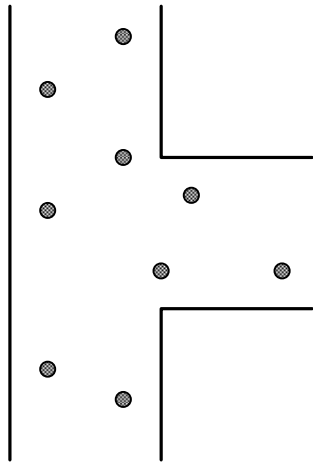
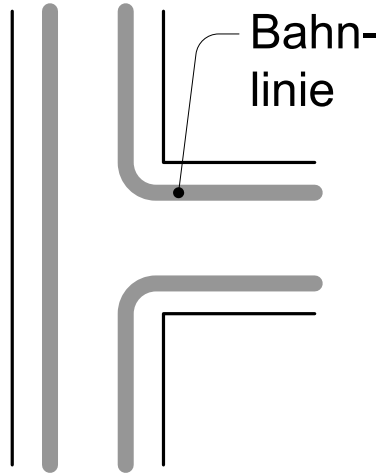


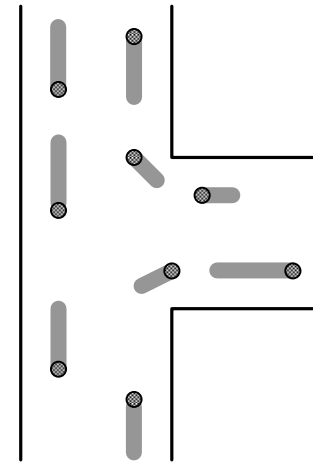
1/4000 s



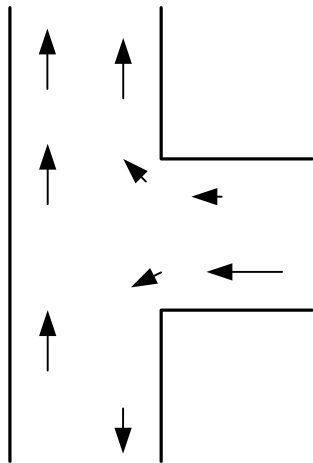
10 s



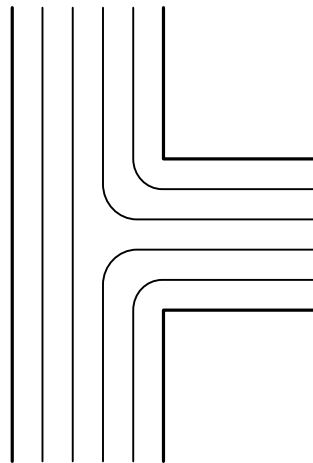
1/30 s



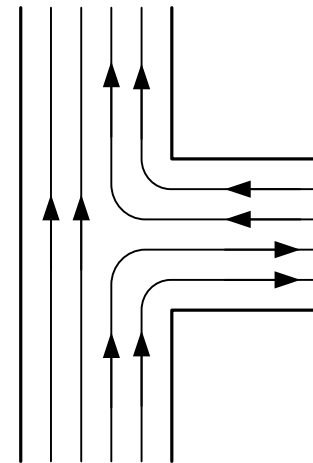
Vektorbild



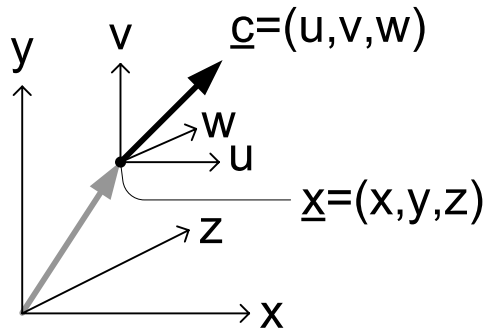
Stromlinienbild



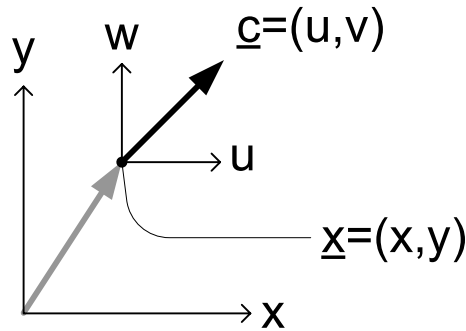
gerichtetes Stromlinienbild



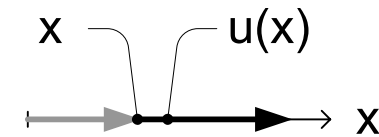
Raumströmung



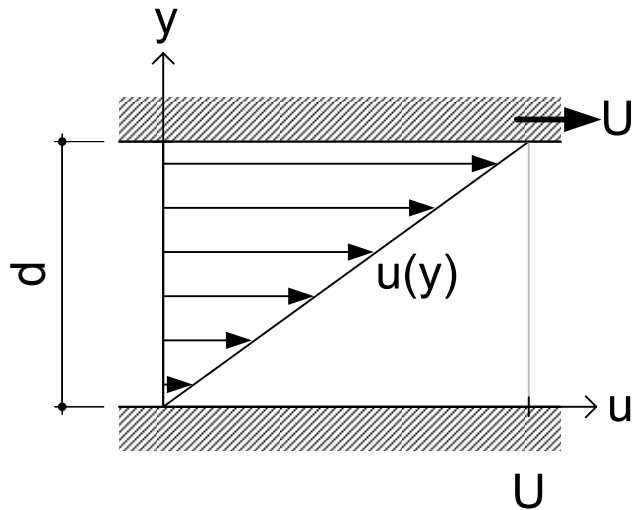
Ebene Strömung



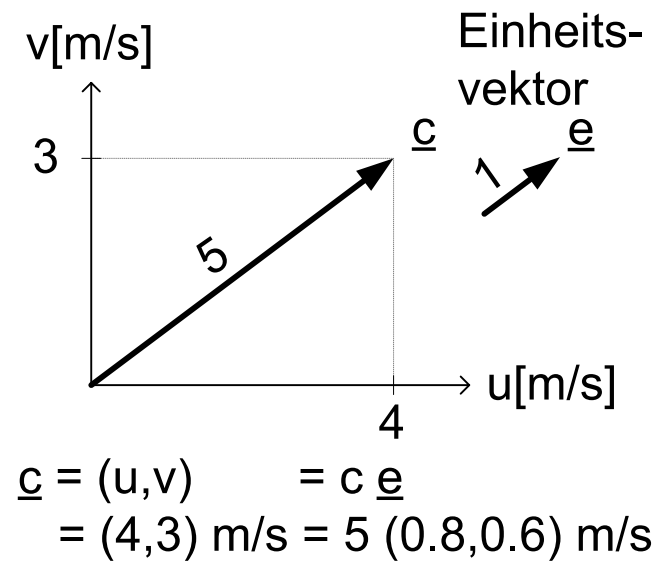
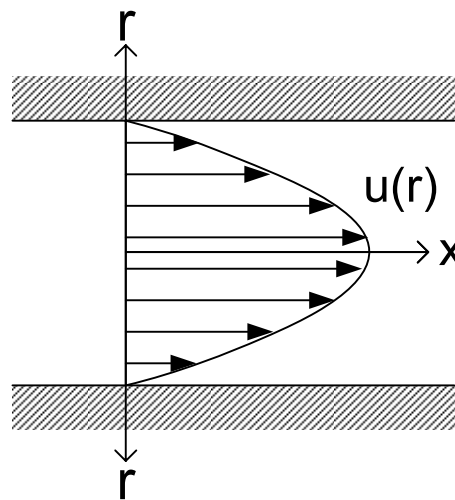
Eindimensionale Strömung



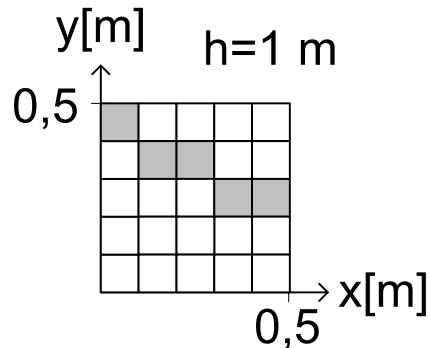
Scherströmung



Rohrströmung



Masse/Dichte



□ $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

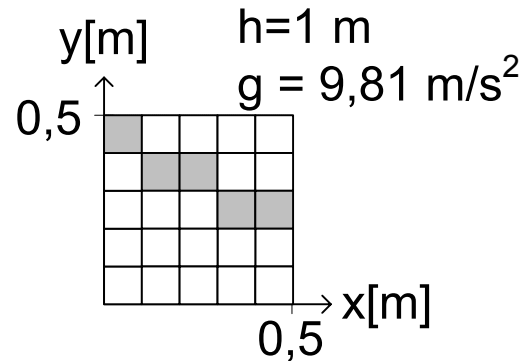
■ $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$

$$m = \sum_{i=1}^{25} \rho_i \Delta V = 30 \text{ kg}$$

