13)  $a_{stör} = 75,88$  dB bzw.  $a_{SN} = 62,27$  dB.

Die negativen Auswirkungen unterschiedlicher Wortlängen  $W$  und  $A$  bezüglich der Kenngrößen störfreier Dynamikbereich und Signal-Rausch-Abstand verdeutlicht eine weitere Simulationsreihe, deren Ergebnisse in Bild 4.14 zu sehen sind. Die Simulation beruht wiederum auf dem zu Bild 4.11 exemplarisch vorgegebenen Leistungsdichtespektrum.



**Bild 4.14** Störfreier Dynamikbereich (●) und Signal-Rausch-Abstand (○) in Abhängigkeit von der Phasenmodulationswortlänge  $A$ ;  $W = 13$  bit



Anhand der Ergebnisse ist deutlich erkennbar, daß der maximale Wert für den störfreien Dynamikbereich und den Signal-Rausch-Abstand jeweils bei einer Wortlänge der Phasenmodulationsfolgen von  $A = W$  erzielt wird, was nach Gl. (3.20) auch nicht anders zu erwarten war. Die Wortlänge  $A$  stellt somit hinsichtlich der Phasenmodulation mit numerisch gesteuerten Oszillatoren neben den Parametern  $L$ ,  $W$  und  $D$  eine weitere wichtige Einflußgröße dar, die die systemspezifischen Kenngrößen störfreier Dynamikbereich und Signal-Rausch-Abstand beeinflusst.

Eine erneute Betrachtung von Gl. (4.5) führt zu einem weiteren interessanten Aspekt. Es stellt sich hierbei die Frage, welche Auswirkung eine Nichtbeachtung des Faktors  $2^{-1}$  in Gl. (4.5) auf das Ausgangsspektrum des digitalen Rauschgenerators hat. Die Basis zur Beantwortung dieser Frage bilden wiederum die in den Bildern 4.11 bis 4.13 exemplarisch dargestellten Leistungsdichtespektren. Im Gegensatz zu den dort abgebildeten Fällen wird bei der erneuten Simulation keine Wortlängenreduktion der Ausgangsfolge des Addierers vorgenommen, sondern stattdessen die Amplitudenauflösung des Digital/Analog-Umsetzers um 1 bit erhöht (vgl. Bild 4.1). Eine Gegenüberstellung dieser Simulationsergebnisse mit den berechneten Leistungsdichtespektren gemäß den Bildern 4.11 bis 4.13 zeigt, daß beim störfreien Dynamikbereich ein Gewinn von ungefähr 1,3 dB und beim Signal-Rausch-Abstand von ungefähr 1,1 dB erzielt wird.

Die Untersuchungen in diesem Abschnitt haben ergeben, daß die entwickelte Schaltungsstruktur und der Synthesalgorithmus prinzipiell zur Synthese schmalbandiger Rauschsignale anhand vorgegebener Leistungsdichtespektren geeignet ist. Die systemspezifische Wortlänge  $A$  der Phasenmodulationsfolgen stellt dabei einen weiteren Parameter bezüglich des störfreien Dynamikbereiches dar. Allerdings beeinflusst auch der aufgrund der entwickelten Schaltungsstruktur notwendige Normierungsfaktor den störfreien Dynamikbereich sowie die mittlere Leistung des erzeugten Rauschsignales.



## 5 Realisierung des digitalen Rauschgenerators

### 5.1 Konzept

Dieses Kapitel befaßt sich mit dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit realisierten digitalen Rauschgenerator. Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, stellt die schaltungstechnische Realisierung des digitalen Systems, auch im Hinblick auf den Einsatz des digitalen Rauschgenerators am Protonenbeschleuniger *COSY*, ein wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit dar. Bei den zeitaufwendigen Simulationen ist eine vollständige Beschreibung aller bei der schaltungstechnischen Realisierung vorkommenden Parameter zu umfangreich. So können z.B. Bauteiltoleranzen oder aufgrund der vergleichsweise hohen Systemtaktraten auftretende Probleme hervorgerufen durch Aufbautoleranzen Abweichungen vom simulierten Verhalten verursachen. Weiterhin ist die Variation der Mittenfrequenz nur anhand experimenteller Untersuchungen im Realzeitbetrieb verifizierbar. Die Meßergebnisse sollen einerseits die Leistungsfähigkeit, aber andererseits auch die Grenzen des digitalen Systems aufzeigen.

Die Grundlage des nachfolgend beschriebenen digitalen Systems stellt das bereits zur Simulation gezeigte Blockdiagramm des digitalen Rauschgenerators nach Bild 4.6 dar. Abweichend davon werden jedoch zur Berechnung der stochastischen Modulationsfolgen aus Gründen höherer Geschwindigkeit zwei Signalprozessoren eingesetzt. Das entsprechend modifizierte Blockdiagramm des realisierten digitalen Rauschgenerators zeigt Bild 5.1. Es sei angemerkt, daß die Multiplikation mit dem Faktor  $2^{-1}$  nicht mehr explizit im Blockdiagramm aufgeführt ist, da diese schaltungstechnisch durch Abschneiden der niederwertigsten Binärstelle der Ausgangsfolge des Addierers realisiert wird (vgl. Abschnitt 4.2).

Um ein möglichst hohes Maß an Flexibilität zu erreichen, besteht das digitale System aus einzelnen Baugruppen, die durch einen international standardisierten Systembus – hier durch den sogenannten *VMEbus* – untereinander verbunden sind. Der VMEbus dient hierbei zur Steuerung der Signalprozessoren und zur Stromversorgung der einzelnen Baugruppen. Der notwendige schnelle Datentransfer vom Prozessorsystem zur Modulatorbaugruppe und von dieser zum Digital/Analog-Umsetzer geschieht mittels externem Datenbus. In den beiden nachfolgenden Abschnitten werden die einzelnen Baugruppen kurz beschrieben.

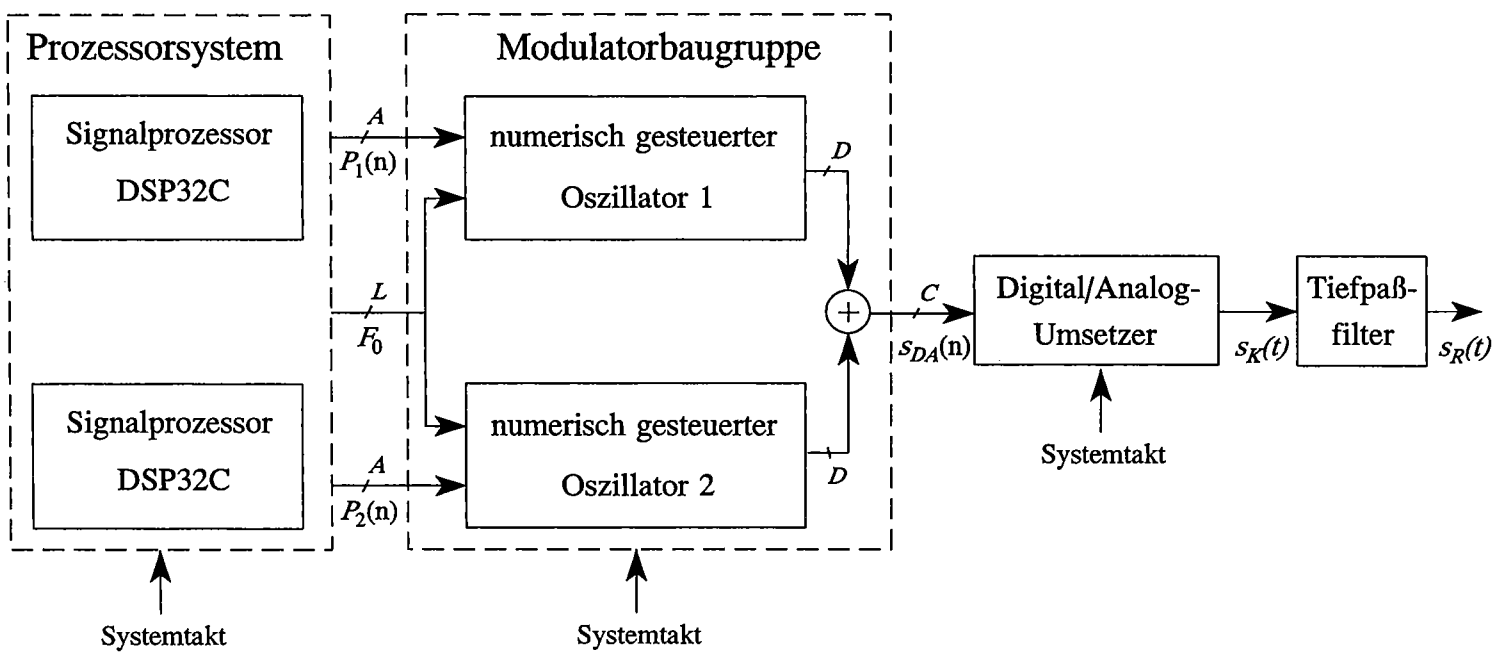
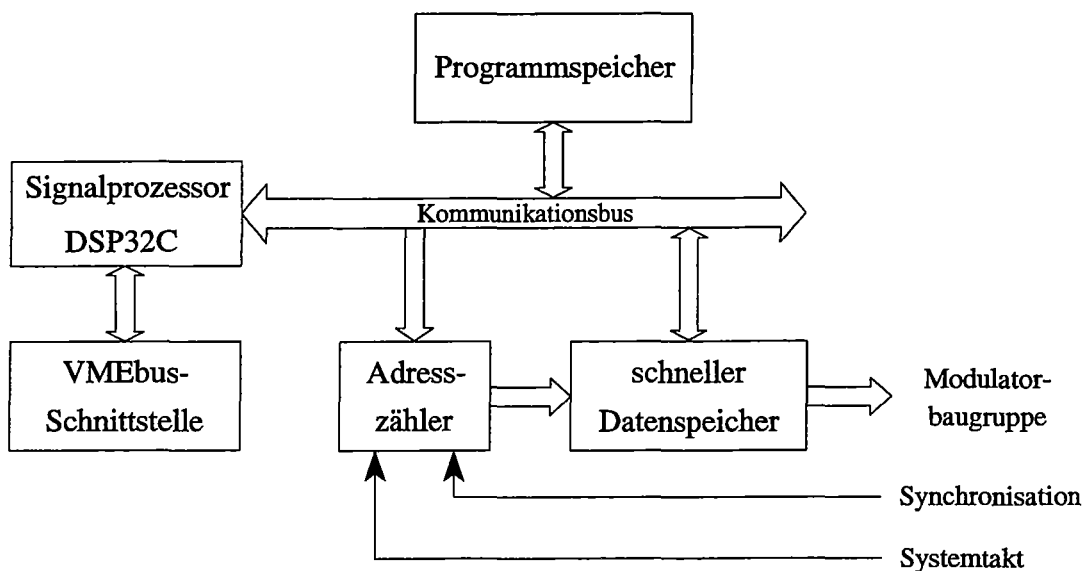


Bild 5.1

Blockdiagramm des digitalen Rauschgenerators

## 5.2 Das Prozessorsystem

Das vorliegende Prozessorsystem dient der Vorabberechnung der Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$ . Es gliedert sich in zwei Prozessorbaugruppen, die identisch aufgebaut sind und jeweils einen Signalprozessor besitzen. Aus den bereits in Abschnitt 4.4.2 genannten Gründen ist hierbei der Einsatz eines Signalprozessors mit Gleitkomma-Arithmetik vorteilhaft. Die Wahl fiel auf den Signalprozessor DSP32C mit einer Taktrate von 80 MHz, der aufgrund seiner Datenwortlänge von 32 bit und der Möglichkeit zur Anbindung des VMEbus über einen sogenannten *Host-Port* gut für das im Rahmen dieser Arbeit betrachtete System geeignet ist. Zudem stand für diesen Prozessortyp bereits ein entsprechendes Entwicklungssystem zur Verfügung. Bild 5.2 zeigt das Blockdiagramm der Prozessorbaugruppe.



**Bild 5.2** Blockdiagramm der Prozessorbaugruppe

Jede Prozessorbaugruppe verfügt über einen Programmspeicher, einen schnellen Datenspeicher, einen Adresszähler, eine VMEbus-Schnittstelle sowie über einen Synchronisations- und einen Systemtakt-Eingang. Der Systemtakt wird für das gesamte digitale System von einer Oszillatorbaugruppe erzeugt, die neben einem Quarzofen mit hoher Stabilität und sehr geringem Phasenrauschen auch die Taktverteilung und die Synchronisationssteuerung enthält. Letztgenannte dient der Synchronisation

der beiden Adresszähler beim zyklischen Auslesen der beiden berechneten Modulationsfolgen  $P_1(n)$  und  $P_2(n)$  aus dem schnellen Datenspeicher.

Die erzielbare spektrale Auflösung ist, wie Gl. (4.24) verdeutlicht, zum einen von der Systemtakttrate und zum anderen von der Periodenlänge der Modulationsfolgen und somit von der Größe des verwendeten Datenspeichers abhängig. Als Ergebnis muß ein Kompromiß erzielt werden, der einerseits die jeweiligen Anforderungen bezüglich maximaler Signalfrequenz und spektraler Auflösung optimal berücksichtigt und andererseits eine Systemrealisierung mit vertretbarem Kostenaufwand gestattet. Für das im Rahmen dieser Arbeit realisierte digitale System wurde ein Datenspeicher mit einer Größe von 16 MByte und einer mittleren Zugriffszeit von 20 ns ausgewählt, so daß sich bei einer Systemtakttrate von  $f_{clk} = 50$  MHz eine maximale spektrale Auflösung von ungefähr 6 Hz ergibt.

Die Steuerung des Prozessorsystems erfolgt durch einen Kommunikationsprozessor mit VMEbus-Schnittstelle und Netzwerkanbindung. Mit Hilfe einer grafischen Benutzeroberfläche lassen sich die gewünschten Leistungsdichtespektren und die zur Synthese der entsprechenden Rauschsignale benötigten Parameter eingeben. Auf eine detailliertere Beschreibung der verwendeten Programme wird hier verzichtet und stattdessen auf [Dro 94] verwiesen.

### 5.3 Modulatorbaugruppe und Digital/Analog-Umsetzer

Die Modulatorbaugruppe beinhaltet die beiden numerisch gesteuerten Oszillatoren und den Addierer. Sie basiert im wesentlichen auf der in Bild 4.1 dargestellten Schaltungsstruktur. Wie bereits in Abschnitt 4.4 erwähnt, ist es zulässig, den Addierer als ideale Systemkomponente zu betrachten. Ein entscheidender Gesichtspunkt bei der Realisierung der Modulatorbaugruppe ist daher die Auswahl eines geeigneten numerisch gesteuerten Oszillators.

Die Qualität des erzeugten schmalbandigen Rauschsignales wird sowohl durch seine statistischen Eigenschaften als auch vom störfreien Dynamikbereich am Ausgang des Systems bestimmt. Wie die Simulationsergebnisse in Kapitel 4 zeigen, hat neben dem Digital/Analog-Umsetzer der numerisch gesteuerte Oszillator einen erheblichen Ein-

fluß auf den erzielbaren störfreien Dynamikbereich. Ferner wird durch die Taktrate des numerisch gesteuerten Oszillators die maximal erzeugbare Signalfrequenz festgelegt (vgl. Abschnitt 3.2). Obwohl aufgrund immer besserer Fertigungsverfahren die Komplexität und die Geschwindigkeit der integrierten Halbleiterschaltungen ständig zunimmt, weisen derzeit erhältliche numerisch gesteuerte Oszillatoren mit hohen Taktraten in der Regel eine vergleichsweise niedrige Amplitudenauflösung auf. Diesen Sachverhalt dokumentiert auch die exemplarische Übersicht in Bild 3.16. Die Auswahl eines geeigneten numerisch gesteuerten Oszillators erfordert somit immer einen Kompromiß, wobei die Grenzen zum einen durch die gestellten Anforderungen an das System und zum anderen durch die jeweils verfügbare Technologie und die Realisierungskosten gegeben sind. Um einen universellen Einsatz des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten digitalen Rauschgenerators zu ermöglichen, fiel die Wahl auf den numerisch gesteuerten Oszillator STEL1175, da dieser einerseits aufgrund seiner vergleichsweise hohen maximalen Taktrate von 80 MHz eine maximale Signalfrequenz von  $f_{smax} = 32$  MHz erlaubt (vgl. Gl. (3.39)) und andererseits wegen seiner Amplitudenauflösung und Phasenmodulationswortlänge von  $A = D = 12$  bit für den hier beabsichtigten Anwendungsfall einen ausreichenden störfreien Dynamikbereich erwarten läßt (vgl. Abschnitt 4.4). In diesem Zusammenhang sei angemerkt, daß der bei gleicher Amplitudenauflösung mit einer maximalen Taktrate von 300 MHz wesentlich schnellere numerisch gesteuerte Oszillator 120NCO zum Zeitpunkt der Systemrealisierung noch nicht verfügbar war und somit keine Berücksichtigung finden konnte.

Der Digital/Analog-Umsetzer bildet die Schnittstelle zwischen digitaler und analoger Seite und beeinflußt somit in nicht unerheblichem Maße die Güte des analogen Rauschsignales. Beim Einsatz eines Digital/Analog-Umsetzers ist daher eine Abschätzung der zu erwartenden Fehler für den jeweiligen Anwendungsfall unerlässlich. Für die im Rahmen dieser Arbeit angewendete direkte digitale Signalsynthese sind insbesondere die Linearitätsfehler und die dynamischen Kenngrößen eines Digital/Analog-Umsetzers von Bedeutung (vgl. Abschnitt 3.5.3). Das nachgeschaltete analoge Rekonstruktionsfilter beeinflußt ebenfalls die Güte des analogen Rauschsignales, was die Ausführungen in Abschnitt 3.5.4 verdeutlichen.

In Anlehnung an die Untersuchungen in Abschnitt 4.4 sowie im Hinblick auf die zuvor getroffene Wahl des numerisch gesteuerten Oszillators sind bereits zwei wichti-

ge Parameter für die Auswahl eines Digital/Analog-Umsetzers festgelegt — die Amplitudenauflösung zu  $C = 12$  bit und die maximale Taktrate zu  $f_{clk} = 80$  MHz. Die Eigenschaften der aufgrund dieser Vorgaben in die engere Wahl gezogenen Digital/Analog-Umsetzer sind so unterschiedlich und vielfältig und die Auswahl so groß, daß der nächste Schritt konsequenterweise ein Vergleich der statischen und dynamischen Kenngrößen entsprechend der Herstellerangaben sein mußte. Die Wahl fiel auf den Digital/Analog-Umsetzer DAC600 [Bur 94], da dieser aufgrund seiner Kenngrößen gute spektrale Eigenschaften erwarten läßt.

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 3.5.4 und wegen der für den hier betrachteten Anwendungsfall geforderten Mittenfrequenzen von bis zu 20 MHz, muß das analoge Rekonstruktionsfilter, um einen dem Dynamikbereich des ausgewählten Digital/Analog-Umsetzers entsprechenden störfreien Bereich von  $a_{stör} = 74$  dB zu erreichen, eine Dämpfung der Störkomponente bei  $f_{stör} = 30$  MHz um weitere 70,5 dB erbringen. Hierbei wird entsprechend den Simulationsparametern in Abschnitt 4.4 eine Systemtaktrate von  $f_{clk} = 50$  MHz zugrunde gelegt. Die erforderliche Sperrdämpfung von  $a_s = 70,5$  dB erreichen für diesen Fall zwei kaskadierte kommerziell erhältliche Tiefpaßfilter vom Typ PLP21.4 [Min 92] mit einer Grenzfrequenz von 21,4 MHz.

## 5.4 Meßergebnisse mit dem realisierten Rauschgenerator

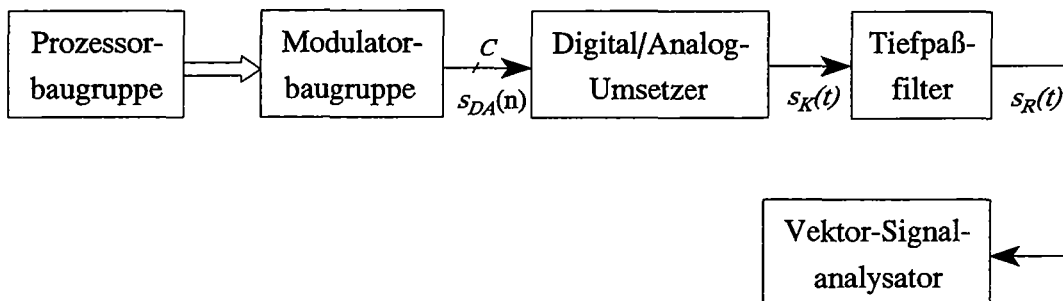
### 5.4.1 Spektrale Eigenschaften des unmodulierten Systems

Die den Diagrammen aus Abschnitt 4.4 zugrunde liegenden Berechnungen setzen ideale Eigenschaften der im Signalweg befindlichen Baugruppen voraus. Bei dem realisierten digitalen Rauschgenerator rufen aber Aufbau- und Bauteiltoleranzen Störkomponenten im Ausgangsspektrum hervor. Ferner führen Rundungs- und Quantisierungsfehler im System zu einem Genauigkeitsverlust. Abweichungen zwischen den Berechnungen und den Messungen sind daher unvermeidbar.

Bevor in Abschnitt 5.4.2 die Ergebnisse der Synthese schmalbandiger Rauschsignale anhand exemplarisch vorgegebener Leistungsdichtespektren betrachtet werden, befaßt sich dieser Abschnitt zunächst mit der spektralen Reinheit des unmodulierten Sy-



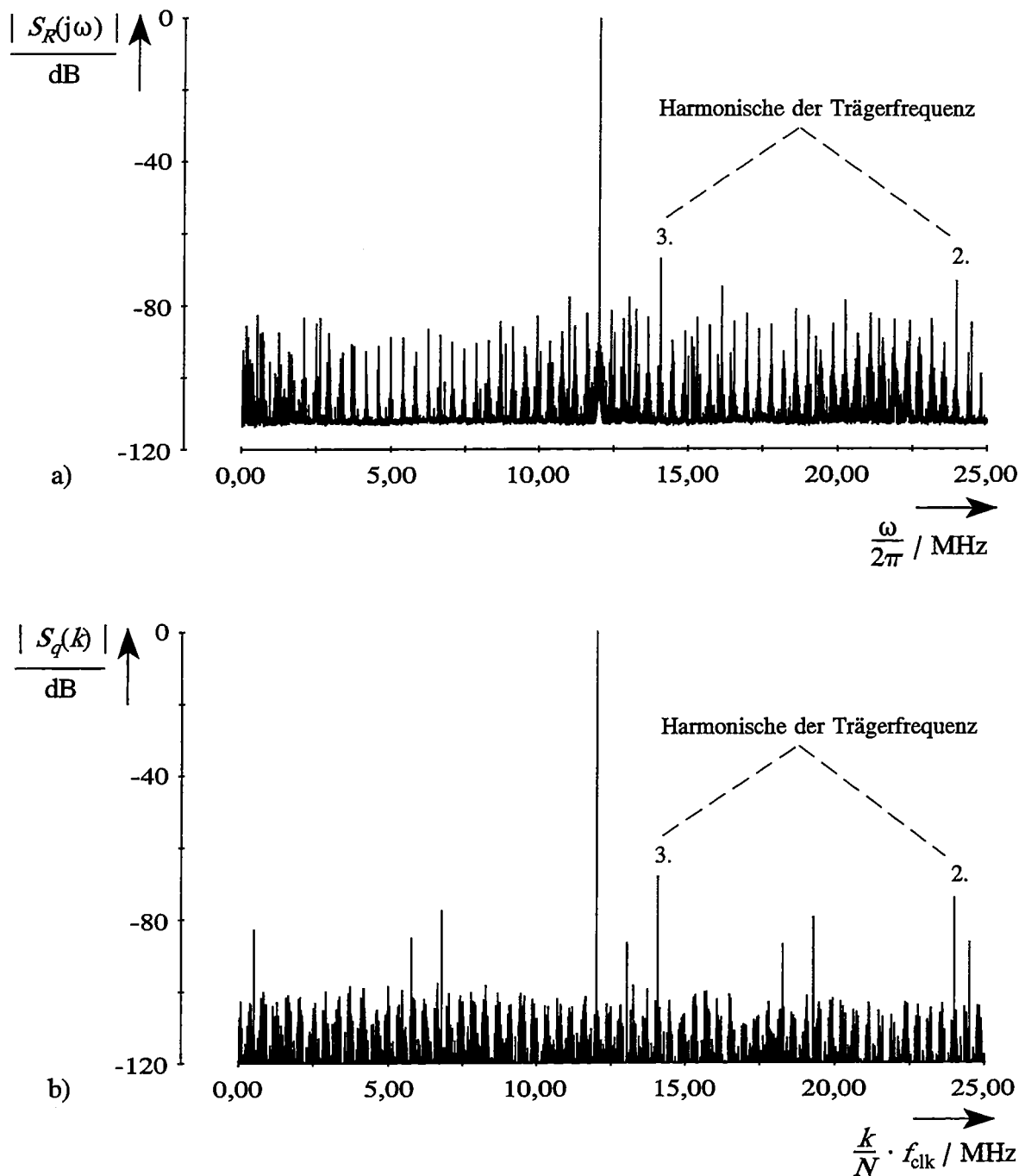
stems. Als Gütekriterium dient der am Ausgang des Systems mit Hilfe des Vektor-Signalanalysators HP89440A gemessene störfreie Dynamikbereich. Der Vektor-Signalanalysator, ausgestattet mit einem 23 bit-Analog/Digital-Umsetzer, dient hierbei als Referenz. Es wurden damit Meßreihen zur Untersuchung der durch den realen Digital/Analog-Umsetzer hervorgerufenen Intermodulationsverzerrungen und der durch den numerisch gesteuerten Oszillator erzeugten spektralen Störkomponenten unter verschiedenen Rahmenbedingungen durchgeführt. Eine schematische Darstellung der dabei verwendeten Meßanordnung zeigt Bild 5.3. In Anlehnung an die Simulationsergebnisse liegen den nachfolgenden Meßergebnissen die Simulationsparameter gemäß Abschnitt 4.4 zugrunde.



**Bild 5.3** Meßanordnung für Untersuchungen mit dem digitalen Rauschgenerator

Die spektrale Reinheit des gesamten Systems wird in erster Linie durch den verwendeten Digital/Analog-Umsetzer bestimmt, da er die Schnittstelle zwischen analoger Umwelt und digitaler Signalverarbeitung bildet. Nachfolgende Untersuchungen klären daher, inwieweit die Fehlerquellen des realen Digital/Analog-Umsetzers das Ausgangsspektrum beeinflussen. Zuvor stellt Bild 5.4 das gemessene Ausgangsspektrum dem berechneten Ausgangsspektrum (siehe auch Bild 4.7) bei einer Signalfrequenz von  $f_s = 11,98349$  MHz gegenüber. Der Vergleich ermöglicht die Funktionskontrolle des gesamten Systems und eine Abschätzung der Aufbau- und Rundungsfehler, sowie der durch den numerisch gesteuerten Oszillator und Digital/Analog-Umsetzer verursachten Störkomponenten.

Anhand der in Bild 5.4 dargestellten Diagramme ist eine gute prinzipielle Übereinstimmung zwischen dem berechneten und dem gemessenen Ausgangsspektrum zu erkennen. Die Lage der durch den numerisch gesteuerten Oszillator verursachten Störkomponenten entspricht exakt den nach Gl. (3.10) berechneten Frequenzen. Das



**Bild 5.4** a) Gemessenes und b) berechnetes Ausgangsspektrum des unmodulierten Systems;  $f_0 = 11,98349 \text{ MHz}$ ;  $f_{\text{clk}} = 50 \text{ MHz}$

gemessene Ausgangsspektrum verdeutlicht ferner den in Abschnitt 3.5.3 beschriebenen Einfluß des realen Digital/Analog-Umsetzers, der sich insbesondere im Auftreten von Harmonischen der Trägerfrequenz äußert.

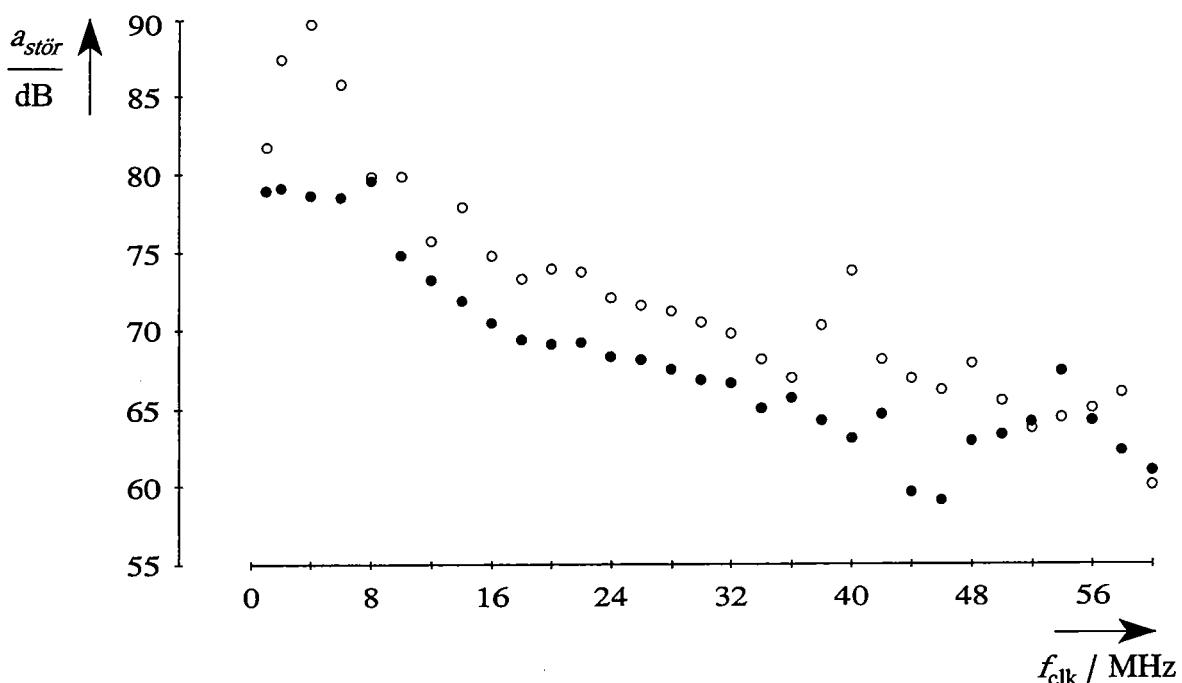
Wie bereits in Abschnitt 3.3.2 geschildert, treten die durch die Quantisierung des Phasenwinkels der numerisch gesteuerten Oszillatoren verursachten Störkomponenten immer in Form von Spektrallinienpaaren im Ausgangsspektrum in Erscheinung, so daß im Idealfall jeweils zwei Störkomponenten die gleiche Amplitude aufweisen. Im Gegensatz dazu sind bei den gemessenen Werten keine Störkomponenten mit gleicher Amplitude erkennbar. Der Grund dafür liegt zum einen in der unterschiedlichen Dämpfung der Spektrallinien durch die Übertragungsfunktion des Digital/Analog-Umsetzers. Zudem erfahren die auftretenden Störkomponenten durch die nachgeschalteten analogen Tiefpaßfilter eine weitere Dämpfung, was zu einer Verringerung der Amplitudenwerte gegenüber den nach Gl. (3.11) ermittelten Werten führt. Die Abweichungen zwischen den beiden dargestellten Ausgangsspektren sind somit im wesentlichen dadurch bedingt, daß bei der Simulation die dynamischen Kenngrößen des Digital/Analog-Umsetzers und die nachgeschalteten analogen Tiefpaßfilter nicht berücksichtigt wurden.

Lage der Harmonischen $f_{harm} / \text{MHz}$	Amplitudenwerte der Harmonischen der Trägerfrequenz normiert auf $ S_q(0) $	
2,066	-83,31 dB	4. Harmonische
4,132	-92,65 dB	8. Harmonische
7,8514	-90,17 dB	9. Harmonische
9,9174	-82,29 dB	5. Harmonische
14,0495	-66,98 dB	<b>3. Harmonische</b>
16,1155	-74,84 dB	7. Harmonische
19,8349	-85,13 dB	10. Harmonische
21,9000	-83,89 dB	6. Harmonische
23,9670	-73,17 dB	<b>2. Harmonische</b>

**Tabelle 5.1** Lage und Amplitude der durch den Digital/Analog-Umsetzer DAC600 hervorgerufenen ersten zehn Harmonischen der Trägerfrequenz;  $f_{clk} = 50 \text{ MHz}$ ;  $f_0 = 11,98349 \text{ MHz}$

Eine erneute Betrachtung des in Bild 5.4 abgebildeten Ausgangsspektrums macht deutlich, daß die durch den realen Digital/Analog-Umsetzer hervorgerufene 2. und 3. Harmonische der Trägerfrequenz gegenüber den Störkomponenten der numerisch gesteuerten Oszillatoren dominieren. Ein Vergleich der in Tabelle 5.1 exemplarisch dargestellten gemessenen Amplitudenwerte der ersten zehn Harmonischen mit den Störkomponenten der numerisch gesteuerten Oszillatoren anhand von Bild 5.4 unterstreicht diesen Sachverhalt. Die Lage der durch den realen Digital/Analog-Umsetzer verursachten Harmonischen im Ausgangsspektrum stimmt hierbei mit den nach Gl. (3.35) ermittelten Frequenzen überein.

Eine exakte Simulation der transienten Ausgangsfehler, die aufgrund der dynamischen Kenngrößen des realen Digital/Analog-Umsetzers auftreten, ist schwierig. Eine detailliertere Beurteilung der spektralen Reinheit des Rauschgenerators ist daher nur auf meßtechnischem Wege möglich. Das Hauptaugenmerk liegt dabei hinsichtlich des realen Digital/Analog-Umsetzers insbesondere auf der 2. und 3. Harmonischen der Signalfrequenz, die bei Frequenzen gemäß Gl. (3.35) auftreten (vgl. Tabelle 5.1). Eine Methode um den Einfluß dieser Störkomponenten auf den störfreien Dynamikbereich zu beurteilen, besteht darin, das Verhältnis von Signalfrequenz  $f_s$  zur Systemtakttrate  $f_{clk}$  konstant bei etwa  $1/3$  (2. Harmonische) bzw.  $1/4$  (3. Harmonische) zu

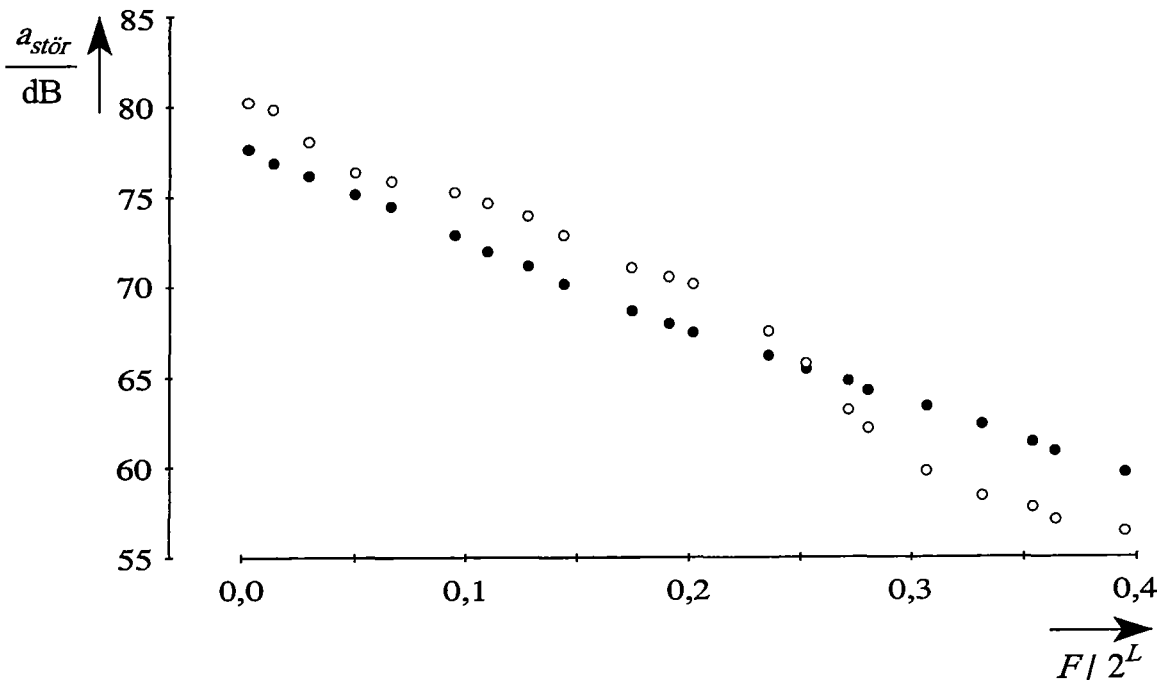


**Bild 5.5** Störfreier Dynamikbereich der •: 2. Harmonischen und der ○: 3. Harmonischen bei verschiedenen Systemtakttraten

halten und dann die Taktrate von beispielsweise 10 kHz bis zum Maximalwert schrittweise zu erhöhen. Bild 5.5 zeigt die nach dieser Methode gemessenen störfreien Dynamikbereiche für die 2. und 3. Harmonische der Trägerfrequenz in Abhängigkeit von der Systemtaktrate.

Man erkennt, daß der erzielbare störfreie Dynamikbereich mit zunehmender Systemtaktrate abnimmt. Da die gewählten Frequenzverhältnisse jeweils dem ungünstigsten Fall entsprechen, bilden die dargestellten Meßwerte die untere Schranke des erzielbaren störfreien Dynamikbereiches.

Eine weitere Methode zur Beurteilung der spektralen Reinheit des unmodulierten Systems besteht darin, die Systemtaktrate  $f_{clk}$  konstant zu halten und die Trägerfrequenz  $f_s$  von Null bis zu der in der Praxis sinnvollen maximalen Signalfrequenz  $f_{smax}$  gemäß Gl. (3.39) schrittweise zu erhöhen. Die Ergebnisse der entsprechenden Meßreihe sind für zufällig gewählte ganzzahlige Frequenzwerte  $F$  in Bild 5.6 zu sehen. Ferner ist dort zum Vergleich der vom Hersteller spezifizierte störfreie Dynamikbereich des Digital/Analog-Umsetzers DAC600 dargestellt.



**Bild 5.6** Störfreier Dynamikbereich des unmodulierten Systems bei verschiedenen Trägerfrequenzen;  $\circ$ : Messung;  $\bullet$ : Herstellerangabe für den DAC600 [Bur 94];  $f_{clk} = 50$  MHz

Anhand der in Bild 5.6 dargestellten Meßergebnisse ist zu erkennen, daß der störfreie Dynamikbereich — aufgrund der statischen und dynamischen Kenngrößen des realen Digital/Analog-Umsetzers — mit zunehmender Trägerfrequenz abnimmt. Dies unterstreichen auch die vom Hersteller spezifizierten Werte des störfreien Dynamikbereiches. Eine Gegenüberstellung der beiden Wertefolgen verdeutlicht den Einfluß der nachgeschalteten analogen Rekonstruktionsfilter. Aufgrund der Übertragungsfunktion der ausgewählten Tiefpaßfilter werden für Trägerfrequenzen  $f_0 \leq 13$  MHz im Vergleich zu den Herstellerangaben bessere Werte für den störfreien Dynamikbereich erzielt. Hingegen ergeben sich für Trägerfrequenzen oberhalb von 13 MHz zunehmend schlechtere Werte, da diese Frequenzen bereits in den Übergangsbereich der Tiefpaßfilter fallen und somit eine größere Dämpfung gegenüber den im Durchlaßbereich auftretenden Störkomponenten erfahren. Ein Vergleich mit der in Bild 4.10 dargestellten Simulationsreihe bestätigt zudem nochmals die Dominanz der durch den realen Digital/Analog-Umsetzer hervorgerufenen Störkomponenten gegenüber denen des numerisch gesteuerten Oszillators in bezug auf den störfreien Dynamikbereich.

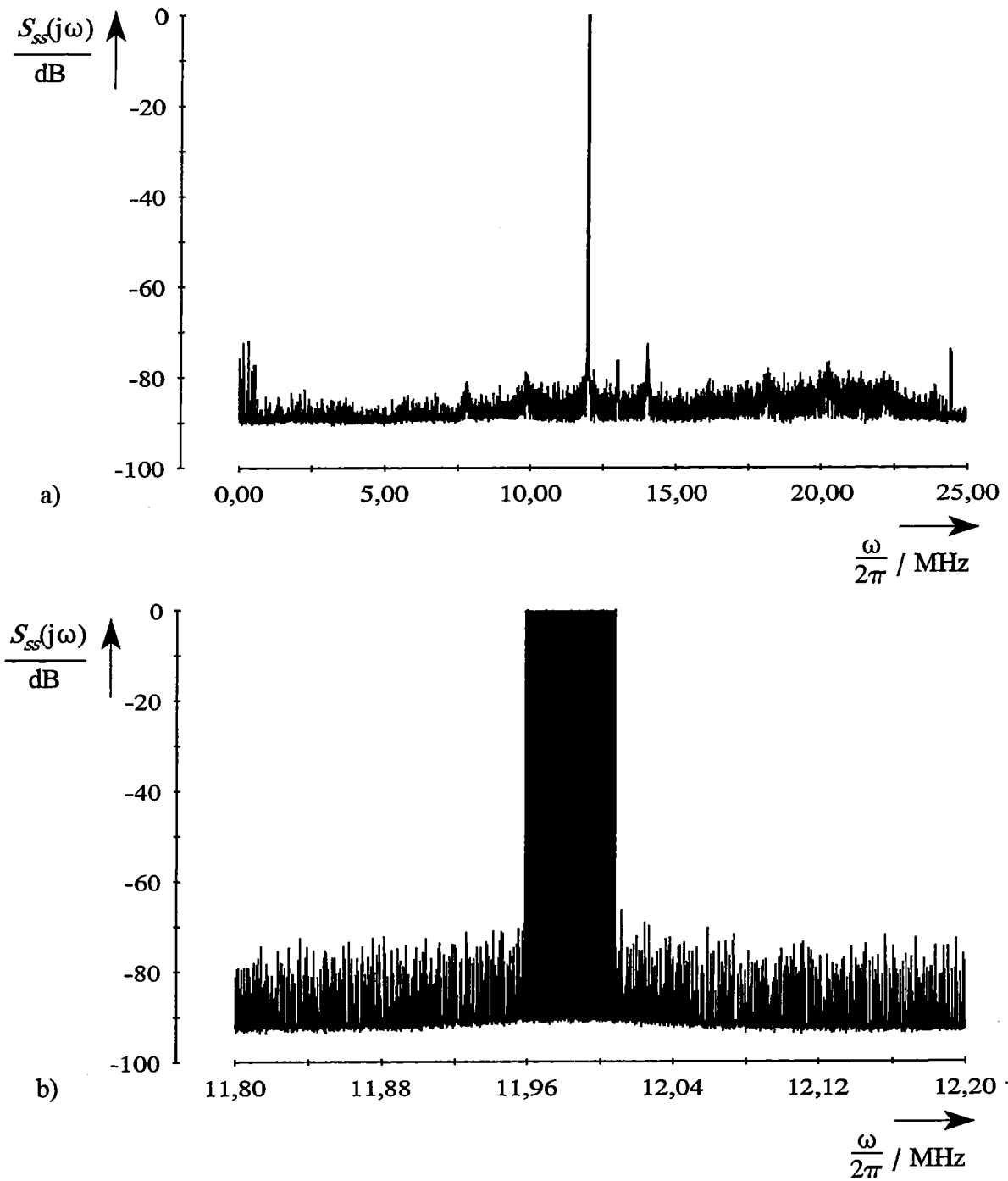
Die in diesem Abschnitt beschriebenen Untersuchungen mit dem unmodulierten System zeigen, daß die im Rahmen dieser Arbeit ausgewählte Kombination aus numerisch gesteuertem Oszillator STEL1175 und Digital/Analog-Umsetzer DAC600 — trotz zu erwartender Abweichungen gegenüber den Simulationsergebnissen aus Abschnitt 4.4.2 — über einen weiten Frequenzbereich gute spektrale Eigenschaften aufweist. Dies macht auch ein Vergleich mit dem kommerziell erhältlichen analogen Signalgenerator HP8625A deutlich, der beispielsweise bei einer Signalfrequenz von  $f_s = 11,98349$  MHz einen störfreien Dynamikbereich von 60,2 dB erreicht. Es wird deshalb davon ausgegangen, daß sich der Aufbau auch für die Synthese der schmalbandigen Rauschsignale eignet. Weiterhin bestätigen die dargestellten Meßergebnisse die Aussage, daß aufgrund der in Abschnitt 3.5 diskutierten Problematik der Digital/Analog-Umsetzung der Auswahl eines geeigneten Digital/Analog-Umsetzers bezüglich der hier verwendeten direkten digitalen Signalsynthese eine große Bedeutung zukommt. Die Untersuchungen im nächsten Abschnitt sollen daher anhand von Meßergebnissen zeigen, ob die ermittelten spektralen Eigenschaften des unmodulierten Systems auch bei der Synthese der bandbegrenzten Rauschsignale noch gelten.