$$\rho_m = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} \rho_i \Delta V = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$m = \int_{(V)} \rho \, dV$$

Kraft/Kraftdichte



□ $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

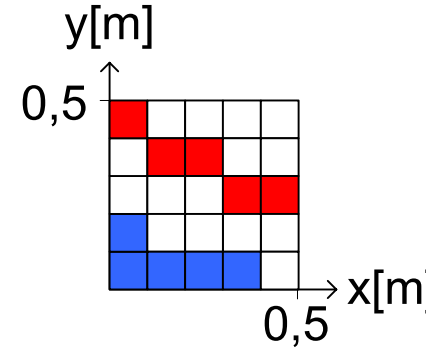
■ $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$

$$F_G = \sum_{i=1}^{25} \rho_i g \Delta V = 294,3 \text{ N}$$

$$\rho_m = \frac{1}{0,25 \text{ m}^2} \sum_{i=1}^{25} \rho_i g \Delta V = 11,772 \text{ mbar}$$

$$F_G = \int_{(V)} \rho g \, dV$$

Thermische Energie/ Temperatur



$h = 1 \text{ m}$
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
 $c_{th} = 1000 \text{ J/(kg K)}$

□ $t = 20^\circ\text{C}$

■ $t = 10^\circ\text{C}$

■ $t = 30^\circ\text{C}$

$$U = \sum_{i=1}^{25} \rho_i c_{th,i} T_i \Delta V = 73,2875 \text{ MJ}$$

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^{25} \rho_i c_{th,i} T_i \Delta V}{\sum_{i=1}^{25} \rho_i c_{th,i} \Delta V} = 293,15 \text{ K}$$

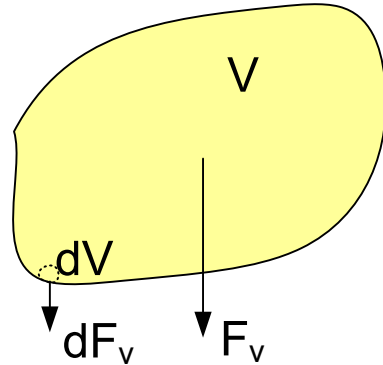
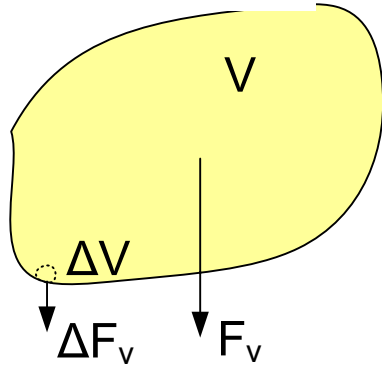
$t_m = 20^\circ\text{C}$

$$U = \int_{(V)} \rho c_{th} T \, dV$$

Extensive Größe: Bereichsgröße, teilbar

Intensive Größe: Ortsgröße, integrierbar

Volumenkraft



$$V = \sum_{(n)} \Delta V$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(n)} \Delta V = \int_{(V)} dV$$

$$F_V = \sum_{(n)} \Delta F_V$$

$$F_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(n)} \Delta F_V = \int_{(V)} dF$$

$$F_V = \sum_{(n)} f_V \Delta V$$

$$F_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(n)} f_V \Delta V = \int_{(V)} f_V dV$$

$$f_V = \frac{\Delta F_V}{\Delta V}$$

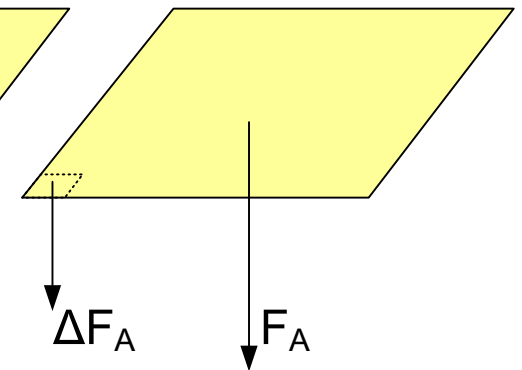
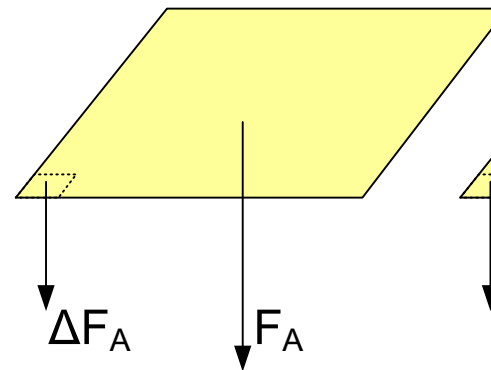
$$f_V = \frac{dF_V}{dV}$$

$$F_V = \sum_{(n)} \Delta F_V$$

$$F_V = \int_{(V)} f_V dV$$

meist Gewichtskraft $F_g = \int_{(V)} \rho g dV$ $f_g = \rho g$

Oberflächenkraft



$$A = \sum_{(n)} \Delta A$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(n)} \Delta A = \int_{(A)} dA$$

$$F_A = \sum_{(n)} \Delta F_A$$

$$F_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(n)} \Delta F_A = \int_{(A)} dF$$

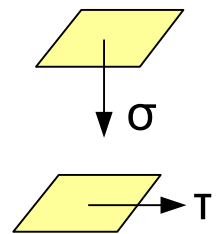
$$f_A = \frac{\Delta F_A}{\Delta A}$$

$$f_A = \frac{dF_A}{dA}$$

$$F_A = \int_{(A)} f_A dA$$

$$F_A = \sum_{(n)} f_A \Delta A$$

f_A { σ : Normalenspannung
Zug-/ Druckspannung
 τ : Tangentialspannung
Schubspannung



Temperatur

Formelzeichen: t , θ oder T (absolute Temperatur)
 Maß für die thermische Energie (Energie der ungerichteten Teilchenbewegung)

Wärmestrom

Formelzeichen: \dot{Q} oder \dot{q} (flächenbezogen)
 Transportstrom der thermischen Energie

L: Konduktiver Transport / Wärmeleitung

Wärmetransport durch gegenseitige Anregung der Teilchen (es findet kein Stofftransport statt)

K: Konvektiver Transport / Konvektion

Transport der beim Stofftransport mitgeführten thermischen Energie

K1: in ein oder aus einem raumfesten Volumen

K2: entlang einer Oberfläche¹⁾ anderer Temperatur (konvektiver Wärmeübergang)

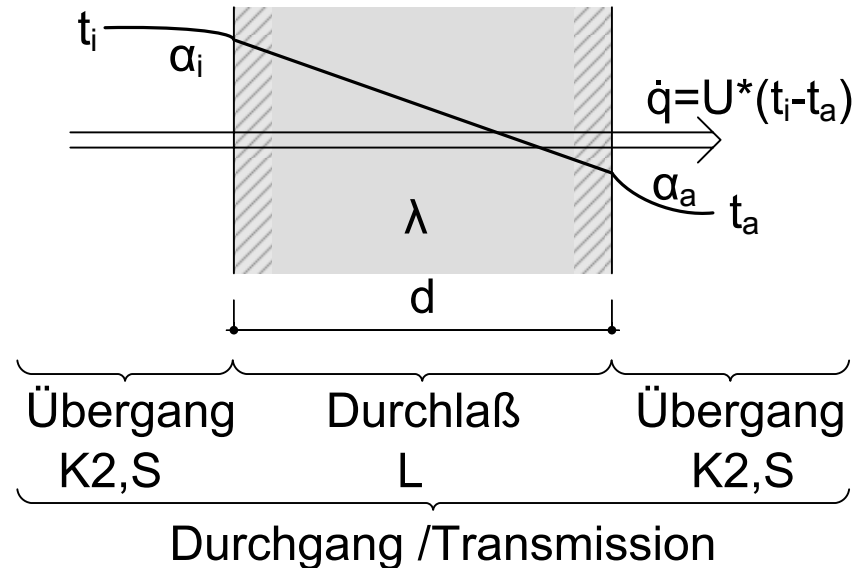
S: Strahlungs-Wärmetransport / (Radiation)