### 5.4.2 Meßergebnisse bei vorgegebenen Leistungsdichtespektren

Den nachfolgenden Meßergebnissen liegen die gleichen Leistungsdichtespektren wie in Abschnitt 4.4.3 zugrunde. Somit können die Simulationsergebnisse den Meßergebnissen direkt gegenübergestellt und verglichen werden. Als Rechenvorschrift dient wiederum der in Abschnitt 4.3 abgeleitete Synthesealgorithmus, wobei hier allerdings die Berechnung der stochastischen Phasenfolgen  $\xi_1(n)$  und  $\xi_2(n)$  mit einer Datenwortlänge von 32 bit erfolgt. Die spektrale Leistungsdichte wird entsprechend der in Bild 5.3 dargestellten Meßanordnung am Ausgang des analogen Rekonstruktionsfilters mit Hilfe des Vektor-Signalanalysators ermittelt und auf den jeweiligen maximalen Leistungspegel normiert.

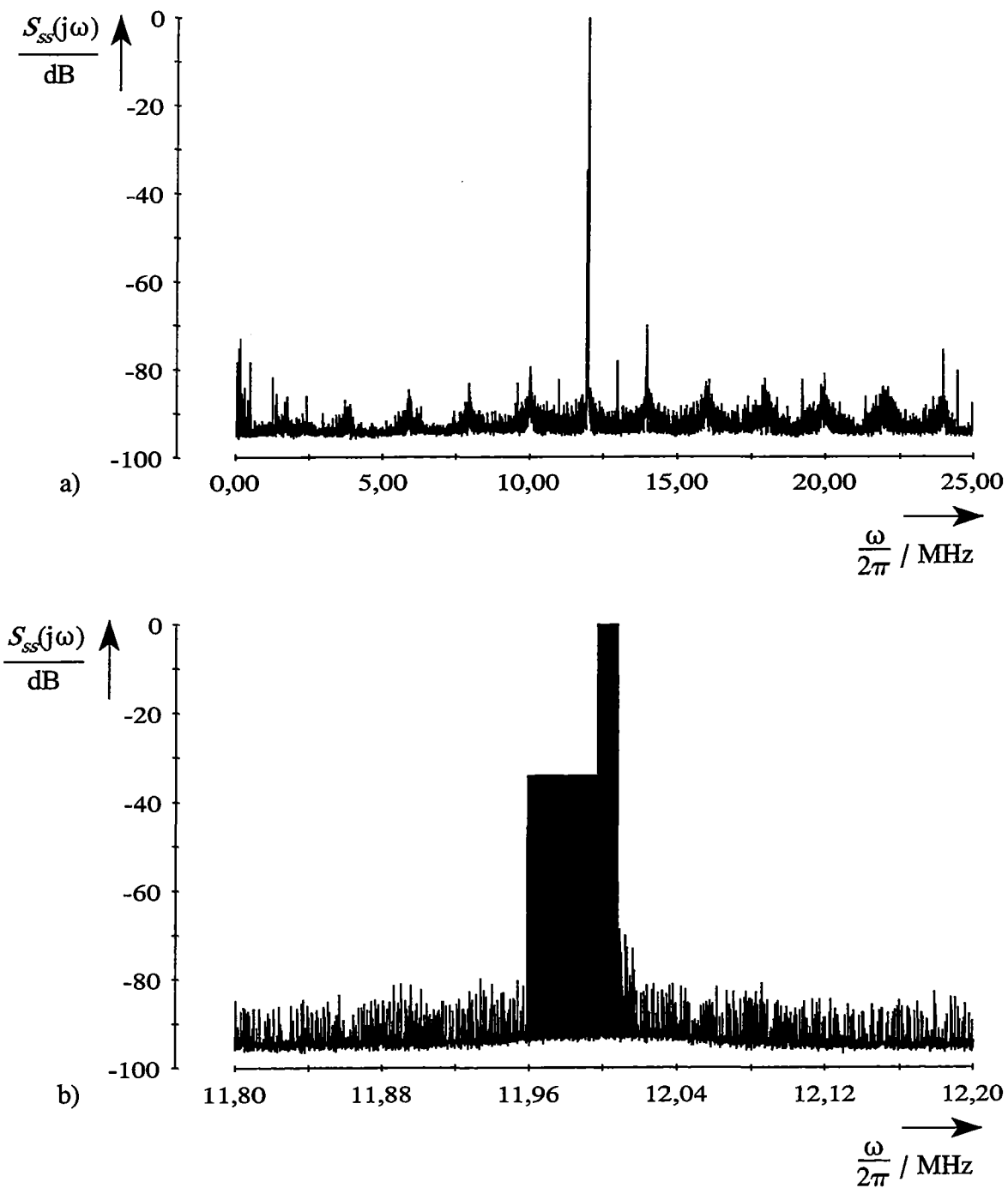
Zunächst sei das entsprechend der Vorgabe zu Bild 4.11 synthetisierte Rauschsignal betrachtet. Bild 5.7 zeigt das zugehörige gemessene Leistungsdichtespektrum. Ein Vergleich mit dem in Bild 4.11 abgebildeten Simulationsergebnis macht deutlich, daß Messung und Berechnung qualitativ gut übereinstimmen. Insbesondere ist die mit der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Schaltungsstruktur erreichbare hohe Flankensteilheit des erzeugten Rauschsignals zu beachten, die ohne Bandpaßfilterung erzielt wird und in dem hier dargestellten Beispiel 185 dB/Oktave beträgt.

Die durch die Quantisierung des Phasenwinkels der numerisch gesteuerten Oszillatoren und durch den realen Digital/Analog-Umsetzer verursachten Störkomponenten lassen sich auch im synthetisierten Leistungsdichtespektrum lokalisieren. Eine genauere Betrachtung der durch die numerisch gesteuerten Oszillatoren hervorgerufenen Störkomponenten unterstreicht die in Abschnitt 4.4.3 gemachte Aussage, daß diese entsprechend dem vorgegebenen Leistungsdichtespektrum moduliert werden. Gegenüber dem unmodulierten System treten allerdings hierbei nicht alle Störkomponenten im Leistungsdichtespektrum in Erscheinung. Der Grund dafür liegt zum einen in der Gewichtung des Leistungsdichtespektrums durch den Normierungsfaktor  $a_{norm}$  und zum anderen in der notwendigen Quantisierung der Phasenmodulationsfolgen. Wie Abschnitt 6.3 noch zeigen wird, führt das daraus resultierende Quantisierungsrauschen zu einer Anhebung des gesamten Rauschpegels, so daß alle Störkomponenten mit geringeren Amplitudenwerten nicht mehr zu erkennen sind. Diesen Effekt dokumentieren auch die Simulationsergebnisse in Abschnitt 4.4.3.

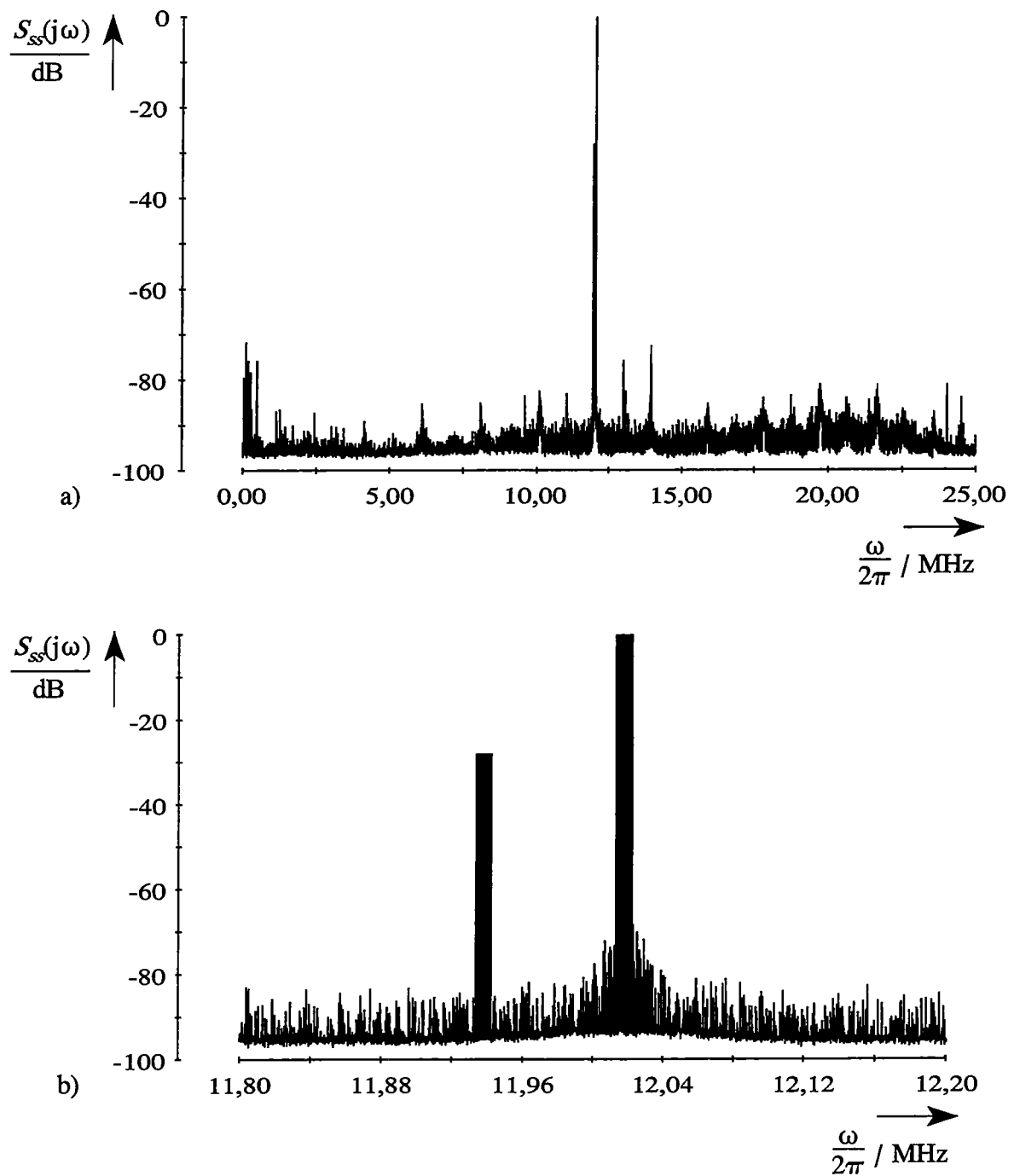


**Bild 5.7** Gemessenes Leistungsdichtespektrum; a) gesamte Periode; b) Ausschnitt symmetrisch zur Trägerfrequenz;  $f_0 = 11,98349$  MHz;  $f_{clk} = 50$  MHz





**Bild 5.8** Gemessenes Leistungsdichtespektrum; a) gesamte Periode; b) Ausschnitt symmetrisch zur Trägerfrequenz;  $f_0 = 11,98349 \text{ MHz}$ ;  $f_{clk} = 50 \text{ MHz}$



**Bild 5.9** Gemessenes Leistungsdichtespektrum a) gesamte Periode; b) Ausschnitt symmetrisch zur Trägerfrequenz;  $f_0 = 11,98349 \text{ MHz}$ ;  $f_{\text{clk}} = 50 \text{ MHz}$

Abweichungen zwischen dem berechneten und dem gemessenen Leistungsdichtespektrum ergeben sich einerseits bezüglich der mittleren Leistung und andererseits hinsichtlich des störfreien Dynamikbereiches. Diese beruhen in erster Linie auf den bereits im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Einflußgrößen des realen Digital/Analog-Umsetzers — wobei insbesondere die 3. Harmonische den störfreien Dynamikbereich bestimmt — und auf eine gegenüber den Simulationsparametern abweichenden maximalen Signalamplitude am Ausgang des Rauschgenerators (siehe Abschnitt 6.3). Ein Vergleich mit dem in Bild 4.11 dargestellten Leistungsdichtespektrum ergibt daher einen um ca. 6 dB verringerten störfreien Dynamikbereich und eine um ungefähr 2,2 dB geringere mittlere Leistung.

Eine Gegenüberstellung der in den Bildern 5.8 und 5.9 dargestellten gemessenen Leistungsdichtespektren mit den entsprechenden Simulationsergebnissen gemäß den Bildern 4.12 und 4.13 verdeutlicht gleichfalls die gute prinzipielle Übereinstimmung. Die vorgegebene Dämpfung einer festgelegten Anzahl von Spektrallinien wird mit 33,92 dB (Bild 5.8) und 27,96 dB (Bild 5.9) in Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen fast erreicht. Die auftretenden Störkomponenten sind auch bei diesen Leistungsdichtespektren deutlich zu erkennen. Abweichungen zwischen den berechneten und den gemessenen Werten resultieren wiederum aus den bei der Diskussion zu Bild 5.7 aufgezeigten Einflußgrößen. Verglichen mit den Resultaten aus Abschnitt 4.4.3 ergibt sich jeweils ein um ca. 4 dB verringerter störfreier Dynamikbereich und eine um ungefähr 1,9 dB geringere mittlere Leistung. Weitere Messungen mit anderen Vorgaben bezüglich der Bandbreite, der Amplitudengewichtung und der Mittenfrequenz bestätigen die Funktionsfähigkeit des realisierten digitalen Rauschgenerators [Hei 94].

Neben den numerisch gesteuerten Oszillatoren bestimmt somit — wie im Fall des unmodulierten Systems — der reale Digital/Analog-Umsetzer aufgrund der verursachten Intermodulationsverzerrungen auch die spektrale Reinheit des synthetisierten schmalbandigen Rauschsignales. Verschiedene Ansätze zur Minimierung dieser Störkomponenten [Mer 93, Spa 93] haben gezeigt, daß gegenüber den derzeit verfügbaren Digital/Analog-Umsetzern eine Verbesserung des störfreien Dynamikbereiches von mehr als 11 dB erzielt werden kann. Dies ist jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Als Ergebnis der Betrachtungen in diesem Kapitel läßt sich zusammenfassend festhalten, daß der auf der Grundlage der in Kapitel 4 entwickelten Schaltungsstruktur und des numerischen Synthesealgorithmus realisierte digitale Rauschgenerator in der Lage ist, schmalbandige Rauschsignale mit nahezu beliebig konfigurierbarer spektraler Leistungsdichte zu synthetisieren, wobei eine vergleichsweise hohe Flankensteilheit des erzeugten Rauschsignales ohne zusätzliche Bandpaßfilterung erzielt wird. Der Einsatz numerisch gesteuerter Oszillatoren ermöglicht dabei eine vergleichsweise einfache Variation der Trägerfrequenz in Realzeit. Die Untersuchungen in diesem Kapitel zeigen ferner, daß man durch geeignete Kombination von numerisch gesteuertem Oszillator und Digital/Analog-Umsetzer über einen weiten Frequenzbereich gute spektrale Eigenschaften erreichen kann. Infolge der notwendigen Periodizität der Phasenmodulationsfolgen besitzt das synthetisierte Leistungsdichtespektrum allerdings die Form eines Linienspektrums, dessen spektrale Auflösung durch die Periodenlänge der Phasenmodulationsfolgen und durch die Systemtaktrate bestimmt wird.

## 6 Statistische Untersuchungen mit dem digitalen Rauschgenerator

### 6.1 Einführung

Die Meßergebnisse in Kapitel 5 dokumentieren die Funktionsfähigkeit des realisierten digitalen Rauschgenerators. Die gute prinzipielle Übereinstimmung der Meßergebnisse mit den in Abschnitt 4.4 gewonnenen Ergebnissen der Simulation verdeutlicht dabei die Eignung und die Leistungsfähigkeit der entwickelten Schaltungsstruktur und des Synthesealgorithmus. Keinen Aufschluß geben die dargestellten Meßergebnisse allerdings über die statistischen Eigenschaften des synthetisierten Rauschsignales, die neben dem Gütekriterium *störfreier Dynamikbereich* die Qualität des Zufallssignales bestimmen. Weiterhin läßt sich anhand der in den Abschnitten 4.4.3 und 5.4.3 abgebildeten Leistungsdichtespektren keine vollständige Aussage darüber treffen, welchen Einfluß die numerisch gesteuerten Oszillatoren und der Normierungsfaktor auf die statistischen Kenngrößen des erzeugten Rauschsignales haben.

Bevor in Abschnitt 6.3 entsprechende Untersuchungen den Einfluß der numerisch gesteuerten Oszillatoren und des Normierungsfaktors  $a_{norm}$  auf die charakteristischen Eigenschaften des synthetisierten Rauschsignales veranschaulichen, steht im folgenden zunächst die Betrachtung der charakteristischen Eigenschaften des ideal generierten Rauschsignales anhand ausgewählter statistischer Kenngrößen im Mittelpunkt. Abschließend verdeutlicht Abschnitt 6.4 die Einsatzmöglichkeiten des digitalen Rauschgenerators an einem praktischen Beispiel.

### 6.2 Ausgewählte Begriffe zur Charakterisierung des Rauschsignales

#### 6.2.1 Allgemeines

Zur Beschreibung der charakteristischen Eigenschaften von Zufallsprozessen dienen statistische Kenngrößen. Für stochastische Signale lassen sich ebenfalls statistische Kenngrößen angeben, wobei im Hinblick auf die Signalverarbeitung insbesondere der arithmetische Mittelwert, der quadratische Mittelwert und die Varianz von spezieller Bedeutung sind. Allerdings tragen diese Momente 1. und 2. Ordnung nur zu einem

Teil zur Charakterisierung stochastischer Signale bei. Einen wesentlich höheren statistischen Informationswert über das stochastische Signal liefert hingegen die Autokorrelationsfunktion, da diese ein Maß für die Abhängigkeit zwischen den Werten des betrachteten Signales zu unterschiedlichen Zeitpunkten ist. Weiterhin liefert auch die Auswertung der Amplitudenverteilung stochastischer Signale einen Beitrag zu ihrer Charakterisierung. Aus der Amplitudenverteilung lassen sich beispielsweise die Varianz und die Standardabweichung bestimmen.

Im allgemeinen variieren die statistischen Eigenschaften eines stochastischen Signales mit der Zeit. Dies trifft für das im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Rauschsignal nicht zu, da es sich bei diesem, aufgrund der Festlegungen beim Synthesalgorithmus (vgl. Abschnitt 4.3.3), um ein stationäres, ergodisches Zufallssignal handelt. Infolgedessen sind die statistischen Eigenschaften gegenüber einer zeitlichen Verschiebung um den Ursprung invariant. Dies bedeutet, daß die Momente zeitunabhängig sind und die Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz abhängt. Zudem stimmt der Erwartungswert mit dem zeitlichen Mittelwert überein. Berücksichtigt man ferner die sich angesichts der praktischen Realisierung des digitalen Rauschgenerators ergebende Periodizität des synthetisierten Rauschsignales, so ist die Bestimmung der statistischen Kenngrößen exakt möglich, wenn das Beobachtungsintervall einem ganzzahligen Vielfachen der Periodenlänge entspricht.

### 6.2.2 Mittelwert, Varianz und Autokorrelationsfunktion

Zur Beurteilung der Auswirkungen der numerisch gesteuerten Oszillatoren und des Normierungsfaktors auf die statistischen Kenngrößen des synthetisierten Rauschsignales ist es sinnvoll, zunächst die charakteristischen Eigenschaften des vorgegebenen idealen Rauschsignales zu bestimmen, da diese als Referenz dienen sollen. Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bildet daher die reelle harmonische Zufallsfolge gemäß Gl. (4.39), die eine Musterfolge des auf der Grundlage eines vorgegebenen Leistungsdichtespektrums berechneten harmonischen Prozesses darstellt.

#### *Mittelwert und Varianz des ideal synthetisierten Rauschsignales*

Neben der Autokorrelationsfunktion werden insbesondere der Mittelwert und die Varianz zur Charakterisierung stochastischer Signale verwendet. Demzufolge sei für

den hier betrachteten Fall eines periodischen, ergodischen Zufallsprozesses der arithmetische Mittelwert definiert als

$$\mu_s = E\{s(n)\} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(n) , \quad (6.1)$$

mit  $N$  als Periodenlänge der betrachteten Musterfolge  $s(n)$  des Zufallsprozesses. Nach Einsetzen von Gl. (4.39) in Gl. (6.1) ergibt sich unter Anwendung der Summenorthogonalität der Exponentialfolgen [Schü 94]

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot \alpha \cdot n} = \frac{e^{j2\pi \cdot \alpha} - 1}{e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot \alpha} - 1} = \begin{cases} N , & \alpha = r \cdot N \\ 0 , & \alpha \neq r \cdot N \end{cases} , \quad \alpha, r \in \mathbb{I} , \quad (6.2)$$

der arithmetische Mittelwert der reellen harmonischen Zufallsfolge  $s(n)$  zu

$$\begin{aligned} \mu_s &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{v=m_1}^{m_2} |a_v| \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot n + \phi_v\right) \\ &= \sum_{v=m_1}^{m_2} |a_v| \cdot \cos \phi_v \cdot \delta_K(v - r \cdot N) , \quad r \in \mathbb{I} \\ &= 0 \quad \text{für } v \neq 0 . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die Varianz eines Zufallsprozesses ist im allgemeinen Fall definiert als die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert. Demnach gilt für die Varianz eines periodischen ergodischen Zufallsprozesses

$$\sigma_s^2 = E\{|s(n)|^2\} - |\mu_s|^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |s(n)|^2 - |\mu_s|^2 . \quad (6.4)$$

Daraus folgt mit Gl. (4.39) unter Verwendung von Gl. (6.2) und Gl. (6.3) sowie Gl. (4.37) für die Varianz der reellen harmonischen Zufallsfolge

$$\sigma_s^2 = \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{S_{aa}(v)}{2} = P_S , \quad \text{für } 0 < v < \frac{N}{2} . \quad (6.5)$$

Die Varianz des ideal synthetisierten Rauschsignales, in dem hier betrachteten Fall gleichbedeutend mit der mittleren Leistung  $P_S$ , wird somit nur durch die Amplitudengewichte der vorgegebenen Spektralanteile  $S_{aa}(\zeta)$  bestimmt (vgl. Bild 4.4).

*Autokorrelationsfunktion des ideal synthetisierten Rauschsignales*

Die Autokorrelationsfunktion eines ergodischen Zufallsprozesses hängt nur von der Zeitdifferenz ab, wobei der Erwartungswert mit dem zeitlichen Mittelwert übereinstimmt. Aus Gl. (4.40) folgt mit Gl. (4.39) und Gl. (6.2), unter Anwendung elementarer trigonometrischer Beziehungen, für die Autokorrelationsfolge der reellen harmonischen Zufallsfolge  $s(n)$

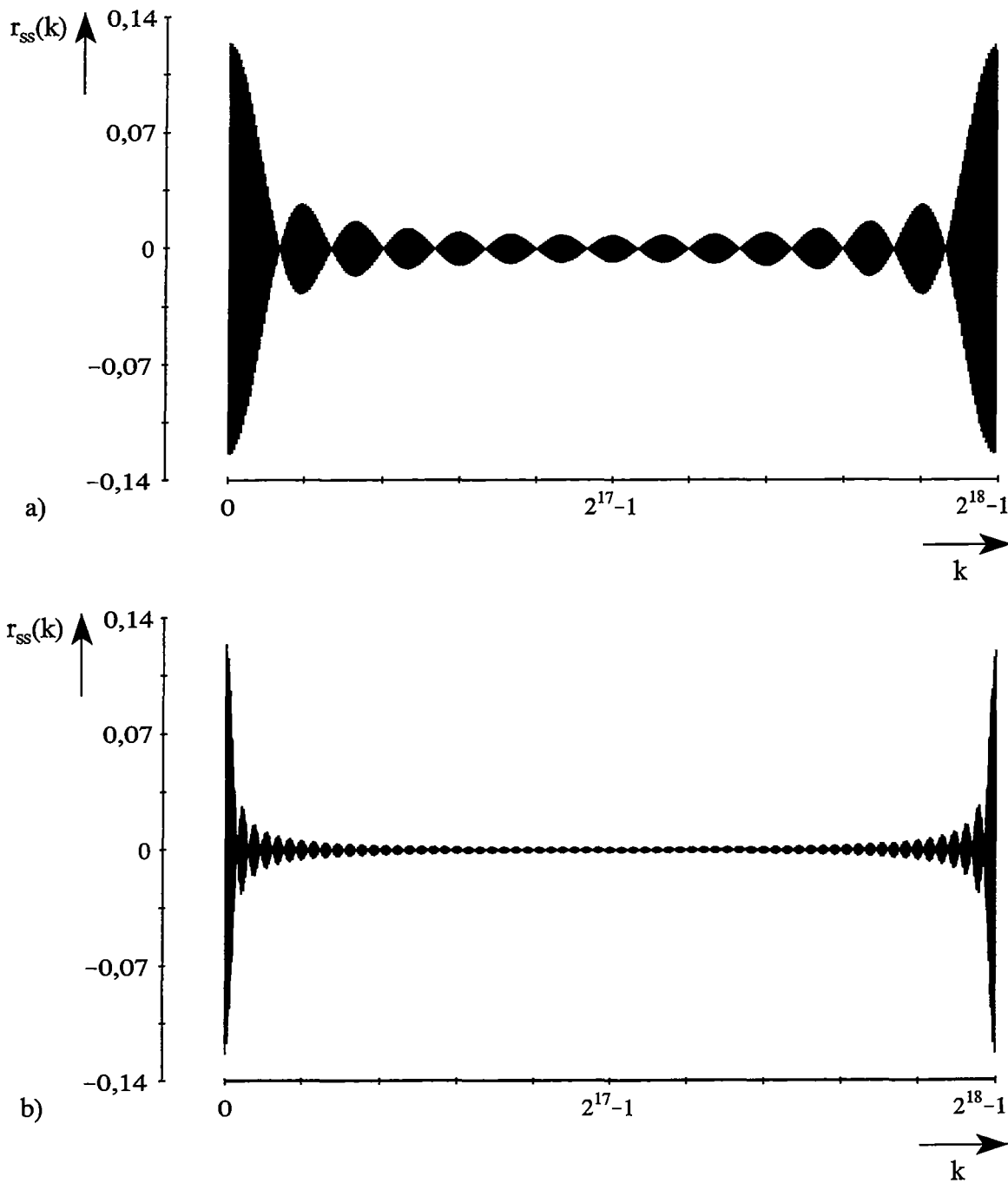
$$\begin{aligned}
 r_{ss}(k) &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu=m_1}^{m_2} \sum_{\mu=m_1}^{m_2} |a_\nu| \cdot |a_\mu| \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \nu \cdot n + \phi_\nu\right) \\
 &\quad \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{N} \cdot \mu \cdot (n+k) + \phi_\mu\right] \quad (6.6) \\
 &= \sum_{\nu=m_1}^{m_2} \frac{|a_\nu|^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \nu \cdot k\right) \quad \text{für } 0 < \mu, \nu < \frac{N}{2}.
 \end{aligned}$$

Die Autokorrelationsfolge des ideal synthetisierten Rauschsignales entspricht somit einer additiven Überlagerung von gewichteten Cosinus-Funktionen mit dem Maximum bei  $k=0$ . Der prinzipielle Verlauf und damit die Abhängigkeit zwischen den Werten wird folglich auch von der Anzahl  $R$  der von Null verschiedenen, vorgegebenen Spektralanteile bestimmt, was Bild 6.1 dokumentiert. Dort ist exemplarisch jeweils eine Periode der in Gl. (6.6) angegebenen Autokorrelationsfolge für eine unterschiedliche Anzahl  $R$  von Spektralanteilen des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums  $S_{aa}(\xi)$  dargestellt, wobei  $f_0 = 11,98349$  MHz,  $N = 2^{18}$  und  $P_S = 0,125$  gewählt wurde.

Die Fourieranalyse der periodischen Autokorrelationsfolge gemäß Gl. (4.23) ergibt die spektrale Leistungsdichte der reellen harmonischen Zufallsfolge. Man erhält unter Beachtung von Gl. (6.2)

$$\begin{aligned}
 S_{ss}(l) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\nu=m_1}^{m_2} \frac{|a_\nu|^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \nu \cdot k\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot l} \\
 &= N \cdot \sum_{\nu=m_1}^{m_2} \frac{|a_\nu|^2}{4} \cdot [\delta_K(l-\nu) + \delta_K(l+\nu-N)] \quad (6.7)
 \end{aligned}$$





**Bild 6.1** Eine Periode der berechneten Autokorrelationsfolge des idealen Rauschsignales für a)  $R = 40$  und b)  $R = 65$  Spektralkomponenten

und schließlich entsprechend der Definition der Beträge der komplexen Amplitudengewichte  $a_v$  nach Gl. (4.37)

$$S_{ss}(l) = \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{S_{aa}(v)}{4} \cdot [\delta_K(l-v) + \delta_K(l+v-N)] . \quad (6.8)$$

Unter der Annahme eines idealen Digital/Analog-Umsetzers folgt mit Gl. (4.18) für die Autokorrelationsfunktion des zeitkontinuierlichen Zufallssignales  $s_K(t)$  am Ausgang

$$r_{KK}(\tau) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot k\right) \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{\tau - kT}{T}\right) , \quad (6.9)$$

wobei die Impulsantwort des idealen Interpolationsfilters der eines idealen Tiefpaßfilters mit der Grenzfrequenz  $\pi / T$  entspricht. Das zugehörige Leistungsdichtespektrum ergibt sich daraus zu

$$\begin{aligned} S_{KK}(j\omega) &= \text{rect}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \cdot \pi \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{2} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ \delta\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} \cdot v - 2\pi \cdot l\right) \right. \\ &\quad \left. + \delta\left(\omega T + \frac{2\pi}{N} \cdot v - 2\pi \cdot l\right) \right] \\ &= \frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{S_{aa}(v)}{4} \cdot \left[ \delta\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} \cdot v\right) + \delta\left(\omega T + \frac{2\pi}{N} \cdot v\right) \right] . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Das Leistungsdichtespektrum des ideal rekonstruierten zeitkontinuierlichen Rauschsignales besitzt somit ebenfalls die Form eines Linienspektrums, wobei aufgrund des idealen Interpolationsfilters keine Spektralanteile oberhalb der Grenzfrequenz  $\pi / T$  auftreten können.

### 6.2.3 Amplitudenverteilung

Die Verteilungsdichte der Amplituden stellt eine weitere Kenngröße zur Charakterisierung eines stochastischen Signales dar. Im allgemeinen Fall eines unbekanntes stochastischen Signales läßt sich die interessierende Verteilungsdichtefunktion nä-

herungsweise durch meßtechnische Bestimmung eines sogenannten Histogramms ermitteln. Demgegenüber kann man in Kenntnis der Entstehung des stochastischen Signales aufgrund prinzipieller Überlegungen vielfach zu einem geschlossenen Ausdruck für die Verteilungsdichtefunktion gelangen.

Den Ausgangspunkt der nachfolgenden Überlegungen bildet aus Gründen einer übersichtlicheren Darstellung der reelle harmonische Prozeß nach Gl. (4.32). Dieser kann wegen der Orthogonalität der komplexen Zufallsvariablen  $A_\nu$  als Linearkombination voneinander statistisch unabhängiger, reeller harmonischer Zufallsfunktionen der Form

$$\begin{aligned} s_\nu &= s_\nu(n) = |A_\nu| \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \nu \cdot n + \Phi_\nu\right) \\ &= a \cdot \cos(k_n + \Phi), \quad a > 0, \quad \nu = \text{const.}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

aufgefaßt werden, wobei für  $\nu = \text{const.}$  der Betrag  $|A_\nu| = a$  eine positive reelle Konstante darstellt und die Phase  $\Phi$  einer im Intervall  $[-\pi, \pi]$  gleichverteilten zeitunabhängigen Zufallsvariablen entspricht (vgl. Abschnitt 4.3.3).

Grundsätzlich ergibt sich die Verteilungsdichtefunktion einer Summe voneinander statistisch unabhängiger Zufallsvariablen aus der Faltung der jeweiligen Verteilungsdichtefunktionen der einzelnen Summanden. Es gilt [Pap 91, Schü 94]

$$p_s(x) = \underset{\nu}{*} p_{s_\nu}(x) = p_{s_1}(x) * p_{s_2}(x) * p_{s_3}(x) * \dots \quad (6.12)$$

Aus Gl. (6.11) ist unmittelbar zu erkennen, daß für beliebiges  $n \in \mathbb{I}$  die Zufallsvariable  $s_\nu$  einer Funktion  $g(\Phi)$  der Zufallsvariablen  $\Phi$  entspricht. Zur Berechnung der gesuchten Verteilungsdichtefunktion  $p_{s_\nu}(x)$  geht man deshalb sinnvollerweise von den Lösungen der Gleichung  $s_\nu = g(\Phi)$  aus. Aufgrund der Periodizität der Cosinus-Funktion existieren jedoch für jedes  $s_\nu$  unendlich viele Lösungen  $\varphi_\mu, \mu \in \mathbb{N}$ . Unter Berücksichtigung dieses Sachverhaltes erhält man für die Verteilungsdichte  $p_{s_\nu}(x)$

$$p_{s_\nu}(x) = \sum_{\mu} \frac{p_{\Phi}(\varphi_\mu)}{|g'(\varphi_\mu)|}, \quad g'(\varphi_\mu) = \left. \frac{dg(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi = \varphi_\mu} \quad (6.13)$$

Da die Phase  $\Phi$  — wie bereits erwähnt — in dem hier betrachteten Fall jedoch einer im Intervall  $[-\pi, \pi]$  gleichverteilten Zufallsvariablen entspricht, hat die Umkehrfunktion  $g^{-1}(s_\nu)$  unabhängig von  $n$  genau zwei Lösungen. Demzufolge erhält man mit Gl. (6.13) und Gl. (6.11) für die Verteilungsdichtefunktion der Zufallsvariablen  $s_\nu$

$$p_{s_\nu}(x) = \sum_{\mu=1}^2 \frac{p_\Phi(\varphi_\mu)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} \quad (6.14)$$

und schließlich unter Berücksichtigung von Gl. (4.36)

$$p_{s_\nu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} & , \quad x \in [-a, a] \\ 0 & , \quad x \notin [-a, a] \end{cases} \quad (6.15)$$

Die Verteilungsdichtefunktion weist an den Stellen  $|x| = a$  Singularitäten auf. Eine numerische Berechnung der Verteilungsdichte des reellen harmonischen Prozesses nach Gl. (6.12) ist daher nur näherungsweise möglich.

In der Regel ist die Bestimmung der Faltungsoperation nach Gl. (6.12) recht mühsam und aufwendig. Eine oft viel einfacher durchzuführende Berechnungsmethode führt über die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen, die bis auf einen Vorzeichenwechsel von  $\omega$  die Fouriertransformierte der Verteilungsdichtefunktion ist [Pap 91, Schü 94]. Demnach ergibt sich unter Beachtung von Gl. (6.12) für die charakteristische Funktion einer Summe voneinander statistisch unabhängiger Zufallsvariablen

$$C_s(j\omega) = \prod_{\nu} C_{s_\nu}(j\omega) \quad (6.16)$$

mit

$$C_{s_\nu}(j\omega) = E\{e^{j\omega s_\nu}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} \cdot p_{s_\nu}(x) dx \quad (6.17)$$

als charakteristische Funktion der Zufallsvariablen  $s_\nu$ . Die charakteristische Funktion einer Summe voneinander statistisch unabhängiger Zufallsvariablen ist somit das Produkt der einzelnen charakteristischen Funktionen.

Nach Einsetzen von Gl. (6.15) in Gl. (6.17) erhält man für den hier betrachteten Fall einer harmonischen Zufallsfunktion

$$C_{s_v}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \cdot \int_{-a}^a \frac{e^{j\omega x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx \quad (6.18)$$

und daraus mit der Substitution  $z = x/a$  und  $dx = a \cdot dz$ , die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen  $s_v$  zu

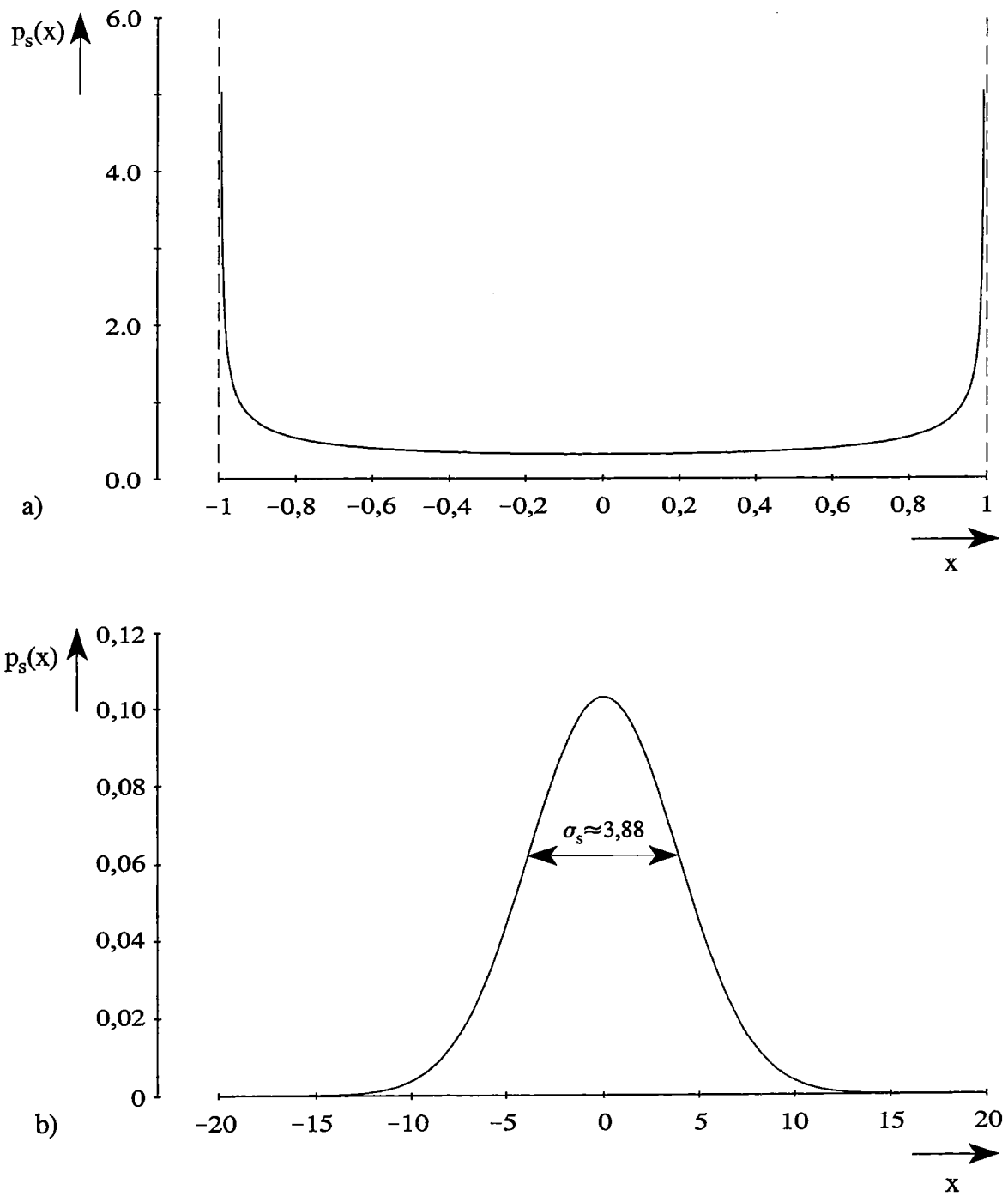
$$\begin{aligned} C_{s_v}(j\omega) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 \frac{e^{ja\omega z}}{\sqrt{1 - z^2}} dz \\ &= J_0(a\omega) , \end{aligned} \quad (6.19)$$

wobei  $J_0(a\omega)$  die Besselfunktion erster Art, nullter Ordnung beschreibt. Unter Berücksichtigung der Ergodizität des reellen harmonischen Prozesses lautet schließlich mit Gl. (6.16) die charakteristische Funktion des ideal synthetisierten Rauschsignales

$$C_s(j\omega) = \prod_{v=1}^R J_0(|a_v|\omega) , \quad |a_v| > 0 . \quad (6.20)$$

Die charakteristische Funktion hängt demnach im wesentlichen von der Gewichtung  $|a_v|$  und der Anzahl  $R$  der Spektralanteile des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums ab. Die Verteilungsdichte  $p_s(x)$  des ideal synthetisierten Rauschsignales erhält man aus Gl. (6.20) durch inverse Fouriertransformation. Bild 6.2 zeigt exemplarisch zwei dementsprechend berechnete Verteilungsdichten des idealen Rauschsignales für eine unterschiedliche Anzahl  $R$  von Null verschiedener Spektralanteile des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums, wobei  $|a_v| = 1$  gewählt wurde.