Überschuß im Strahlungsaustausch zw. Oberflächen¹⁾

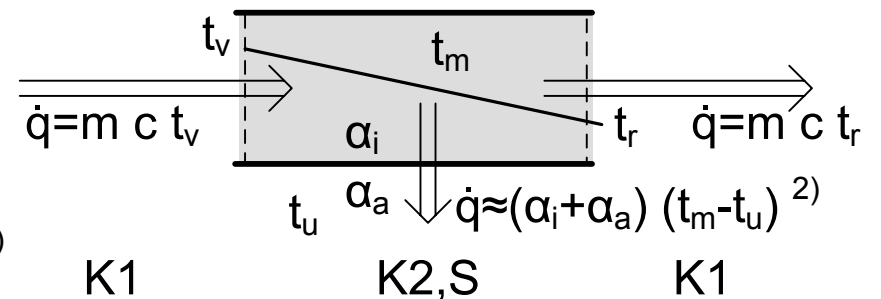
Wärmetransport über Verdunstung

Wandlung zw. thermischer und Bindungsenergie

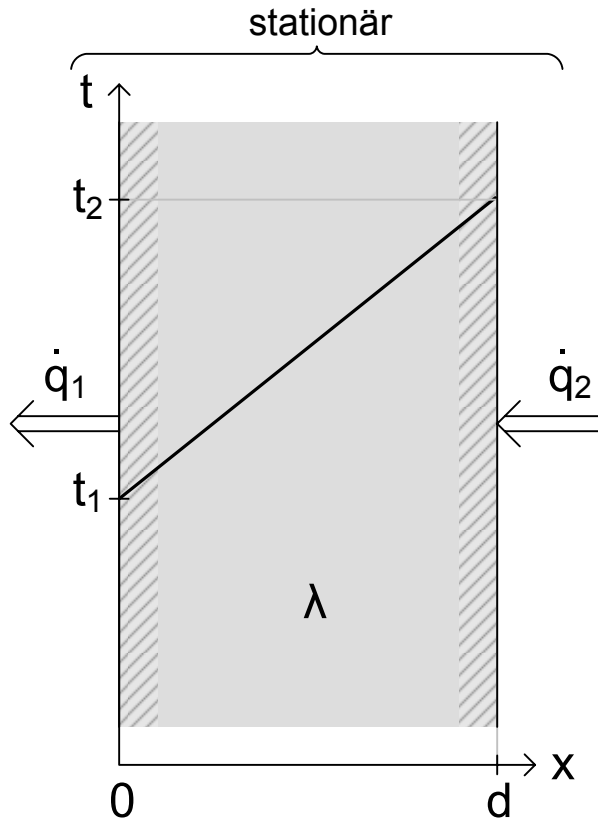
Wärmedurchgang in einer Wand



Wärmeabgabe eines Rohrabschnitts



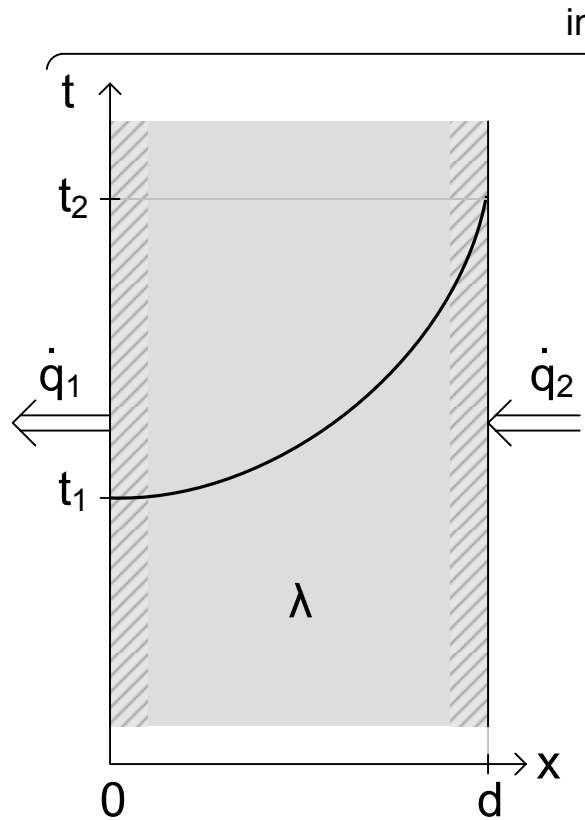
1): allgemeiner: Grenzfläche(n) 2): Rohrwand aus Metall



$$t(x) = t_1 + x/d \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\bar{t} = \int_0^d t(x) dx / d = t_1 + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = -\frac{\lambda}{d} \cdot (t_2 - t_1)$$