Anhand der dargestellten Diagramme läßt sich eine wichtige Eigenschaft der Verteilungsdichte des harmonischen Prozesses, die durch den sogenannten zentralen Grenzwertsatz beschrieben wird, nachvollziehen. Der zentrale Grenzwertsatz besagt, daß die Verteilungsdichte einer Summe von  $R$  voneinander statistisch unabhängiger Zufallsvariablen, mit den beliebigen Verteilungsdichten  $p_{s_v}(x)$ , den Mittelwerten  $\mu_{s_v}$



**Bild 6.2** Berechnete Verteilungsdichte der Amplituden des idealen Rauschsignals für a)  $R = 1$  und b)  $R = 30$  Spektralkomponenten

und den Varianzen  $\sigma_{s_v}^2$ , für unbegrenzt wachsendes  $R$  gegen die Normalverteilungsdichte strebt. Hinsichtlich des synthetisierten Rauschsignales stellt sich somit die Frage, wie groß die Anzahl  $R$  der von Null verschiedenen Spektralanteile des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums sein muß, damit die Verteilungsdichte  $p_s(x)$  in hinreichend guter Näherung als Normalverteilungsdichte aufgefaßt werden kann.

Grundsätzlich hängt die Anzahl  $R$  der zu summierenden Zufallsvariablen für ein bestimmtes Fehlermaß bezüglich der Normalverteilung von der jeweiligen Form der Verteilungsdichten der Zufallsvariablen ab. So ist beispielsweise bei voneinander statistisch unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen mit identischen Verteilungsdichten nach [Pap 91]  $R = 30$  für eine Vielzahl von Anwendungen ein adäquater Wert. Als Gütekriterium zur Beantwortung der zuvor gestellten Frage soll die gegenüber der Normalverteilung auftretende Abweichung  $\varepsilon_N(s)$  dienen. Zur Bestimmung der interessierenden Abweichung  $\varepsilon_N(s)$  ist es aufgrund der bei den Verteilungsdichten  $p_{s_v}(x)$  auftretenden Singularitäten zweckmäßig, nicht die Faltungsoperation nach Gl. (6.12) zu verwenden, sondern ein Fehlermaß in Abhängigkeit der Momente des zugrunde liegenden Rauschsignales wie folgt zu definieren [Pap 91]:

$$\varepsilon_N(s) = \frac{1}{\sigma_s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{s^2}{2 \cdot \sigma_s^2}} \cdot \sum_{n=3}^{\infty} C_n \cdot He_n\left(\frac{s}{\sigma_s}\right), \quad (6.21)$$

wobei  $\sigma_s^2$  der mittleren Leistung des Rauschsignales gemäß Gl. (6.5) entspricht und  $He_n(x)$  die Hermiteschen Polynome beschreibt. Diese lauten [Abr 84]

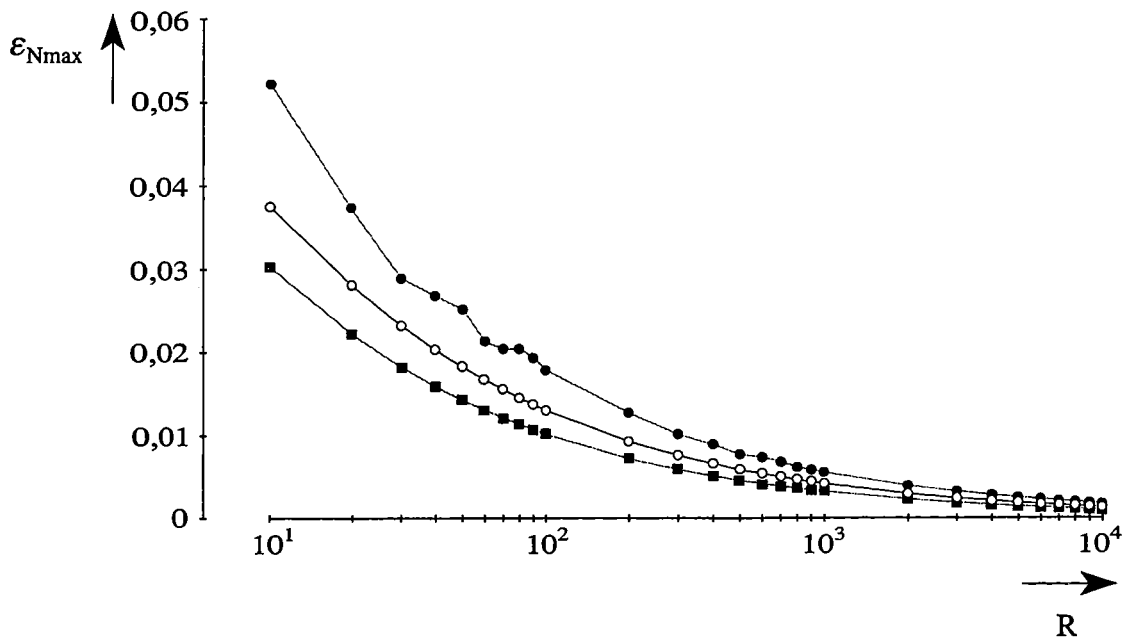
$$He_n(x) = 2^{-\frac{n}{2}} \cdot H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = n! \cdot \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \cdot \frac{x^{n-2m}}{m! \cdot (n-2m)! \cdot 2^m}. \quad (6.22)$$

Die Koeffizienten  $C_n$  lassen sich für den hier betrachteten Fall zu

$$C_n = \frac{E\{s^n\}}{n! \cdot \sigma_s^n} - \frac{1}{n!} \cdot \prod_{i=1}^v (2i-1), \quad n = 2v, \quad v \in \mathbb{N}_0, \quad (6.23)$$

bestimmen, da die Normalverteilungsdichte und die Verteilungsdichte  $p_s(x)$  gerade Funktionen sind und demzufolge  $C_n = 0$  für  $n = 2v + 1$  gilt. In Bild 6.3 sind die nach Gl. (6.21) berechneten maximalen Abweichungen  $\varepsilon_{N\max} = \max |\varepsilon_N(s)|$  gegenüber der Normalverteilung für eine unterschiedliche Anzahl von Spektrallinien dargestellt. Die

Gewichtung der Spektrallinien wurde hierbei zum einen entsprechend den zu den Bildern 4.11 (■) und 4.12 (○) exemplarisch vorgegebenen Leistungsdichtespektren und zum anderen für jede Spektralkomponente zufällig (●) gewählt. Es sei allerdings darauf hingewiesen, daß es sich bei den abgebildeten Werten aufgrund der unendlichen Summe in Gl. (6.21) um eine Näherung handelt.



**Bild 6.3** Maximale Abweichung  $\varepsilon_{N_{\max}}$  gegenüber der Normalverteilung in Abhängigkeit von der Anzahl und der Gewichtung der Spektrallinien; (■): gleichgewichtet; (○): treppenförmig gewichtet; (●): zufällig gewichtet

Die Ergebnisse lassen erkennen, daß mit zunehmender Anzahl der im vorgegebenen Leistungsdichtespektrum enthaltenen Spektralanteile der maximale Fehler  $\varepsilon_{N_{\max}} = \max |\varepsilon_N(s)|$  geringer wird und somit die Verteilungsdichte der Amplituden gegen die Normalverteilung strebt. Das abgebildete Diagramm veranschaulicht ferner die Abhängigkeit des Fehlers von der jeweiligen Form der Verteilungsdichten  $p_{s_v}(x)$ , die in dem hier betrachteten Fall von den jeweiligen Amplitudengewichten  $|a_v|$  und damit von der vorgegebenen spektralen Leistungsdichte bestimmt wird (vgl. Gl. (6.15)). Die unterschiedliche Gewichtung aller Spektralkomponenten stellt dabei den ungünstigsten Fall dar. Das Diagramm zeigt jedoch, daß die Abhängigkeit von der Amplitudengewichtung mit zunehmender Anzahl von Spektralanteilen abnimmt.



## 6.3 Charakteristische Eigenschaften des synthetisierten Rauschsignales

### 6.3.1 Einfluß des Normierungsfaktors auf die statistischen Kenngrößen

Im folgenden wird die Auswirkung des Normierungsfaktors  $a_{norm}$  auf die statistischen Kenngrößen des synthetisierten Rauschsignales untersucht. Als Referenz dienen hierbei die im vorhergehenden Abschnitt berechneten Kenngrößen des idealen Rauschsignales. Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bildet die entsprechend Gl. (4.2) synthetisierte Zufallsfolge  $s(n)$ , da weiterhin Systemkomponenten mit idealen Eigenschaften vorausgesetzt seien, so daß keine Quantisierungseffekte auftreten.

#### Mittelwert und Varianz

Ausgehend von Gl. (6.1) folgt mit Gl. (4.2) unter Berücksichtigung von Gl. (4.44) für den Mittelwert der synthetisierten reellen Zufallsfolge

$$\begin{aligned} \mu_a &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|a(n)|}{a_{norm}} \cdot \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot n + \phi(n) \right] \\ &= \frac{1}{2 a_{norm}} \cdot \left[ \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot n} + \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a^*(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot n} \right] \end{aligned} \quad (6.24)$$

wobei  $a(n)$  der komplexen stochastischen Einhüllenden der vorgegebenen reellen harmonischen Zufallsfolge entspricht und  $\Omega_0 = 2\pi \cdot m_0 / N$  die normierte Trägerkreisfrequenz beschreibt. Somit ergibt sich nach Einsetzen von Gl. (4.42) und unter Anwendung von Gl. (6.2) der Mittelwert zu

$$\begin{aligned} \mu_a &= \frac{1}{a_{norm}} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} |a_v| \cdot \cos \phi_v \cdot \delta_K(v - r \cdot N), \quad r \in \mathbb{I} \\ &= \frac{1}{a_{norm}} \cdot \mu_s = 0 \quad \text{für } v \neq 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

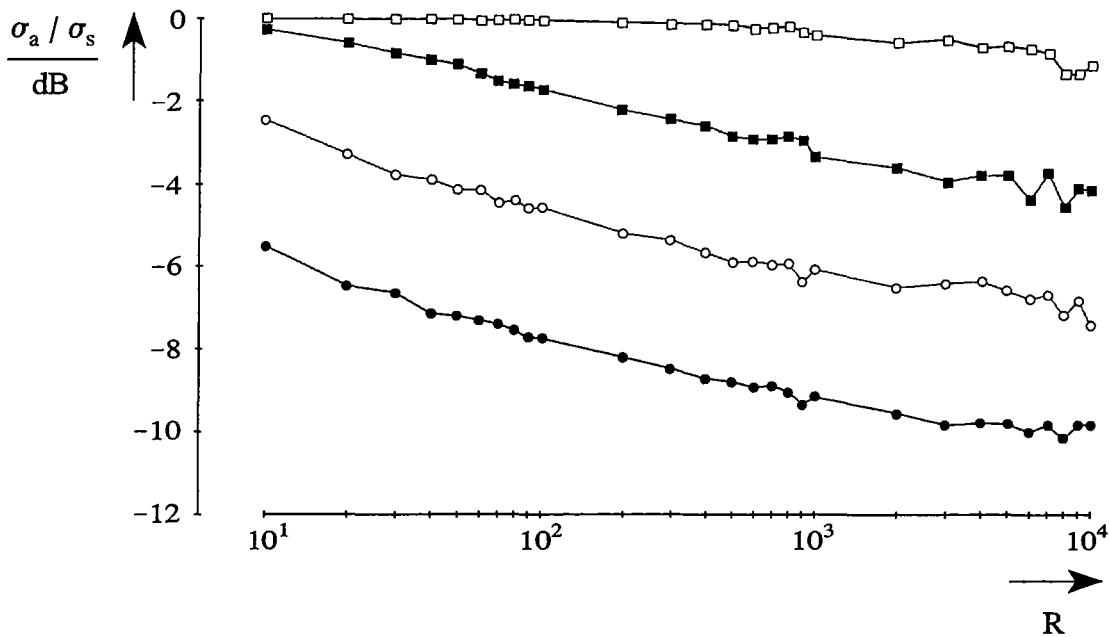
In Analogie zur vorhergehenden Betrachtung des Mittelwertes erhält man mit Gl. (6.4) für die Varianz der synthetisierten reellen Zufallsfolge

$$\begin{aligned}
\sigma_a^2 &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|a(n)|^2}{a_{norm}^2} \cdot \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot n + \phi(n) \right] \\
&= \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{2} = \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \sigma_s^2 .
\end{aligned}
\tag{6.26}$$

Ein Vergleich von Gl. (6.25) mit Gl. (6.3) und von Gl. (6.26) mit Gl. (6.5) zeigt, daß grundsätzlich der Mittelwert und die Varianz durch den Normierungsfaktor beeinflusst werden. In dem hier betrachteten Fall hat dies für den Mittelwert allerdings keine Auswirkung, da die vorgegebene spektrale Leistungsdichte definitionsgemäß nicht die Frequenz  $f = 0$  enthält (vgl. Gl. (4.31)). Demgegenüber erfährt die Varianz jedoch eine Gewichtung durch den Normierungsfaktor. Da in der Regel die Varianz eines stationären mittelwertfreien Zufallsprozesses seiner mittleren Leistung entspricht [Schü 94], bedeutet ein Wert des Normierungsfaktors von  $a_{norm} > 1$  (vgl. Gl. (4.49)) folglich eine gegenüber der vorgegebenen Leistungsdichte verringerte mittlere Leistung des synthetisierten Rauschsignales.

Die optimale Wahl des Normierungsfaktors wird durch die nach Gl. (4.48) gegebene untere Schranke bestimmt. Eine erneute Betrachtung dieser Gleichung läßt erkennen, daß der Betrag des Normierungsfaktors im wesentlichen von der Gewichtung und der Anzahl  $R$  der von Null verschiedenen Spektralanteile des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums  $S_{aa}(\nu)$  und damit von der jeweils geforderten mittleren Leistung, der spektralen Auflösung und der Bandbreite abhängt. Bild 6.4 veranschaulicht die Abweichung gegenüber der vorgegebenen mittleren Leistung für eine unterschiedliche Anzahl von Spektralanteilen. Die Simulationsergebnisse basieren auf der Nachbildung des idealen digitalen Systems gemäß Gl. (4.2), wobei die Amplitudengewichte zu  $|a_v| = \sqrt{2 \cdot P_s / R}$ ,  $m_1 \leq v \leq m_2$ , gewählt wurden.

Wie der Ergebnisgrafik in Bild 6.4 zu entnehmen ist, vermindert sich die mittlere Leistung des synthetisierten Rauschsignales mit zunehmender Anzahl  $R$  der von Null verschiedenen Spektralanteile. Die Abweichung vergrößert sich zudem mit steigender Varianz  $\sigma_s^2$  der vorgegebenen spektralen Leistungsdichte. Eine weitere, hier nicht



**Bild 6.4** Verminderung der mittleren Leistung in Abhängigkeit von der Anzahl  $R$  der Spektralanteile gegenüber der vorgegebenen Leistungsdichte;  
 $\square$ :  $\sigma_s^2 = 0,0625$ ;  $\blacksquare$ :  $\sigma_s^2 = 0,125$ ;  $\circ$ :  $\sigma_s^2 = 0,25$ ;  $\bullet$ :  $\sigma_s^2 = 0,5$ .

dargestellte Simulationsreihe ergibt ferner eine Abhängigkeit des Normierungsfaktors und somit der erzielbaren mittleren Leistung von der Form des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums. Demnach stellt die Bild 6.4 zugrunde liegende Gleichgewichtung der Amplituden  $|a_v|$  den ungünstigsten Fall dar.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß im wesentlichen die Anzahl  $R$  und die Gewichtung  $S_{aa}(\zeta)$  der Spektrallinien sowie die Varianz  $\sigma_s^2$  der gewünschten Leistungsdichte den Normierungsfaktor und damit die erzielbare mittlere Leistung des synthetisierten Rauschsignales bestimmen.

#### Autokorrelationsfunktion

Die Grundlage zur Bestimmung der Autokorrelationsfolge bildet wiederum Gl. (4.40). Nach Einsetzen von Gl. (4.2) folgt mit Gl. (4.44) unter Beachtung der Stationarität der Zufallsfolge

$$\begin{aligned}
r_{ss}(k) &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \cos \Theta(n) \cdot \cos \Theta(n+k) \cdot \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot n + \phi(n) \right] \cdot \\
&\quad \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot (n+k) + \phi(n+k) \right] \\
&= \frac{1}{2 a_{norm}^2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |a(n)| \cdot |a(n+k)| \cdot \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot k - \right. \\
&\quad \left. \phi(n) + \phi(n+k) \right].
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Anhand einer Gegenüberstellung mit der Autokorrelationsfolge des Bandpaßprozesses nach Gl. (2.21) wird deutlich, daß für Gl. (6.27) unter Beachtung von Gl. (2.20) auch

$$r_{ss}(k) = \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a^*(n) \cdot a(n+k) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot m_0 \cdot k} \right\} \tag{6.28}$$

geschrieben werden kann. Mit der komplexen stochastischen Einhüllenden  $a(n)$  der vorgegebenen reellen harmonischen Zufallsfolge gemäß Gl. (4.42) resultiert schließlich für die Autokorrelationsfolge der synthetisierten Zufallsfolge

$$r_{ss}(k) = \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{2} \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot k \right). \tag{6.29}$$

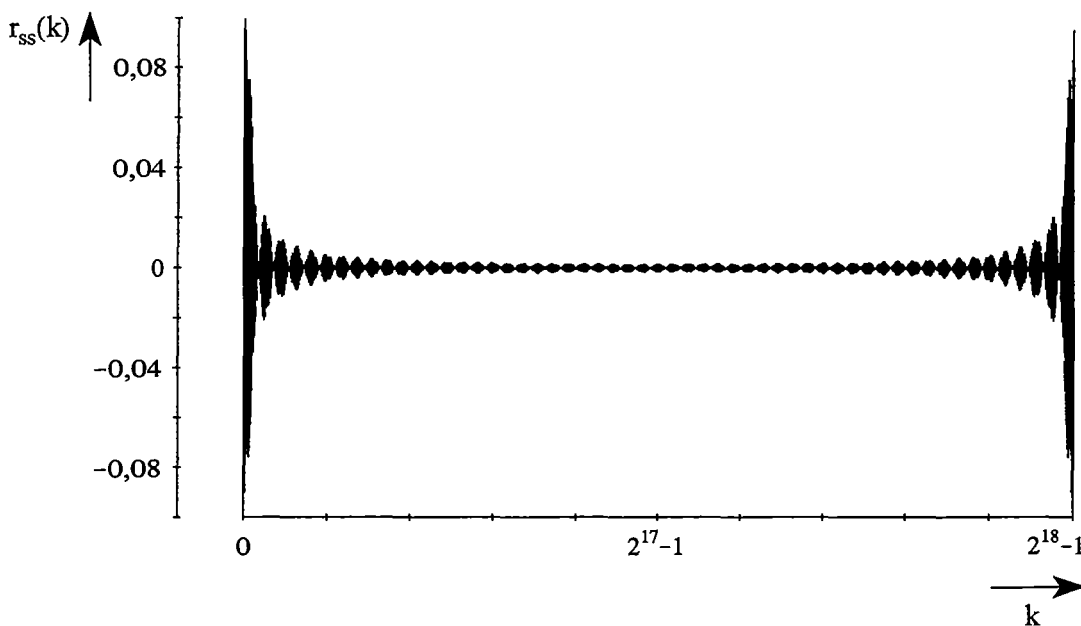
Die Fouriertransformation der Autokorrelationsfolge ergibt wiederum die spektrale Leistungsdichte. Diese lautet

$$\begin{aligned}
S_{ss}(l) &= \frac{N}{a_{norm}^2} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{4} \cdot [\delta_K(l-v) + \delta_K(l+v-N)] \\
&= \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{S_{aa}(v)}{4} \cdot [\delta_K(l-v) + \delta_K(l+v-N)].
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Aus den Gleichungen (6.29) und (6.30) ist unmittelbar die Auswirkung des Normierungsfaktors auf die Autokorrelationsfolge und die spektrale Leistungsdichte zu erkennen, die einer zusätzlichen Gewichtung entspricht. Dies bestätigt auch ein Ver-

gleich mit Gl. (6.6) und Gl. (6.8). Aufgrund der Zeitunabhängigkeit des Normierungsfaktors wird der prinzipielle Verlauf der Autokorrelationsfolge dadurch jedoch nicht beeinflusst.

In Bild 6.5 ist exemplarisch eine Periode der in Gl. (6.29) angegebenen Autokorrelationsfolge dargestellt, wobei die Systemparameter entsprechend denen zu Bild 6.1 gewählt wurden. Der Wert des Normierungsfaktors beträgt hierbei  $a_{norm} = 1,1366$ .



**Bild 6.5** Berechnete Periode der mit dem Normierungsfaktor  $a_{norm} = 1,1366$  gewichteten Autokorrelationsfolge des synthetisierten Rauschsignales

Eine Gegenüberstellung mit der in Bild 6.1 abgebildeten Autokorrelationsfolge verdeutlicht die durch den Normierungsfaktor verursachte Verringerung der mittleren Leistung des synthetisierten Rauschsignales gegenüber der des idealen Rauschsignales. Die Abweichung beträgt in dem hier betrachteten Fall knapp 1,1 dB.

#### *Amplitudenverteilung*

Die Basis zur Untersuchung der Auswirkung des Normierungsfaktors auf die Amplitudenverteilung des synthetisierten Rauschsignales stellt der reelle Bandpaßprozeß gemäß Gl. (4.2) dar. Dieser kann unter Berücksichtigung der komplexen stochastischen Einhüllenden nach Gl. (4.42) und mit Gl. (4.44) zu

$$s(n) = \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|A_v|}{a_{norm}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot n + \Phi_v\right) \quad (6.31)$$

umgeformt werden. Eine Gegenüberstellung mit Gl. (6.11) läßt erkennen, daß es sich hierbei ebenfalls um eine Linearkombination voneinander statistisch unabhängiger Zufallsfunktionen handelt, deren Amplituden zusätzlich mit dem konstanten Normierungsfaktor  $a_{norm}$  gewichtet sind. In Analogie zu Gl. (6.11) gilt

$$\begin{aligned} s_v = s_v(n) &= \frac{|A_v|}{a_{norm}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot v \cdot n + \Phi_v\right) \\ &= \frac{a}{a_{norm}} \cdot \cos(k_n + \Phi), \quad a, a_{norm} > 0, \quad v = \text{const.} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Daraus folgt mit Gl. (6.13) und Gl. (4.36) für die Verteilungsdichtefunktion der Zufallsvariablen  $s_v$ ,

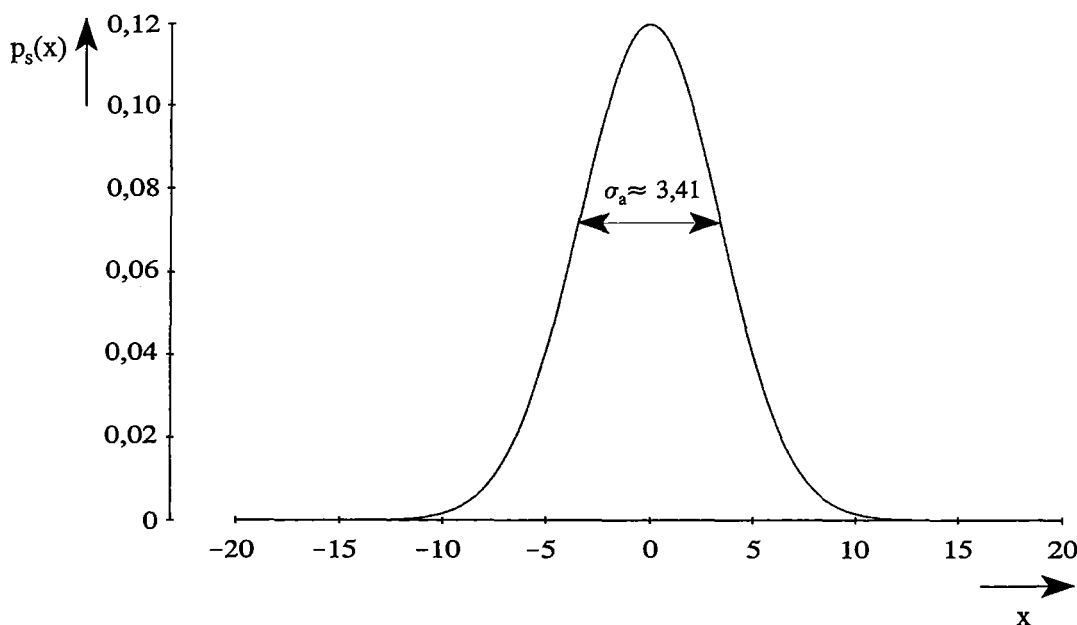
$$p_{s_v}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{a_{norm}}\right)^2 - x^2}}, & x \in \left[-\frac{a}{a_{norm}}, \frac{a}{a_{norm}}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{a}{a_{norm}}, \frac{a}{a_{norm}}\right] \end{cases} \quad (6.33)$$

und schließlich unter Beachtung von Gl. (6.17) die charakteristische Funktion zu

$$C_{s_v}(j\omega) = J_0\left(\frac{a}{a_{norm}} \cdot \omega\right). \quad (6.34)$$

Im Unterschied zur Autokorrelationsfunktion verändert der Normierungsfaktor nun die Form der einzelnen Verteilungsdichten  $p_{s_v}(x)$ , wie ein Vergleich von Gl. (6.33) mit Gl. (6.15) verdeutlicht. Auf den prinzipiellen Verlauf der Verteilungsdichte  $p_s(x)$  des synthetisierten Rauschsignales hat dies jedoch keinen Einfluß, da sich der Normierungsfaktor auf alle Verteilungsdichten in gleichem Maße auswirkt, was auch die in Bild 6.6 dargestellte Verteilungsdichte  $p_s(x)$  dokumentiert. Die Basis zur Berech-

nung der Verteilungsdichte bildete wiederum Gl. (6.16) unter Beachtung von Gl. (6.34), wobei in Anlehnung an die bisherige Betrachtung  $R = 30$  und  $a_{norm} = 1,1366$  gewählt wurde.



**Bild 6.6** Berechnete Verteilungsdichte der Amplituden des synthetisierten Rauschsignales mit  $R = 30$  und  $a_{norm} = 1,1366$

Eine Gegenüberstellung von Bild 6.6 mit Bild 6.2 zeigt denn auch keine qualitativen Unterschiede. Eine genauere Betrachtung der beiden Verteilungsdichten läßt allerdings die Auswirkung des Normierungsfaktors auf die Varianz erkennen. In Übereinstimmung mit Gl. (6.26) beträgt die mittlere Leistung  $\sigma_a^2 \approx 0,7741 \cdot \sigma_s^2$ . Die maximale Abweichung bezüglich der Normalverteilung ist hingegen bei beiden Verteilungsdichten mit  $\varepsilon_{Nmax} \approx 1,81 \cdot 10^{-2}$  identisch.

Die Untersuchungen in diesem Abschnitt haben gezeigt, daß der aufgrund der Definition nach Gl. (6.1) notwendige Normierungsfaktor eine Gewichtung der Varianz und der Autokorrelationsfolge bewirkt und infolgedessen eine Abweichung gegenüber der vorgegebenen mittleren Leistung verursacht. Ferner beeinflusst der Normierungsfaktor über die Varianz auch die Verteilungsdichte der Amplituden des Rauschsignales, welches jedoch keinen Einfluß auf die maximale Abweichung bezüglich der Normalverteilung hat.

### 6.3.2 Einfluß der numerisch gesteuerten Oszillatoren auf die statistischen Kenngrößen

Für die Betrachtung des praktisch realisierten digitalen Rauschgenerators sei nun die Annahme idealer Systemkomponenten aufgehoben, so daß für die synthetisierte Zufallsfolge der mathematische Ausdruck nach Gl. (4.5) bzw. Gl. (4.17) gilt. Aus Gründen einer übersichtlicheren Darstellung wird anstelle des zeitlichen Mittelwertes wieder der Erwartungswert verwendet und für den modulierten Phasenwinkel des numerisch gesteuerten Oszillators die vereinfachende Schreibweise

$$\Xi(n) = \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)] + \phi(n) \quad (6.35)$$

eingeführt. Als Referenz dienen wiederum die in Abschnitt 6.2 ermittelten Kenngrößen des ideal synthetisierten Rauschsignales.

#### *Mittelwert und Varianz*

Auf der Grundlage von Gl. (4.17) ergibt sich nach Gl. (6.1) für den Mittelwert der reellen Zufallsfolge  $s_q(n)$

$$\begin{aligned} \mu_q = E \left\{ \cos \left[ \Theta(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{\Theta}(n) - \pi \cdot \varepsilon_1(n) \right] \cdot \cos \left[ \Xi(n) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{\phi}(n) - \pi \cdot \varepsilon_2(n) \right] + \frac{1}{2} \cdot [\varepsilon_{D_1}(n) + \varepsilon_{D_2}(n)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Da die Folgen  $\varepsilon_1(n)$  und  $\varepsilon_2(n)$  lediglich die schaltungstechnische Realisierung der  $2\pi$ -Periodizität der Argumente der Cosinus-Funktionen durch die Modulo-Operation beschreiben (vgl. Abschnitt 4.2), ist es zulässig, diese für die weitere Untersuchung zu vernachlässigen. Berücksichtigt man ferner, daß die Amplitudenfehlerfolgen  $\varepsilon_{D_1}(n)$  und  $\varepsilon_{D_2}(n)$  für eine hinreichend kleine Quantisierungsstufe  $Q_D = 2^{-(D-1)}$  als voneinander statistisch unabhängige, mittelwertfreie und im Intervall  $[-2^{-D}, 2^{-D}]$  gleichverteilte Zufallsfolgen modelliert werden können (vgl. Abschnitt 3.3.3), so läßt sich Gl. (6.36) zu



$$\mu_q = \mathbb{E} \left\{ \cos \left[ \Theta(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{\Theta}(n) \right] \cdot \cos \left[ \Xi(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{\phi}(n) \right] \right\} \quad (6.37)$$

vereinfachen. Unter Anwendung elementarer trigonometrischer Beziehungen folgt mit Gl. (4.15)

$$\begin{aligned} \mu_q &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \mathbb{E} \{ \cos \varepsilon_{A_1}(n) \} + \mathbb{E} \{ \cos \varepsilon_{A_2}(n) \} \right] \cdot \mathbb{E} \{ \cos \Theta(n) \cdot \cos \Xi(n) \} - \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot \left[ \mathbb{E} \{ \sin \varepsilon_{A_1}(n) \} - \mathbb{E} \{ \sin \varepsilon_{A_2}(n) \} \right] \cdot \mathbb{E} \{ \cos \Theta(n) \cdot \sin \Xi(n) \} - \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot \left[ \mathbb{E} \{ \sin \varepsilon_{A_1}(n) \} + \mathbb{E} \{ \sin \varepsilon_{A_2}(n) \} \right] \cdot \mathbb{E} \{ \sin \Theta(n) \cdot \cos \Xi(n) \} + \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot \left[ \mathbb{E} \{ \cos \varepsilon_{A_1}(n) \} - \mathbb{E} \{ \cos \varepsilon_{A_2}(n) \} \right] \cdot \mathbb{E} \{ \sin \Theta(n) \cdot \sin \Xi(n) \} . \end{aligned} \quad (6.38)$$

Hierbei wurde der Sachverhalt ausgenutzt, daß die Phasenfehlerfolgen  $\varepsilon_{A_1}(n)$  und  $\varepsilon_{A_2}(n)$  — ebenso wie die Amplitudenfehlerfolgen  $\varepsilon_{D_1}(n)$  und  $\varepsilon_{D_2}(n)$  — für eine hinreichend kleine Quantisierungsstufe  $Q_A = \pi \cdot 2^{-(A-1)}$  als voneinander statistisch unabhängige, mittelwertfreie und im Intervall  $[-\pi \cdot 2^{-A}, \pi \cdot 2^{-A}]$  gleichverteilte Zufallsfolgen aufgefaßt werden können. Eine Betrachtung von Gl. (6.38) läßt erkennen, daß es zweckmäßig ist zunächst die Erwartungswerte der Funktionen der Zufallsfolgen  $\varepsilon_{A_1}(n)$  und  $\varepsilon_{A_2}(n)$  zu bestimmen. Diese lauten

$$\mathbb{E} \{ \cos \varepsilon_{A_1}(n) \} = \mathbb{E} \{ \cos \varepsilon_{A_2}(n) \} = \frac{2}{Q_A} \cdot \sin \left( \frac{Q_A}{2} \right), \quad (6.39)$$

$$\mathbb{E} \{ \sin \varepsilon_{A_1}(n) \} = \mathbb{E} \{ \sin \varepsilon_{A_2}(n) \} = 0 .$$

Eingesetzt in Gl. (6.38) ergibt

$$\mu_q = \frac{2}{Q_A} \cdot \sin \left( \frac{Q_A}{2} \right) \cdot \mathbb{E} \{ \cos \Theta(n) \cdot \cos \Xi(n) \} . \quad (6.40)$$

und schließlich unter Berücksichtigung von Gl. (4.44) und Gl. (4.42) sowie Gl. (4.36)

$$\begin{aligned} \mu_q &= \frac{1}{Q_A} \cdot \sin\left(\frac{Q_A}{2}\right) \cdot \frac{1}{a_{norm}} \cdot \left\{ \mathbb{E}\{a(n)\} \cdot e^{j\frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)]} + \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E}\{a^*(n)\} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega_0(n) - \varepsilon_P(n)]} \right\} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (6.41)$$

Ein Vergleich mit dem Mittelwert des vorgegebenen Rauschsignales nach Gl. (6.3) zeigt, daß dieser keine Beeinflussung durch die Quantisierung der stochastischen Phasenmodulationsfolgen  $\xi_1(n)$  und  $\xi_2(n)$  sowie durch die numerisch gesteuerten Oszillatoren erfährt.

Ausgehend von Gl. (6.4) folgt mit Gl. (4.17) und Gl. (6.41) die Varianz der reellen Zufallsfolge  $s_q(n)$  zu

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= \mathbb{E}\left\{ \cos^2\left[\Theta(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\Theta(n)\right] \cdot \cos^2\left[\Xi(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\phi(n)\right] \right\} + \left[ \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_1}(n)\} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_2}(n)\} \right] \cdot \mathbb{E}\left\{ \cos\left[\Theta(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\Theta(n)\right] \cdot \cos\left[\Xi(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\phi(n)\right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_1}(n)\} \cdot \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_2}(n)\} + \frac{1}{4} \cdot \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_1}^2(n)\} + \frac{1}{4} \cdot \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_2}^2(n)\} , \end{aligned} \quad (6.42)$$

wobei die Folgen  $\varepsilon_1(n)$  und  $\varepsilon_2(n)$  wiederum vernachlässigt wurden. Aufgrund der vorausgesetzten Gleichverteilung der Amplitudenfehlerfolgen  $\varepsilon_{D_1}(n)$  und  $\varepsilon_{D_2}(n)$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_1}(n)\} &= \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_2}(n)\} = 0 , \\ \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_1}^2(n)\} &= \mathbb{E}\{\varepsilon_{D_2}^2(n)\} = \frac{Q_D^2}{12} = \sigma_D^2 . \end{aligned} \quad (6.43)$$

In Gl. (6.42) eingesetzt ergibt

$$\sigma_q^2 = \mathbb{E}\left\{ \cos^2\left[\Theta(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\Theta(n)\right] \cdot \cos^2\left[\Xi(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\phi(n)\right] \right\} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_D^2 . \quad (6.44)$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe elementarer trigonometrischer Beziehungen aufspalten, so daß unter Berücksichtigung des Sachverhaltes, daß nur die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} E\{\cos \varepsilon_{\Theta}(n)\} &= E\{\cos \varepsilon_{\phi}(n)\} = \frac{4}{Q_A^2} \cdot \sin^2\left(\frac{Q_A}{2}\right), \\ E\{\cos \varepsilon_{\Theta}(n) \cdot \cos \varepsilon_{\phi}(n)\} &= \frac{1}{Q_A} \cdot \sin Q_A \end{aligned} \quad (6.45)$$

von Null verschieden sind, mit Gl. (4.15) und Gl. (6.39) für die Varianz des synthetisierten Rauschsignales

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot Q_A} \cdot \sin Q_A - \frac{2}{Q_A^2} \cdot \sin^2\left(\frac{Q_A}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot E\{\cos^2 \Xi(n)\} \cdot \\ &\left[ \frac{4}{Q_A^2} \cdot \sin^2\left(\frac{Q_A}{2}\right) - \frac{1}{Q_A} \cdot \sin Q_A \right] + \frac{1}{2} \cdot E\{\cos^2 \Theta(n)\} \cdot \frac{4}{Q_A^2} \cdot \sin^2\left(\frac{Q_A}{2}\right) \\ &+ \left[ E\{\cos^2 \Theta(n) \cdot \cos^2 \Xi(n)\} - \frac{1}{2} \cdot E\{\cos^2 \Theta(n)\} \right] \cdot \frac{1}{Q_A} \cdot \sin Q_A + \frac{1}{2} \cdot \sigma_D^2 \end{aligned} \quad (6.46)$$

resultiert. Eine Bestimmung der Erwartungswerte führt schließlich zu

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{Q_A^2} \cdot \sin^2\left(\frac{Q_A}{2}\right) + \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{2} \cdot \frac{4}{Q_A^2} \cdot \sin^2\left(\frac{Q_A}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sigma_D^2 \quad (6.47)$$

Es zeigt sich, daß der Betrag des Beitrages der ersten beiden Summanden bei genügend kleiner Quantisierungsstufe in guter Näherung als  $\sigma_A^2/4$  aufgefaßt werden kann, wobei  $\sigma_A^2 = Q_A^2/12$  der Varianz der Phasenfehlerfolgen entspricht. So erhält man beispielsweise für  $A = 4$  bit den Wert  $0,2487 \cdot \sigma_A^2$  und bei  $A = 8$  bit bereits  $0,24999 \cdot \sigma_A^2$ . Wie ein Vergleich mit Gl. (6.5) veranschaulicht, beschreibt der dritte Summand die in Abhängigkeit von  $Q_A$  und dem Normierungsfaktor gewichtete Varianz des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums. Für die Varianz des erzeugten Rauschsignales ergibt sich somit in guter Näherung

$$\sigma_q^2 \approx \frac{1}{4} \cdot \sigma_A^2 + \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \sigma_s^2 \cdot \frac{4}{Q_A^2} \cdot \sin^2\left(\frac{Q_A}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sigma_D^2. \quad (6.48)$$

Ein Betrachtung von Gl. (6.48) bestätigt die in Abschnitt 4.4 aufgrund der Simulationsergebnisse gemachte Aussage, daß in Abhängigkeit von der Anzahl und der Gewichtung der vorgegebenen Spektralanteile – bei konstanten Quantisierungsstufen  $Q_A$  und  $Q_D$  – unterschiedlich hohe störfreie Dynamikbereiche auftreten. Der Grund dafür liegt in der Gewichtung der mittleren Leistung des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums mit dem Normierungsfaktor  $a_{norm}$ , so daß mit wachsendem Normierungsfaktor die mittlere Signalleistung gegenüber der mittleren Quantisierungsrauschleistung abnimmt.

#### *Autokorrelationsfunktion*

Es interessiert weiterhin die Autokorrelationsfolge des synthetisierten Rauschsignales. Zur Bestimmung der Autokorrelationsfolge  $r_{ss}(k)$  geht man zweckmäßig von Gl. (4.22) aus. Vernachlässigt man wiederum die Folgen  $\varepsilon_1(n)$  und  $\varepsilon_2(n)$ , so folgt mit Gl. (4.17) unter Beachtung der vorausgesetzten Mittelwertfreiheit der Amplitudenfehlerfolgen  $\varepsilon_{D_1}(n)$  und  $\varepsilon_{D_2}(n)$

$$\begin{aligned} r_{ss}(k) = & \mathbb{E} \left\{ \cos \left[ \Theta(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\Theta(n) \right] \cdot \cos \left[ \Xi(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\phi(n) \right] \cdot \right. \\ & \left. \cos \left[ \Theta(n+k) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\Theta(n+k) \right] \cdot \cos \left[ \Xi(n+k) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\phi(n+k) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{4} \cdot \mathbb{E} \{ \varepsilon_{D_1}(n) \cdot \varepsilon_{D_1}(n+k) \} + \frac{1}{4} \cdot \mathbb{E} \{ \varepsilon_{D_2}(n) \cdot \varepsilon_{D_2}(n+k) \}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Berücksichtigt man nun, daß die Autokorrelationsfolge aufgrund der Stationarität des synthetisierten Rauschsignales (vgl. Abschnitt 4.3) nur von der Zeitdifferenz  $k$  abhängt, kann Gl. (6.49) unter Anwendung elementarer trigonometrischer Beziehungen zu

$$\begin{aligned}
r_{ss}(k) = E \left\{ \cos \left[ \Theta(n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{\Theta}(n) \right] \cdot \cos \left[ \Theta(n+k) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{\Theta}(n+k) \right] \cdot \right. \\
\left. \cos \left\{ \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega_0(k) - \varepsilon_p(k)] - \phi(n) + \phi(n+k) - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{\phi}(n) + \right. \right. \quad (6.50) \\
\left. \left. \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{\phi}(n+k) \right\} \right\} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_D^2 \cdot \delta_K(k)
\end{aligned}$$

umgeformt werden. Analog der Vorgehensweise zur Bestimmung der Varianz ergibt sich schließlich mit Gl. (6.39), Gl. (2.20) und Gl. (4.42) für die Autokorrelationsfolge des synthetisierten Rauschsignales

$$\begin{aligned}
r_{ss}(k) = \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{Q_A^2} \cdot \sin^2 \left( \frac{Q_A}{2} \right) \right] \cdot \delta_K(k) + \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} \cdot \right. \\
(v - m_0) \cdot k + \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega_0(k) - \varepsilon_p(k)] \left. \right\} \cdot \frac{4}{Q_A^2} \cdot \sin^2 \left( \frac{Q_A}{2} \right) + \quad (6.51) \\
\frac{1}{2} \cdot \sigma_D^2 \cdot \delta_K(k) ,
\end{aligned}$$

wobei auch hier bei genügend kleiner Quantisierungsstufe  $Q_A$  für den ersten Term in eckigen Klammern näherungsweise  $\sigma_A^2 / 4$  gilt. Die Quantisierung der Phasenmodulationsfolgen der numerisch gesteuerten Oszillatoren verursacht somit eine von  $Q_A$  abhängige Gewichtung der Autokorrelationsfolge des vorgegebenen Leistungsdichtespektrums und eine additive Überlagerung zweier mit den jeweiligen Varianzen  $\sigma_A^2$  und  $\sigma_D^2$  gewichteter Delta-Impulse. Eine Gegenüberstellung mit Gl. (6.6) verdeutlicht ferner, daß im Argument der Cosinus-Funktion ein zusätzlicher Term auftritt, der die Quantisierung des Phasenwinkels im numerisch gesteuerten Oszillator beschreibt.