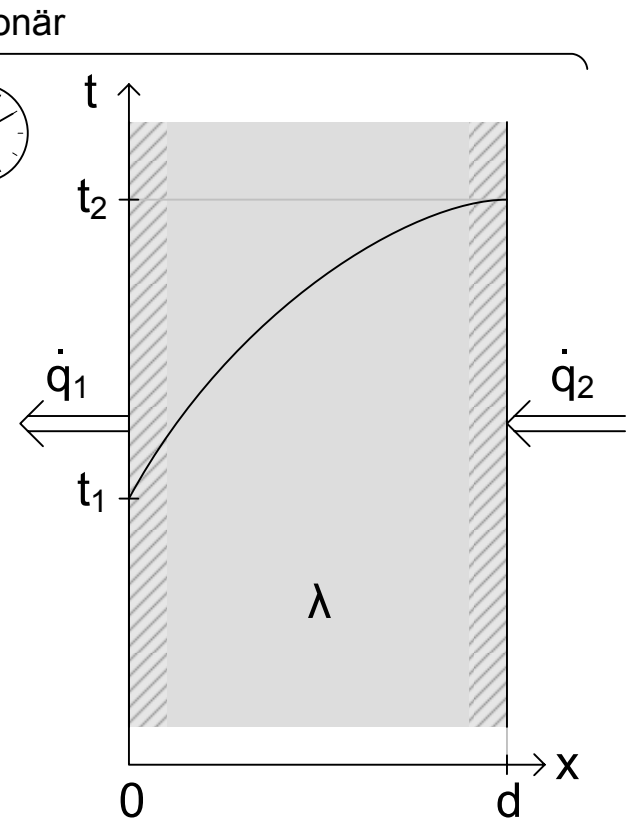


$$t(x) = t_1 + (x/d)^2 \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\bar{t} = \int_0^d t(x) dx / d = t_1 + \frac{1}{3}(t_2 - t_1)$$

$$\dot{q}_1 = 0$$

$$\dot{q}_2 = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx}(d) = -\frac{2\lambda}{d} \cdot (t_2 - t_1)$$



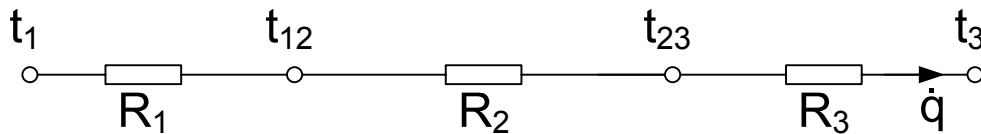
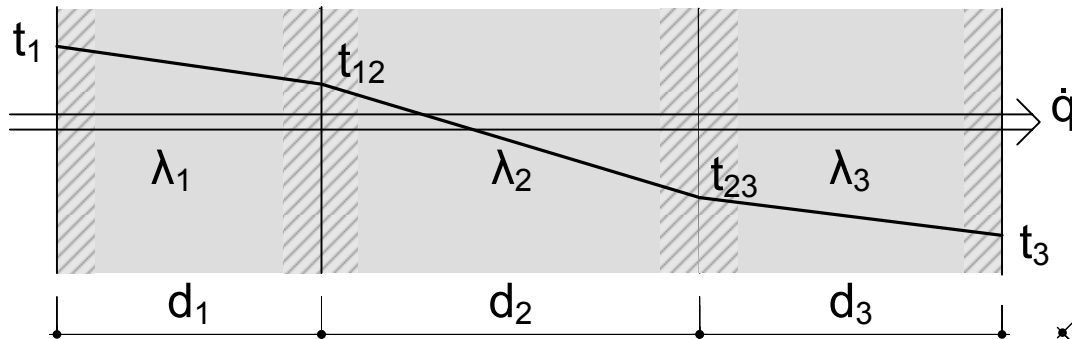
$$t(x) = t_1 + \sin\left(\frac{x}{d} \frac{\pi}{2}\right) \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\bar{t} = \int_0^d t(x) dx / d = t_1 + \frac{2}{\pi}(t_2 - t_1)$$

$$\dot{q}_1 = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx}(0) = -\frac{\pi\lambda}{2d} \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\dot{q}_2 = 0$$

Mehrschichtige Wand



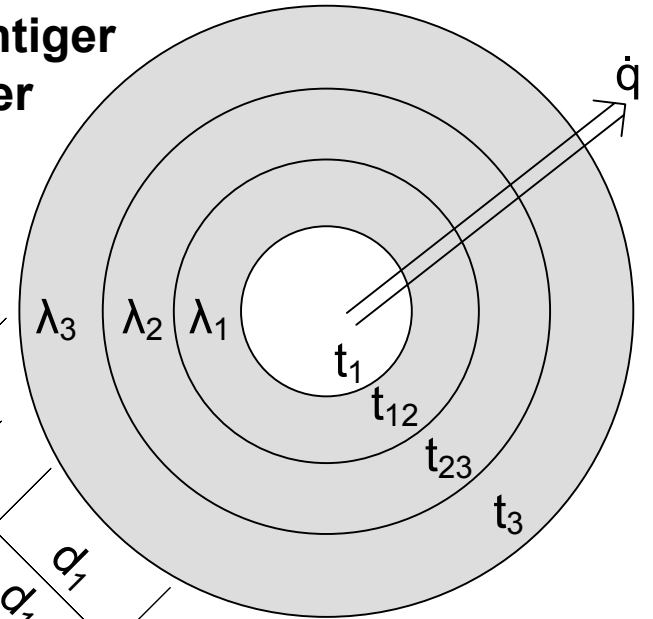
$$R_1 = d_1 / \lambda_1 \quad R_2 = d_2 / \lambda_2 \quad R_3 = d_3 / \lambda_3$$

$$t_1 - t_{12} = R_1 \dot{q} \quad t_{12} - t_{23} = R_2 \dot{q} \quad t_{23} - t_3 = R_3 \dot{q}$$

$$t_1 - t_{12} + t_{12} - t_{23} + t_{23} - t_3 = t_1 - t_3 = (R_1 + R_2 + R_3) \dot{q}$$

flächenbezogener Wärmestrom \dot{q} in W/m^2

Mehrschichtiger Hohlzylinder



$$R_1 = \frac{\ln(d_{12}/d_1)}{2 \pi \lambda_1}$$

$$R_2 = \frac{\ln(d_{23}/d_2)}{2 \pi \lambda_2}$$

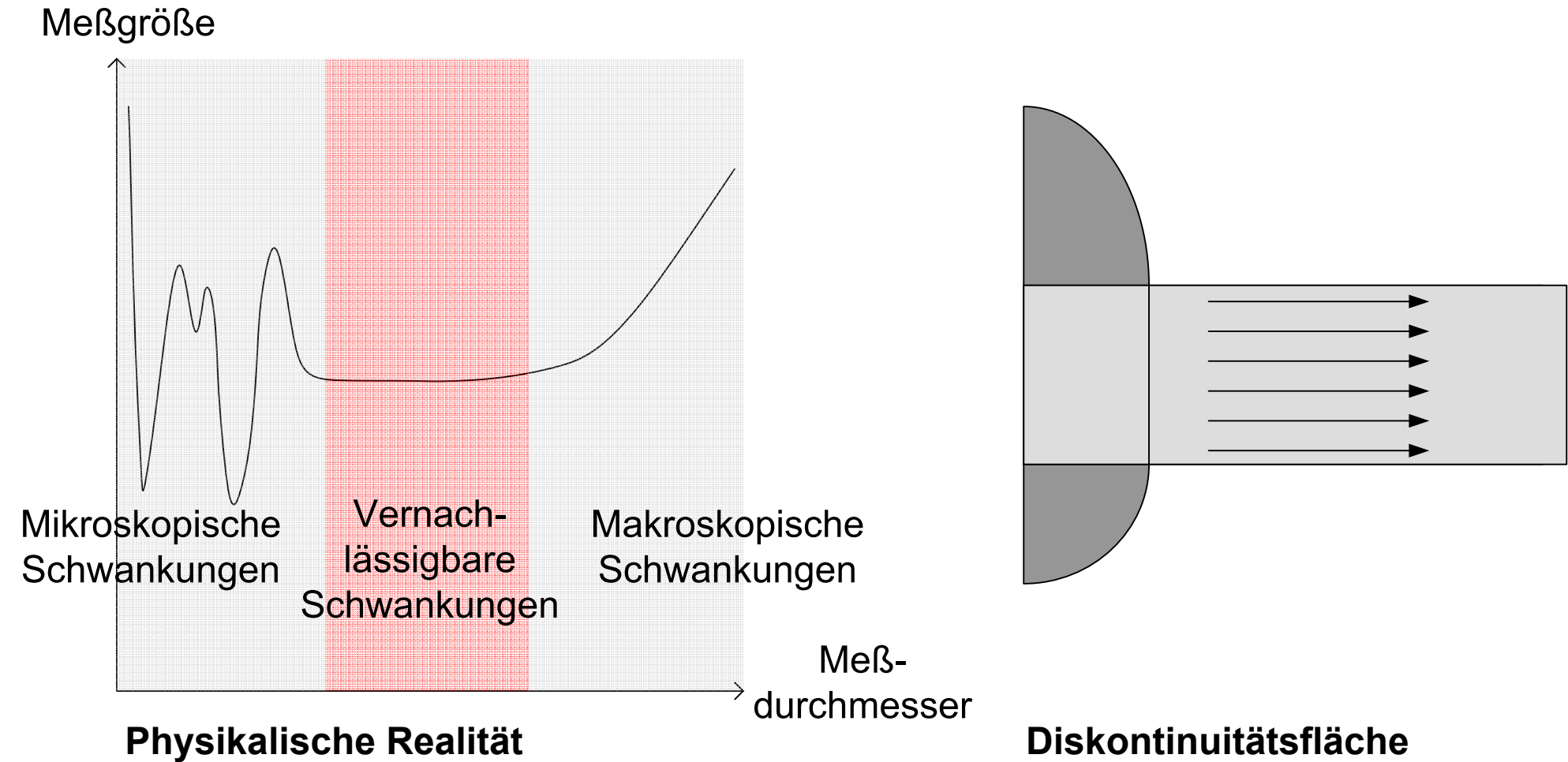
$$R_3 = \frac{\ln(d_3/d_{23})}{2 \pi \lambda_3}$$

$$t_1 - t_3 = (R_1 + R_2 + R_3) \dot{q}$$

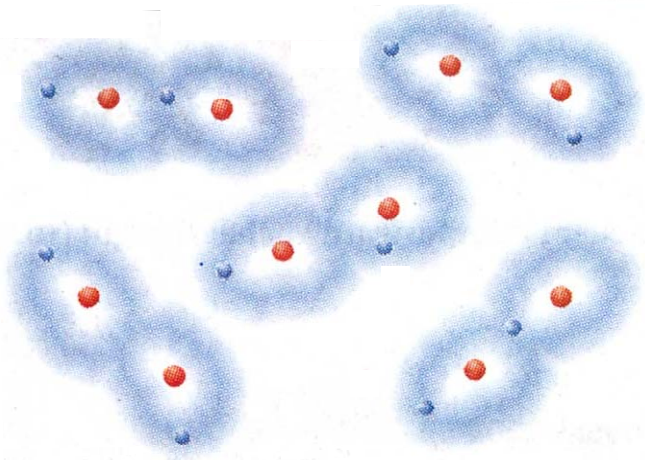
längenbezogener Wärmestrom \dot{q} in W/m

Idealisierte Vorstellung:

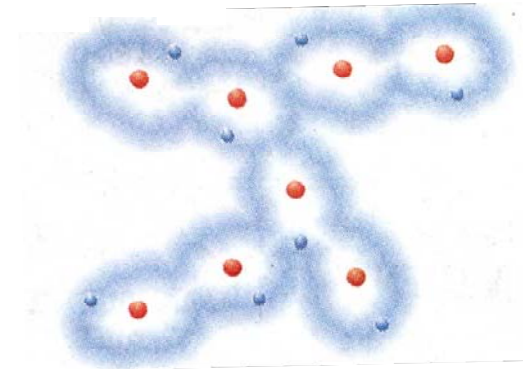
An jedem Ort im Raum befindet sich ein Teilchen. Alle Feldgrößen verlaufen kontinuierlich.