Angesichts der Betrachtungen in Abschnitt 3.3 müssen folglich auch im Leistungsdichtespektrum des synthetisierten Rauschsignales Störkomponenten auftreten, was die Simulationsergebnisse in Abschnitt 4.4.3 und die Meßergebnisse in Abschnitt 5.4.2 bestätigen. Die Quantisierung der Phasenmodulationsfolgen und der Ausgangsfolgen der numerisch gesteuerten Oszillatoren wirkt hingegen im Leistungsdichtespektrum

wie eine zusätzliche Rauschstörung, da die Quantisierungsfehler bei hinreichend kleinen Quantisierungsstufen  $Q_A$  und  $Q_D$  als mittelwertfreie Zufallsfolgen mit weißem Spektrum modelliert werden können. Die Bedingung hinreichend kleiner Quantisierungsstufen kann bei numerisch gesteuerten Oszillatoren aufgrund der Wortlängen  $A \geq 8$  bit und  $D \geq 8$  bit in der Regel als erfüllt angesehen werden.

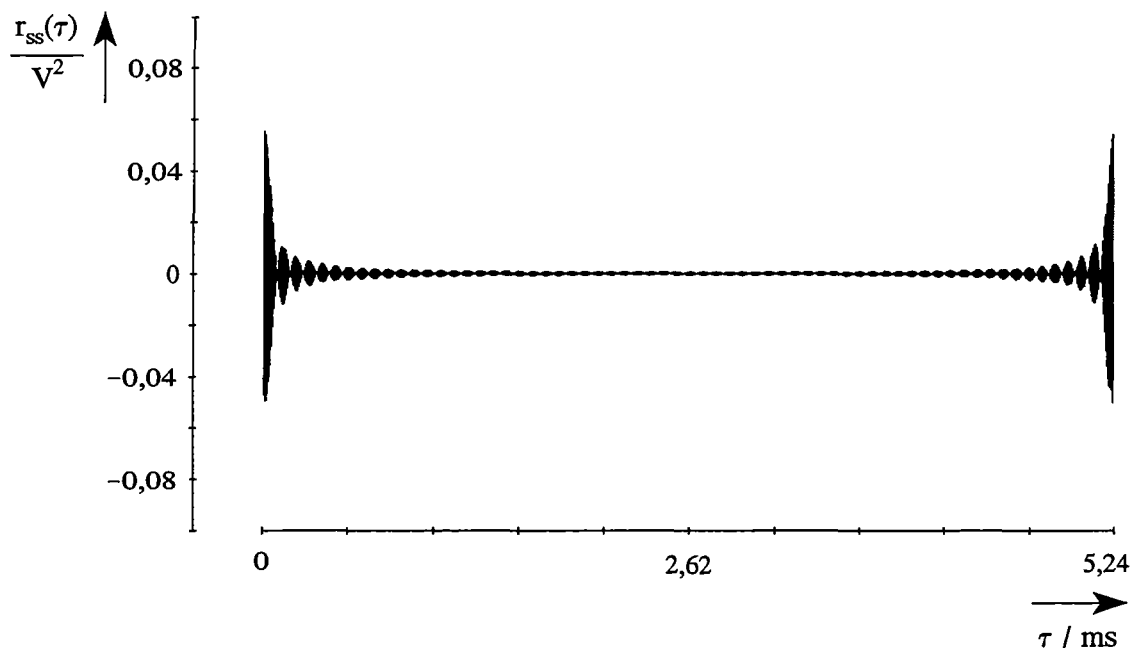
Wie die Betrachtungen in Abschnitt 3.5 zeigen, beeinflussen auch die Fehlerquellen des realen Digital/Analog-Umsetzers das Ausgangsspektrum. Ausgehend von Gl. (4.18) gilt mit Gl. (6.51) sowie unter der Voraussetzung gleicher Wortlängen  $D$  und  $C$  für die Autokorrelationsfunktion des synthetisierten zeitkontinuierlichen Rauschsignales  $s_K(t)$

$$r_{KK}(\tau) \approx h_0(\tau) * h_0^*(-\tau) * \left\{ \left( \frac{\sigma_A^2}{4} + \frac{\sigma_D^2}{2} \right) \cdot \delta(\tau) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_{norm}^2} \cdot \sum_{v=m_1}^{m_2} \frac{|a_v|^2}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} \cdot (v - m_0) \cdot k + \frac{2\pi}{2^L} \cdot [\Omega_0(k) - \varepsilon_p(k)] \right\} \cdot \frac{4}{Q_A^2} \cdot \sin^2 \left( \frac{Q_A}{2} \right) \cdot \delta(\tau - kT) \right\}. \quad (6.52)$$

Infolge des nicht idealen Interpolationsfilters besitzt das zugehörige Leistungsdichtespektrum des rekonstruierten zeitkontinuierlichen Rauschsignales – im Unterschied zum idealen Fall gemäß Gl. (6.10) – nun auch Spektralanteile oberhalb der Grenzfrequenz  $\pi / T$ , die durch nachgeschaltete analoge Rekonstruktionsfilter möglichst zu eliminieren sind.

Bild 6.7 zeigt eine Periode der mit dem Vektor-Signalanalysator HP89440A gemessenen Autokorrelationsfunktion des synthetisierten zeitkontinuierlichen Rauschsignales, wobei die Systemparameter entsprechend denen zu Bild 6.1 gewählt wurden.

Ein Vergleich mit dem in Bild 6.5 dargestellten Simulationsergebnis macht deutlich, daß Messung und Berechnung qualitativ gut übereinstimmen. Die Abweichung zwischen der berechneten und der gemessenen Autokorrelationsfunktion resultiert im wesentlichen aus der unterschiedlichen mittleren Leistung. Der Grund dafür liegt in einer gegenüber den Simulationsparametern abweichenden maximalen Signalam-



**Bild 6.7** Eine Periode der gemessenen Autokorrelationsfunktion des real synthetisierten Rauschsignales;  $a_{norm} = 1,1366$

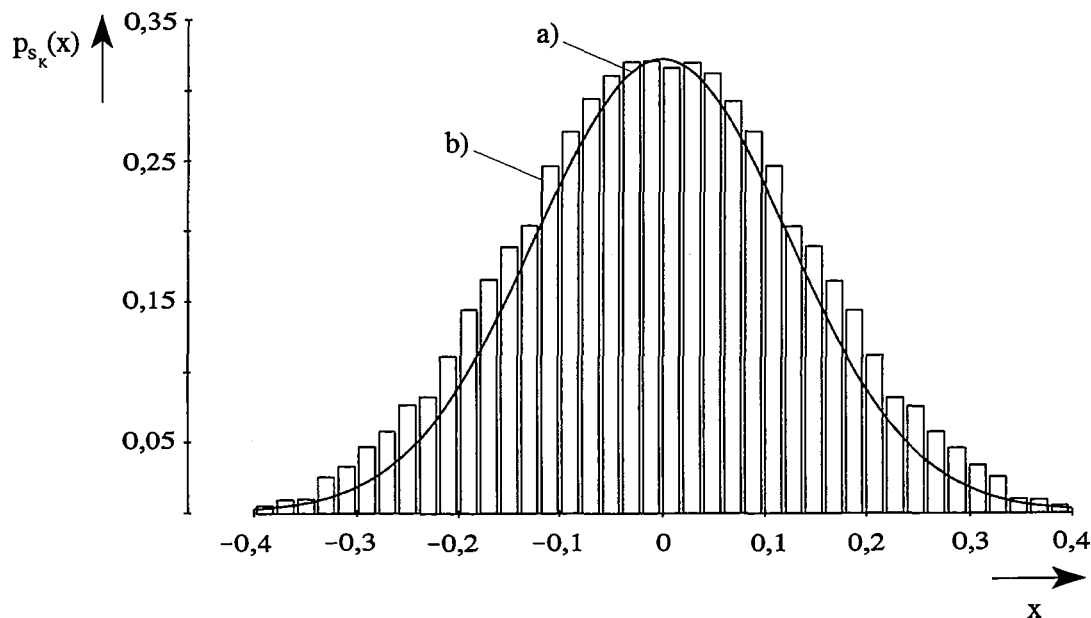
plitude von ungefähr  $\pm 0,4$  V am Ausgang des Rauschgenerators, welches eine Begrenzung der erzielbaren maximalen mittleren Leistung auf  $\sigma_{max}^2 = 0,08$  V<sup>2</sup> zur Folge hat. Unter Berücksichtigung dieses Sachverhaltes ergibt sich bezogen auf die nach Gl. (6.47) berechnete Varianz für die hier exemplarisch abgebildete Autokorrelationsfunktion eine um 0,74 dB geringere mittlere Leistung.

#### Amplitudenverteilung

In der Praxis läßt sich die interessierende Verteilungsdichte des synthetisierten zeitkontinuierlichen Rauschsignales  $s_K(t)$  nur näherungsweise durch meßtechnische Bestimmung eines Histogramms ermitteln. Hierzu zerlegt man zunächst das Intervall  $[s_{Kmax}(t), s_{Kmin}(t)]$  in  $N_I$  gleichgroße Teilintervalle mit der Breite  $\Delta s = [s_{Kmax}(t) - s_{Kmin}(t)] / N_I$ . Zur Gewinnung eines Schätzwertes  $\hat{p}_{s_K}(x)$  wird anschließend in  $N_E$  Versuchen gezählt, wieviele Werte  $n_K$  der Amplitudenwerte  $s_K(t)$  in die einzelnen Teilintervalle fallen. Im Histogramm ist dann für jedes Teilintervall der Schätzwert

$$\hat{p}_{s_K}(x) = \frac{n_K}{N_E} \cdot \frac{1}{\Delta s} \approx p_{s_K}(x) \quad (6.53)$$

dargestellt. Die Anzahl  $N_E$  der erforderlichen Experimente ist dabei von der geforderten statistischen Sicherheit  $S$  abhängig, einen Schätzwert  $\hat{p}_{s_K}(x)$  mit der relativen Abweichung  $\delta$  zu erhalten [Schü 94]. In Bild 6.8 ist ein mit dem digitalen Signalanalysator DSA602A gemessenes Histogramm der Amplitudenverteilung des synthetisierten zeitkontinuierlichen Rauschsignales  $s_K(t)$  der nach Gl. (6.12) mit Gl. (6.33) und unter Berücksichtigung der Verteilungsdichte der Amplitudenfehlerfolgen  $\varepsilon_{D_1}(n)$  und  $\varepsilon_{D_2}(n)$  berechneten Amplitudenverteilung gegenübergestellt. Die Grundlage bildete wiederum das zu Bild 5.7 exemplarisch vorgegebene Leistungsdichtespektrum, wobei unter Beachtung der verringerten Ausgangsamplitude  $N = 2^{23}$  und  $R = 30$  gewählt wurde. Der Normierungsfaktor beträgt wiederum  $a_{norm} = 1,1366$ .



**Bild 6.8** Berechnete a) und gemessene b) Verteilungsdichte der Amplituden des synthetisierten zeitkontinuierlichen Rauschsignales

Das meßtechnisch ermittelte Histogramm der Amplitudenverteilung bestätigt die in Abschnitt 6.2 gemachte Aussage, daß mit wachsender Anzahl  $R$  der Spektrallinien die Verteilungsdichte der Amplituden gegen die Normalverteilung strebt. Ein Vergleich der gemessenen und der berechneten Verteilungsdichte zeigt ferner eine gute prinzipielle Übereinstimmung. Die Abweichungen zwischen den beiden Diagrammen sind im wesentlichen dadurch bedingt, daß die Ausgangsamplitude des Rauschgenerators nicht exakt dem Wert  $\pm 0,4$  V entspricht. Weiterhin sind bei der Simulation mögliche



Einflüsse des Digital/Analog-Umsetzers und der analogen Tiefpaßfilter auf die Verteilungsdichte nicht berücksichtigt. Bei der mittels des Histogramms ermittelten Verteilungsdichte ergibt sich für den kleinsten Wert  $\hat{p}_{s_k}(x) \cdot \Delta s$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ein relativer Fehler von  $\delta \approx 0,045$ .

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die statistischen Eigenschaften des synthetisierten Rauschsignales grundsätzlich mit denen des vorgegebenen idealen Rauschsignales übereinstimmen. Abweichungen ergeben sich aufgrund der numerisch gesteuerten Oszillatoren, die infolge ihrer Störkomponenten die Autokorrelationsfunktion und damit die spektrale Leistungsdichte entsprechend den in Kapitel 3 gewonnenen Erkenntnissen beeinflussen. Weiterhin führt die aufgrund der endlichen Wortlängen der numerisch gesteuerten Oszillatoren notwendige Quantisierung der Phasenmodulationsfolgen und der Ausgangsfolgen im Leistungsdichtespektrum zu einer zusätzlichen Rauschstörung und folglich zu einer Verminderung des störfreien Dynamikbereiches. Ein Normierungsfaktor von  $a_{norm} > 1$  verursacht zudem eine weitere Verschlechterung des störfreien Dynamikbereiches, da dieser sich nur auf die mittlere Nutzsignalleistung, nicht jedoch auf die mittlere Quantisierungsrauschleistung auswirkt. Die Realisierung der systemspezifischen Anforderungen hängt somit — ebenso wie im Fall des unmodulierten Systems — im wesentlichen von einer geeigneten Kombination aus numerisch gesteuertem Oszillator und Digital/Analog-Umsetzer ab.

## 6.4 Meßergebnisse beim Einsatz am Protonenbeschleuniger COSY

Die vorausgegangenen Abschnitte dieses Kapitels behandeln einige grundsätzliche Eigenschaften des digitalen Rauschgenerators. Abschließend soll der digitale Rauschgenerator seine Leistungsfähigkeit beim praktischen Einsatz am Protonenbeschleuniger COSY unter Beweis stellen, wobei die hier betrachtete ultralangsame Extraktion stellvertretend für eine Reihe von weiteren Anwendungen steht.

Beschleunigte Teilchen kommen heute nicht nur bei der Grundlagenforschung zum Einsatz, sondern auch bei einer ganzen Reihe von Anwendungen in der Industrie und der Medizin. Beim Cooler-Synchrotron COSY der Forschungszentrum Jülich GmbH handelt es sich um einen Teilchenbeschleuniger im Bereich der Mittelenergiephysik,

der auch als Speicherring dient. Hierbei werden Protonen mittels elektromagnetischer Felder gespeichert und beschleunigt, wobei diese nahezu Lichtgeschwindigkeit erreichen können. Verschiedene Betriebsarten erlauben es, sowohl interne als auch externe Streuexperimente durchzuführen.

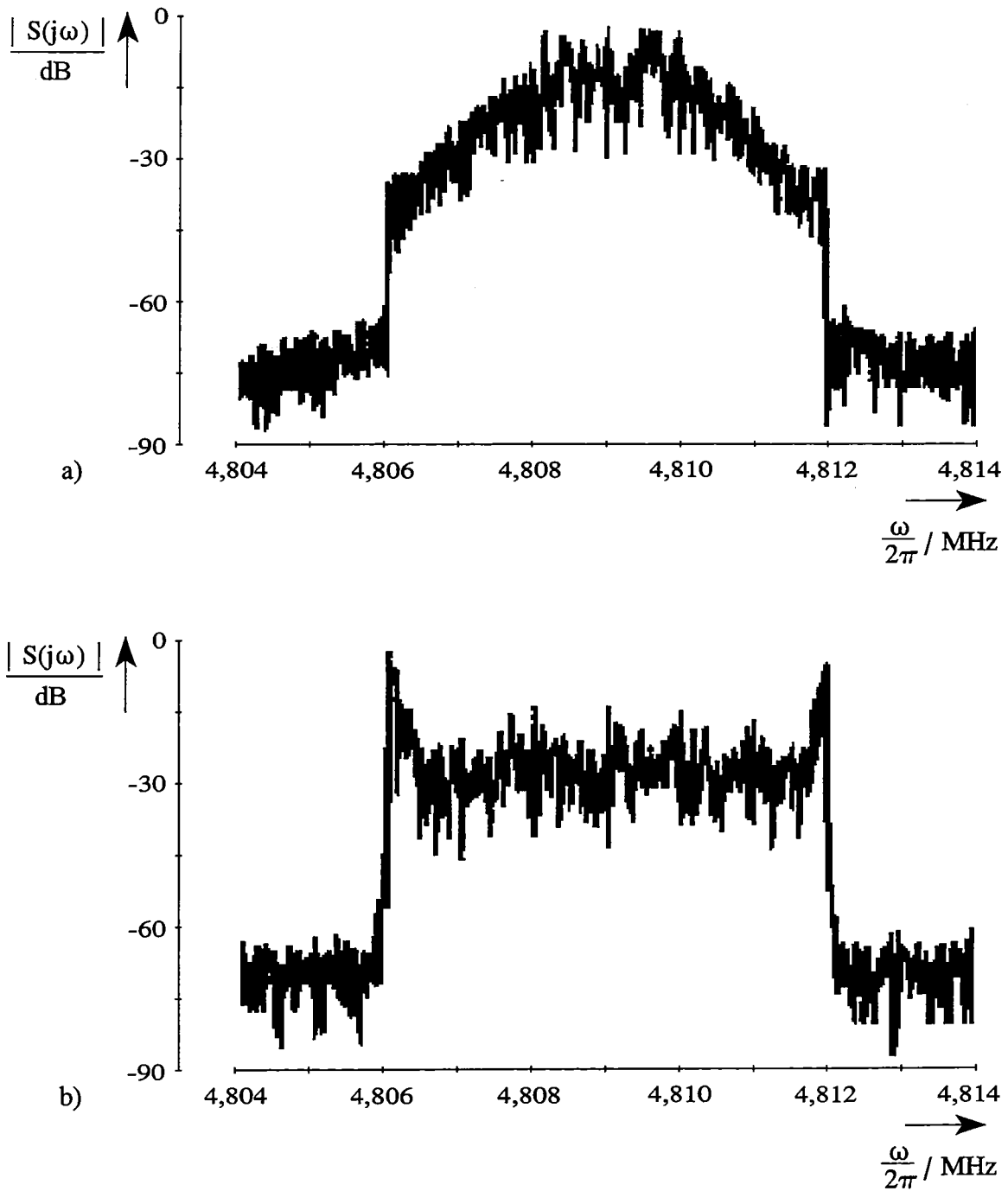
Bei externen Experimenten werden die beschleunigten Teilchen durch die sogenannte Resonanzextraktion aus dem Speicherring heraus zu den jeweiligen Experimentierstationen geleitet. Je nach Bedarf stehen hier verschiedene Methoden zur Verfügung, wobei die stochastische Extraktion, auch ultralangsame Extraktion genannt, eines der wichtigsten Verfahren ist, da sie einen nahezu kontinuierlichen Teilchenstrom bei konstanter Strahlintensität an der Experimentierstation ermöglicht [Mol 94]. Die Extraktionsdauer kann hierbei von einigen Minuten bis zu mehreren Stunden variieren.

Die ultralangsame Extraktion gliedert sich prinzipiell in zwei Schritte. Zu ihrer Durchführung werden hochfrequente, schmalbandige Rauschsignale mit nahezu beliebig konfigurierbaren Leistungsdichtespektren und einer vergleichsweise hohen Flankensteilheit sowie der Möglichkeit zur Variation der Trägerfrequenz in Realzeit benötigt (vgl. Abschnitt 2.1). Beschleunigte Teilchen unterscheiden sich im wesentlichen in ihrem Impuls, d.h. in Geschwindigkeit bzw. Energie. Die sich infolgedessen ergebende Impulsverteilung des Teilchenstrahles entspricht in der Regel näherungsweise einer Normalverteilung [Meu 92]. Um eine möglichst konstante Strahlintensität bei der Extraktion zu erzielen, ist jedoch eine gleichverteilte Impulsverteilung zweckmäßiger, da die Strahlintensität bei der Extraktion — über der Zeit betrachtet — der jeweiligen Impulsverteilung des Teilchenstrahles entspricht. Daher werden im ersten Schritt die Teilchen mittels eines bandbegrenzten weißen Rauschsignales, dessen Bandbreite von der Impulsverteilung des Teilchenstrahles abhängt und dessen Mittenfrequenz einer Harmonischen der Teilchenumlaufsfrequenz entspricht, derart beeinflusst, daß die Impulsverteilung näherungsweise die Form einer Gleichverteilung annimmt. Das Rauschen führt dabei zu einer beabsichtigten Diffusion der Teilchen, d.h. langsamere Teilchen können beschleunigt und schnellere Teilchen verzögert werden. Im zweiten Schritt findet dann, durch Einsatz eines schmalbandigen Rauschsignales mit geeignet konfiguriertem Leistungsdichtespektrum, die eigentliche Extraktion statt, indem der Strahlschwerpunkt mittels langsamer Variation der Trägerfrequenz des Rauschsignales in Realzeit in Richtung des Resonanzpunktes verschoben wird.

Im folgenden wird die Eignung und die Leistungsfähigkeit des in dieser Arbeit entwickelten digitalen Rauschgenerators an einem Beispiel zur ultralangsamem Extraktion veranschaulicht. Die Grundlage für das als Anregung verwendete schmalbandige Rauschsignal bildet ein in Anlehnung an Bild 5.7 vorgegebenes Leistungsdichtespektrum, bei dem alle Spektrallinien mit der Amplitude  $|a_v| = \sqrt{2 \cdot P_s / R}$  gleich gewichtet sind. Die Bandbreite wurde gemäß der Impulsverteilung des Teilchenstrahles zu  $f_B = 6$  kHz, die Trägerfrequenz entsprechend der 4. Harmonischen der Teilchenumlauf Frequenz zu  $f_0 = 4,8096$  MHz und die mittlere Leistung zu  $P_s = 0,08$  gewählt.