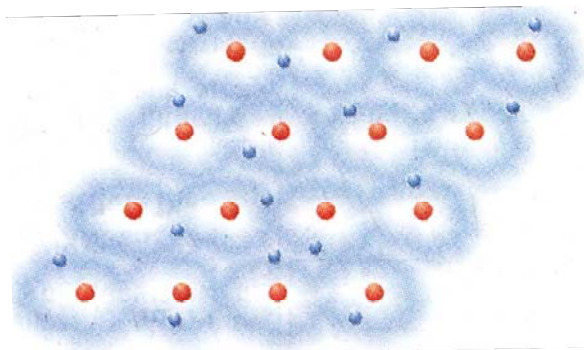
Quelle: Schade/Kunz: Strömungslehre



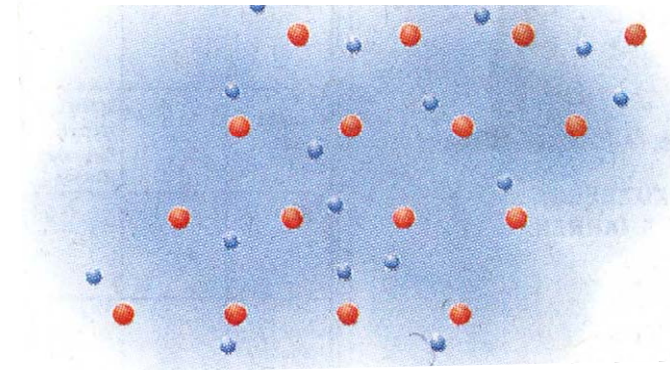
gasförmig



flüssig



fest

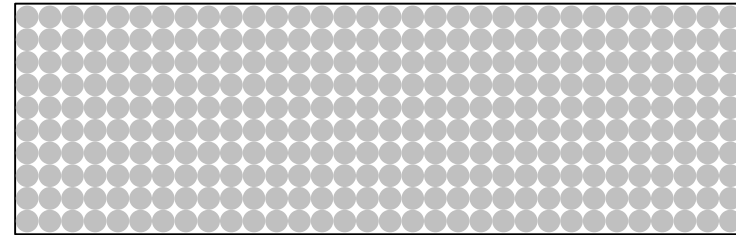


metallisch ?

Quelle: Nature, Bd. 431. S. 66

Bilder: Berliner Zeitung, 8.10.04

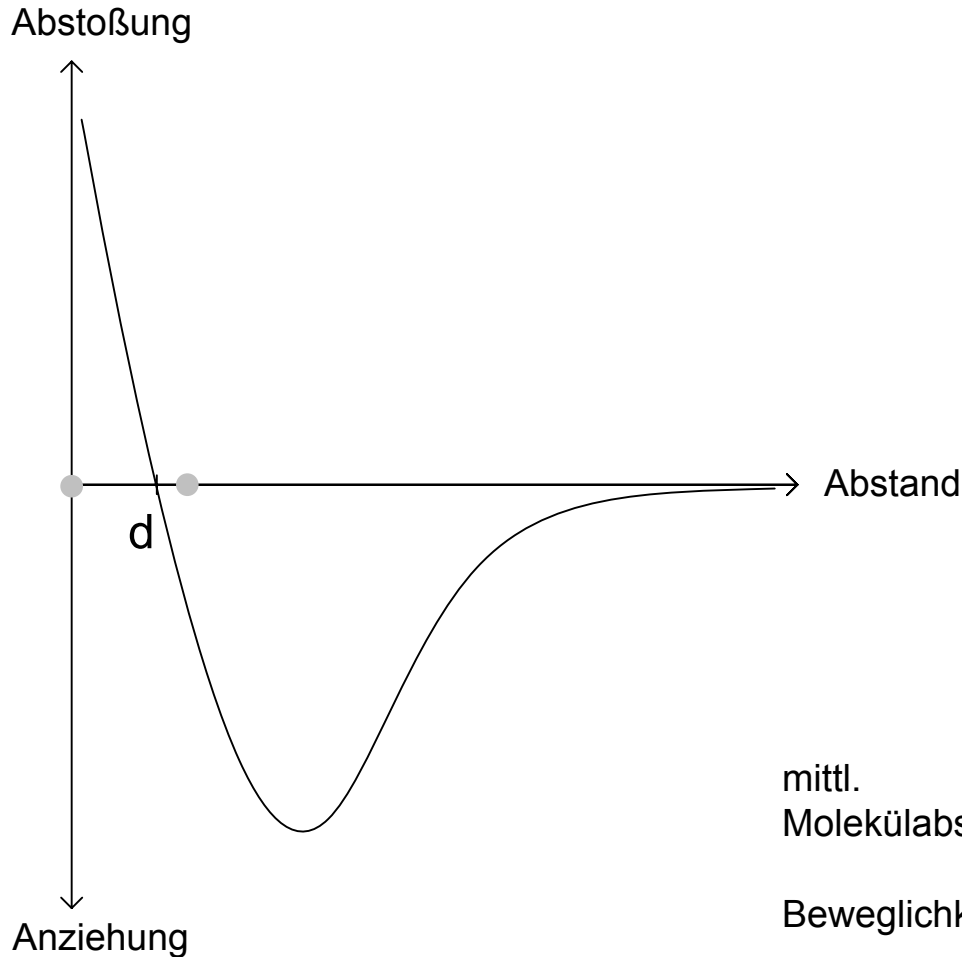
kristalliner Festkörper



Gas



Festkörper	Flüssigkeit	Gas
bestimmte Gestalt	bestimmtes Volumen	-
Größenordnung 10^{-10} m	Größenordnung 10^{-10} m	Größenordnung 10^{-9} m
kaum Platzwechsel	ständiger Platzwechsel	frei beweglich
-	-	Größenordnung 10^{-7} m