Zur Ermittlung der Impulsverteilung des Teilchenstrahles verwendet man einen sogenannten *Schottky-Pickup*. Das Ausgangssignal des *Schottky-Pickup* besitzt ein Spektrum, das bei Harmonischen der Teilchenumlauf Frequenz proportional zur Impulsverteilung des umlaufenden Teilchenstrahles ist. Mit Hilfe eines Spektrumanalysators läßt sich somit die tatsächliche Impulsverteilung des umlaufenden Teilchenstrahles anhand von sogenannten *Schottky-Spektren* bestimmen. In Bild 6.9 sind exemplarisch zwei mit dem Vektor-Signalanalysator HP89440A gemessene *Schottky-Spektren* dargestellt, wobei die Mittenfrequenz der 4. Harmonischen der Teilchenumlauf Frequenz entspricht. Ein Vergleich der beiden abgebildeten Diagramme verdeutlicht den im ersten Schritt der ultralangsamem Extraktion beabsichtigten Diffusionsprozeß der Teilchen. Interessant ist hierbei, daß an den Rändern der Impulsverteilung eine Erhöhung auftritt. Die Ursache hierfür ist die extreme Flankensteilheit des erzeugten Rauschsignales. Teilchen, die aus diesem Rauschfenster diffundieren, können nicht mehr zurück. Die Folge ist eine Anhäufung von Teilchen an den Rändern. Diesen Effekt bestätigen auch entsprechende Simulationen [Sto 95].

Die Experimente zeigen damit, daß der entwickelte digitale Rauschgenerator auch bei beschleunigerphysikalischen Anwendungen, wie zum Beispiel der gezielten Formung von Strahlteilchenverteilungen, einsetzbar ist, wobei gegenüber den bisher verwendeten analogen Rauschsystemen hinsichtlich Flexibilität und Präzision der synthetisierten Rauschsignale erhebliche Vorteile bestehen.



**Bild 6.9** *Veränderung der Impulsverteilung aufgrund des Diffusionsprozesses, veranschaulicht anhand zweier gemessener Schottkyspektren bei a) 2s und b) 6s Anregung durch das digital erzeugte bandbegrenzte weiße Rauschsignal*

## 7 Zusammenfassung

Rauschsignale finden heute in den verschiedensten Bereichen ein breites Einsatzspektrum. Dabei ist es für eine Vielzahl von Anwendungsfällen vorteilhaft oder sogar notwendig, daß ein Rauschsignal mit nahezu beliebig konfigurierbarem Leistungsdichtespektrum und definierten statistischen Eigenschaften zur Verfügung steht.

Zur Synthese derartiger Rauschsignale sind — insbesondere im Hochfrequenzbereich — in der Regel relativ aufwendige analoge Systeme erforderlich. Die Fortschritte bei der Entwicklung von integrierten Schaltkreisen zur digitalen Signalsynthese eröffnen jedoch in Kombination mit digitalen Verfahren zunehmend die Möglichkeit die analogen Systeme durch erheblich flexiblere und zumeist auch kostengünstigere digitale Systeme zu ersetzen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde untersucht, inwieweit die direkte digitale Signalsynthese auf der Basis numerisch gesteuerter Oszillatoren zur Synthese schmalbandiger Rauschsignale mit nahezu beliebig konfigurierbaren Leistungsdichtespektren verwendet werden kann, und welche Vor- und Nachteile sich im Hinblick auf eine Realisierung ergeben.

Gegenstand der Untersuchung war eine auf der Grundlage der zeitdiskreten Quadraturamplitudenmodulation entwickelte neue Schaltungsstruktur mit zwei numerisch gesteuerten Oszillatoren, die infolge der Einführung einer äquivalenten Betragsvariablen keine Multiplikation enthält und demzufolge gegenüber der klassischen Methode eine höhere Datenrate erlaubt. Ausgehend von einem harmonischen zeitdiskreten Prozeß wurde zur Berechnung der notwendigen Wertefolgen, entsprechend dem vorgegebenen Leistungsdichtespektrum des äquivalenten Basisbandprozesses, ein Synthesealgorithmus abgeleitet, wobei eine relativ einfache Implementierung auf einem Signalprozessor im Vordergrund stand.

Aus den mit Hilfe von Simulations- und Meßergebnissen gewonnenen Erkenntnissen ergibt sich als Ergebnis, daß die auf der Grundlage der direkten digitalen Signalsynthese entwickelte Schaltungsstruktur mit zwei numerisch gesteuerten Oszillatoren und dem abgeleiteten Synthesealgorithmus in der Lage ist, hochfrequente, schmalbandige Rauschsignale mit nahezu beliebig konfigurierbaren Leistungsdichtespektren zu synthetisieren, wobei eine vergleichsweise hohe Flankensteilheit des erzeugten Rauschsignals ohne zusätzliche Bandpaßfilterung erzielt wird. Der Einsatz numerisch ge-

steuerter Oszillatoren ermöglicht dabei eine vergleichsweise einfache Variation der Trägerfrequenz in Realzeit. Jedoch beeinflussen neben den durch den Digital/Analog-Umsetzer verursachten Störkomponenten auch die aufgrund der numerisch gesteuerten Oszillatoren im Leistungsdichtespektrum auftretenden Störkomponenten den erzielbaren störfreien Dynamikbereich. Die Berechnungen und die Messungen machen allerdings deutlich, daß durch eine geeignete Auswahl der Systemkomponenten über einen weiten Frequenzbereich durchaus bessere Werte gegenüber analogen Systemen erreicht werden können.

Ein wesentlicher Vorteil des im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten digitalen Verfahrens gegenüber analogen ist neben der auch im Detail exakten Reproduzierbarkeit der Rauschsignale in der Möglichkeit zur Kompensation systembedingter Abweichungen durch Einbeziehung in den Synthesealgorithmus zu sehen. Die insbesondere zur Synthese hochfrequenter Rauschsignale notwendig hohe Datenrate zur Phasenmodulation der numerisch gesteuerten Oszillatoren bedingt allerdings eine Vorabberechnung der Wertefolgen, wodurch sich ein periodisches Rauschsignal mit einem frequenzdiskreten Leistungsdichtespektrum ergibt, dessen spektrale Auflösung von der jeweiligen Periodenlänge und der Systemtakt rate abhängt. Eine hohe spektrale Auflösung bedeutet somit in der Regel einen hohen Rechen- und Speicheraufwand.

Simulationen und Messungen zeigen, daß die statistischen Eigenschaften des synthetisierten Rauschsignales prinzipiell mit denen der vorgegebenen spektralen Leistungsdichte übereinstimmen. Die aufgrund der Schaltungsstruktur verursachte Minderung der Varianz gegenüber der vorgegebenen mittleren Leistung ist bei entsprechender Vorgabe für den hier betrachteten Anwendungsfall bedeutungslos. Experimente mit unterschiedlich konfigurierten Leistungsdichtespektren bestätigen die Berechnungen und erbringen den Funktionsbeweis des entworfenen digitalen Rauschgenerators. Der praktische Einsatz am Protonenbeschleuniger *COSY* unterstreicht die Leistungsfähigkeit des digitalen Rauschgenerators gegenüber den bisher verwendeten weitaus unflexibleren analogen Systemen. Das vorgestellte Konzept eines digitalen Rauschgenerators liefert somit einen Beitrag zur Verwendung der direkten digitalen Signalsynthese in Bereichen, die bisher zumeist der reinen Analogtechnik vorbehalten waren.

## Literaturverzeichnis

- [Abr 84] Abramowitz, M.; Stegun, I.A.: **Pocketbook of Mathematical Functions**, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1984.
- [Ana 94] Analog-Devices, Inc.: **Data Converter Reference Manual, Volume I**, München, 1994.
- [Azi 90] Azizi, S.A.: **Entwurf und Realisierung digitaler Filter**, Oldenbourg Verlag, München, 1990.
- [Bac 92] Bachmann, W.: **Signalanalyse: Grundlagen und mathematische Verfahren**, Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1992.
- [Beh 94] Behrhorst, S.: *Neue Herausforderungen für A/D- und D/A-Umsetzer*, **Elektronik**, Vol. 43, No. 6, März 1994, pp. 34-55.
- [Bor 93] Borgarelli, L.; Cortesini, R.; Dionisio, C.: *Digital chirp generator suits space applications*, **Microwaves & RF**, Vol. 32, No. 6, Juni 1993, pp. 83-90.
- [Bro 91] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: **Taschenbuch der Mathematik**, Teubner Verlag, Stuttgart, 1991.
- [Buc 93] Buchanan, D.: *Choosing DACs for Direct Digital Synthesis*, **Microwave Engineering Europe**, Februar 1993, pp. 35-43.
- [Bur 94] Burr-Brown International GmbH: **IC Data Book — Data Conversion Products**, Filderstadt, 1994.
- [Cer 90] Cercas, F.A.; Tomlinson, M.; Albuquerque, A.A.: *Designing with Direct Digital Frequency Synthesizers*, **Proceedings of the RF-Expo East Conference**, Orlando, FL, November 1990, pp. 625-633.

- [DeB 92] DeBoy, C.C.; Russo, A.A.; Valverde, C.R.: *Spurious Noise Prediction and Reduction in Direct Digital Synthesizers*, **Proceedings of the RF-Expo West Conference**, San Diego, CA, März 1992, pp. 109-122.
- [Den 88] Denda, W.: **Rauschen als Information**, Hüthig Verlag, Heidelberg, 1988.
- [Dro 94] Drochner, M.: *Das EMS-Client-Programm 'klient'*, **Forschungszentrum Jülich GmbH, Zentrallabor für Elektronik, Interner Bericht KFA-ZEL-IB-501094**, Juli 1994.
- [Fet 71] Fettweis, A.: *Digital Filter Structures Related to Classical Filter Networks*, **Archiv der Elektronik und Übertragungstechnik**, Vol. AEÜ-25, 1971, S. 79-89.
- [Fet 86] Fettweis, A.: *Wave Digital Filters: Theory and Practice*, **Proceedings of the IEEE**, Vol. 74, No. 2, Februar 1986, pp. 270-327.
- [Fre 77] Freeman, D.M.: *Slewing Distortion in Digital to Analog Conversion*, **Journal of the Audio Engineering Society**, No. 4, 1977, pp. 178-183.
- [Fus 90] Fushimi, M.: *Random number generation with the recursion  $X_t = X_{t-3p} \oplus X_{t-3q}$* , **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Vol. 31, No. 1, 1990, pp. 105-118.
- [Gard 75] Gardner, W.A.: *Characterization of Cyclostationary Random Signal Processes*, **IEEE Transactions on Information Theory**, Vol. IT-21, No. 1, Januar 1975.
- [Gard 90] Gardner, W.A.: **Introduction to Random Processes: With Applications to Signals and Systems**, McGraw-Hill Publishing Company, New York, NY, 1990.
- [Garv 90] Garvey, J.F.; Babitch, D.: *An exact spectral analysis of a number controlled oscillator based synthesizer*, **Proceedings of the 44th Annual Frequency Control Symposium**, Baltimore, Mai 1990, pp. 511-521.



- [Gup 75] Gupta, M.-S.: *Applications of Electrical Noise*, **Proceedings of the IEEE**, Vol. 63, No. 7, Juli 1975, pp. 996-1010.
- [Har 94] Harris Semiconductor GmbH: **Digital Signal Processing Databook 1994**, München, 1994.
- [Hei 94] Heinrichs, G.; Meuth, H.; Stockhorst, H.; Schnase, A.: *A Narrow-Band Digital RF-Noise Generator*, **Proceedings of the 4th European Particle Accelerator Conference**, Vol. 3, London, 1994, pp. 1966-1968.
- [Hes 93] Hess, W.: **Digitale Filter**, Teubner Verlag, Stuttgart, 1993.
- [Hew 94] Hewlett-Packard GmbH: **Test- und Meßtechnik Katalog 1994/1995**, Bad Homburg, 1994.
- [Hoe 94] Hoeschele, D.F.: **Analog-to-Digital and Digital-to Analog Conversion Techniques**, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1994.
- [Jam 90] James, F.: *A review of pseudorandom number generators*, **Computer Physics Communications**, Vol. 60, 1990, pp. 329-344.
- [Kam 89] Kammeyer, K.D.; Kroschel, K.: **Digitale Signalverarbeitung: Filterung und Spektralanalyse**, Teubner Verlag, Stuttgart, 1989.
- [Kam 92] Kammeyer, K.D.: **Nachrichtenübertragung**, Teubner Verlag, Stuttgart, 1992.
- [Kle 83] Kleiner, P.: *Theorie und Anwendung des analytischen Signals in der Nachrichtentechnik*, **ETH Zürich, Dissertation**, 1983.
- [Kro 93] Kroupa, V.F.: *Discrete spurious signals and background noise in direct digital frequency synthesizers*, **Proceedings of the 47th Annual Frequency Control Symposium**, Salt Lake City, Juni 1993, pp. .
- [Kum 89] Kumm, W.: *Vorlesung Nachrichtentechnik*, **Universität-GH Paderborn, Fachgebiet Nachrichtentechnik**, Wintersemester 1989/1990.

- [L'Ecu 90] L'Ecuyer, P.: *Random numbers for simulation*, **Communications of the ACM**, Vol. 33, No. 10, Oktober 1990, pp. 85-97.
- [LeC 93] LeCroy Corporation: **1993/1994 Catalog and Reference Guide to Digital Waveform Instruments**, Chestnut Ridge, NY, 1993.
- [Lin 91] Lin, T.; Samueli, H.: *A 200 MHz CMOS  $x/\sin(x)$  Digital Filter for Compensating D/A Converter Frequency Response Distortion*, **IEEE Journal of Solid-State Circuits**, Vol. 26, No. 9, September 1991, pp. 1278-1285.
- [Lük 92] Lüke, H.D.: **Signalübertragung: Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [McC 88] McCune, E.W.: *Control of Spurious Signals in Direct Digital Synthesizers*, **Proceedings of the RF Technology Expo 88**, Anaheim, CA, 1988, pp. 523-537.
- [McC 90] McCune, E.W.: *Digital Communications Using Direct Digital Synthesis*, **RF Design**, Vol. 13, No. 1, Januar 1990, pp. 39-46.
- [Mee 91] Meerkötter, K.: *Vorlesung Nachrichtenübertragung*, **Universität-GH Paderborn, Fachgebiet Nachrichtentheorie**, Sommersemester 1991.
- [Meh 83] Mehrgardt, S.: *Noise Spectra of Digital Sine-Generators using the Table-Lookup-Method*, **IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing**, Vol. ASSP-31, No. 4, August 1983, pp. 1037-1039.
- [Mer 93] Mercer, D.D.: *Two Approaches to Increasing Spurious Free Dynamic Range in High Speed DACs*, **Proceedings of the 1993 Bipolar Circuits and Technology Meeting**, Minneapolis, 1993, pp. 80-83.
- [Meu 92] Meuth, H.; Heinrichs, G.; Halling, H.; Papureanu, S.: *Signal Synthesis for Controlled Particle Extraktion from High-Energy Accelerators*, **Proceedings of the RF-Expo East Conference**, Tampa, FL, September 1992, pp. 31-39.

- [Mil 88] Mildenberger, O.: **Grundlagen der Statistischen Systemtheorie**, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1988.
- [Min 92] Mini-Circuits: **RF/IF Designer's Handbook**, Brooklyn, NY, 1992.
- [Mol 94] Molinari, G.; Mulder, H.: *The Improved Ultra Slow Extraction Noise System at LEAR*, **Proceedings of the 4th European Particle Accelerator Conference**, Vol. 3, London, 1994, pp. 2376-2378.
- [Mot 92] Motorola, Inc.: *Numerically Controlled Oscillator 120NCO*, **Technical Data Sheet**, Phoenix, AZ, 1992.
- [Mül 79] Müller, R.: **Rauschen**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1979.
- [Nic 87] Nicholas, H.T.; Samueli, H.: *An Analysis of the Output Spectrum of Direct Digital Frequency Synthesizers in the Presence of Phase-Accumulator Truncation*, **Proceedings of the 41st Annual Frequency Control Symposium**, Fort Monmouth, Mai 1987, pp. 495-502.
- [Noi 94] Noise Com, Inc.: **Complete Line of Broadband Noise Products**, Paramus, NJ, 1994.
- [Nol 92] Nolden, F.; Pinkow, J.; Schaaf, U.; Steck, M.: *Experiments with Synthetic Coloured Noise at the Heavy Ion Storage Ring ESR*, **Proceedings of the 3rd European Particle Accelerator Conference**, Vol. 2, Berlin, März 1992, pp. 1228-1230.
- [O'Lea 91] O'Leary, P.; Maloberti, F.: *A Direct-Digital Synthesizer with Improved Spectral Performance*, **IEEE Transactions on Communications**, Vol. 39, No. 7, Juli 1991, pp. 1046-1048.
- [Ols 87] Olsen, J.J.; Fishman, P.M.: *Truncation Effects in Direct Digital Frequency Synthesis*, **Proceedings of the 20th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers**, Pacific Grove, CA, November 1987, pp. 186-190.

- [Opp 92] Oppenheim, A.V.; Schaffer, R.W.: **Discrete-Time Signal Processing**, Oldenbourg Verlag, München, 1992.
- [Pap 91] Papoulis, A.: **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**, McGraw-Hill Publishing Company, New York, NY, 1991.
- [Par 92] Park, S.: *A Digital AM Radio with CQUAM Stereo*, **Proceedings of the IEEE Global Telecommunications Conference**, Vol. 1, Orlando, FL, Dezember 1992, pp. 457-461.
- [Pfe 94] Pfeiffer, G.: *Entzerrung von gedächtnisbehafteten Übertragungskanälen mit neuronalen Netzwerken*, **Universität-GH Paderborn, Fachgebiet Nachrichtentechnik, Dissertation**, D14-72, 1994.
- [Ple 94] Plessey, Inc.: **Digital Signal Processing II, IC Handbook**, Cheney Manor, Swindon, 1994.
- [Por 94] Porat, B.: **Digital Processing of Random Signals**, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, 1994.
- [Pro 92] Proakis, J.G.; Manolakis, D.G.: **Introduction to Digital Signal Processing**, Macmillan Publishing Company, New York, NY, 1992.
- [Rab 85] Rabinowitz, S.J.; Gager, C.H.; Brookner, E.; Muehe, C.E.; Johnson, C.M.: *Applications of Digital Technology to Radar*, **Proceedings of the IEEE**, Vol. 73, No. 2, 1985, pp. 325-339.
- [Rei 93] Reinhardt, V.S.: *Spur reduction techniques in direct digital synthesizers*, **Proceedings of the 47th Annual Frequency Control Symposium**, Salt Lake City, 1993, pp. 230-240.
- [Roh 93] Rohde & Schwarz GmbH & Co. KG: **Meßgeräte & Meßsysteme Katalog 93/94**, München, 1993
- [Sam 88] Samueli, H.: *The design of multiplierless FIR filters compensating D/A converter frequency response distortion*, **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, Vol. 35, No. 8, August 1988, pp. 1064-1066.

- [Schü 94] Schübler, H.W.: **Digitale Signalverarbeitung 1**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [Sek 94] Seki, K.; Sakata, T.; Kato, S.: *A Digitalized Quadrature Modulator for Fast Frequency Hopping*, **IEICE Transactions on Communications**, Vol. E77-B, No. 5, Mai 1994, pp. 656-662.
- [Spa 93] Spalding, G.R.; Geiger, R.L.: *Digital Correction for Improved Spectral Response in Signal Generation Systems*, **Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems**, Vol. 1, Chicago, IL, 1993, pp. 132-135.
- [Sta 94] Stanford Telecommunications, Inc.: **The DDS Handbook**, Sunnyvale, CA, April 1994.
- [Sto 95] Stockhorst, H.; Heinrichs, G.; Schnase, A.: *Beam shaping using a new digital noise generator*, **Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conference**, Dallas, Texas, Mai 1995.
- [Tri 94] TriQuint Semiconductor: *TQ6140 1GS/s 14 Bit Digital to Analog Converter*, **Device Specifications**, Beaverton, OR, 1994.
- [Tek 94] Tektronix, Inc.: **Test and Measurement Product Catalog 1995**, Wilsonville, OR, 1994.
- [The 92] Therrien, C.W.: **Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing**, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, 1992.
- [Tie 71] Tierney, J.; Rader, C.M.; Gold, B.: *A Digital Frequency Synthesizer*, **IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics**, Vol. AU-19, No. 1, März 1971, pp. 48-57.
- [Unb 93] Unbehauen, R.: **Netzwerk- und Filtersynthese**, Oldenbourg Verlag, München, 1993.
- [Vin 94] Vinchentzio, R.I.: *Cut DDS images in hopping SSB mixer/modulator*, **Microwaves & RF**, Vol. 33, No. 3, März 1994, pp. 134-141.

- [Wal 80] Waldschmidt, K.: **Schaltungen der Datenverarbeitung**, Teubner Verlag, Stuttgart, 1980.
- [Wei 91] Weiss, F.G.; Bowman, T.G.: *A 14-Bit 1 GS/s DAC for Direct Digital Synthesis Applications*, **Proceedings of the 13th Annual GaAs IC Symposium**, Monterey, CA, Oktober 1991, pp. 361-364.
- [Wil 91] Williams, A.B.; Taylor, F.J.: **Electronic Filter Design Handbook**, McGraw-Hill Publishing Company, New York, NY, 1991.
- [Zan 90] Zander, H.: **Datenwandler**, Vogel Buchverlag, Würzburg, 1990.
- [Zim 92] Zimmerman, G.A.; Flanagan, M.J.: *Spur-Reduced Numerically-Controlled Oscillator for Digital Receivers*, **Proceedings of the 26th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers**, Pacific Grove, Oktober 1992, pp. 517-520.

**Jül-3137**  
**November 1995**  
ISSN 0944-2952