mittl.
Molekülabstand

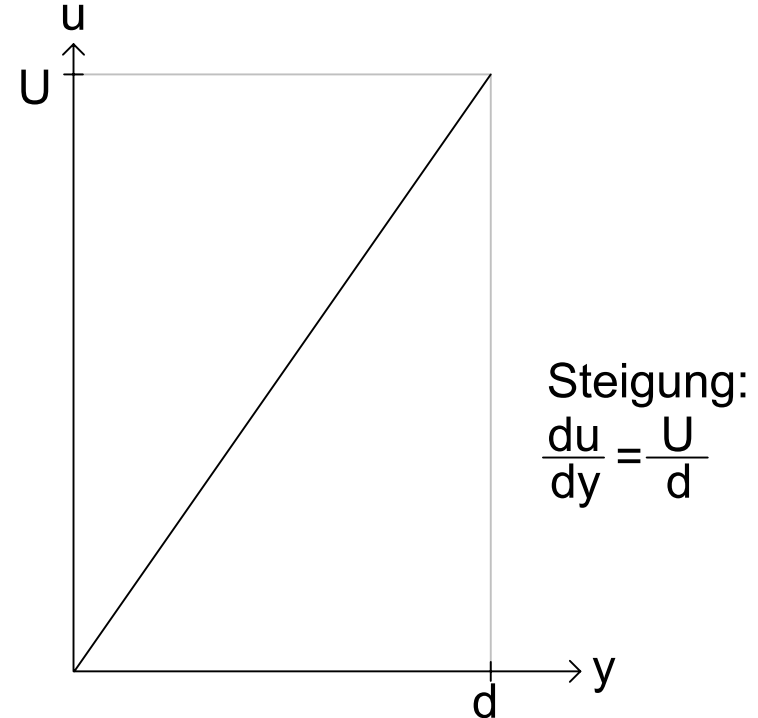
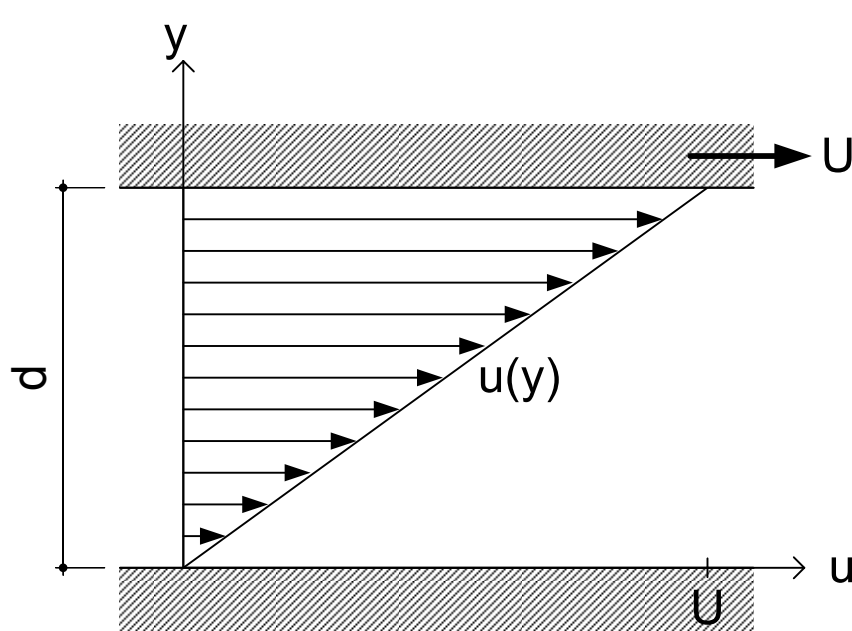
Beweglichkeit

freie Weglänge

Quelle: Schade/Kunz: Strömungslehre

Scherströmung (Couette-Strömung) zwischen zwei Platten

Obere Platte wird mit Geschwindigkeit U gegen untere Platte verschoben
In einem Newtonschen Fluid bildet sich folgendes Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ aus:



Newtonsches bzw. linear- viskoses Fluid

Schubspannungsaufnahme: $\tau = \eta \frac{du}{dy}$ Linear-viskos wg. der Proportionalität von τ und von $u(y)$

η : dynamische Zähigkeit (eta) oder auch Viskosität in $\text{kg}/(\text{m s})$ bzw. Pa s

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$: kinematische Zähigkeit (ν) in m^2/s

t **ρ** **v** **Ausdehnung *)**
 °C kg/m³ 10³ m³/kg %

0	999,87	1,00013	-
4	1000	1	-
10	999,73	1,00027	-
20	998,23	1,00177	0,19
40	992,24	1,00782	0,81
60	983,24	1,01705	1,69
80	971,83	1,02899	2,85
100	958,38	1,04343	4,27

bei 1000 hPa

*) : bezogen auf
Wasser von 10°C

p **Kompressibilität**
 bar 10¹¹/Pa

1-50	49
50-100	46
100-200	45
200-300	44
300-500	42
500-1000	38
1000-2000	33
2000-3000	27

bei 18°C

t	η Wasser	η Luft
°C	10^{-5} kg/(m s)	10^{-5} kg/(m s)

0	180	1,7
20	100	1,8
40	60	1,9
60	50	2,0
80	40	2,1
100	30	2,2

Flüssigkeiten:

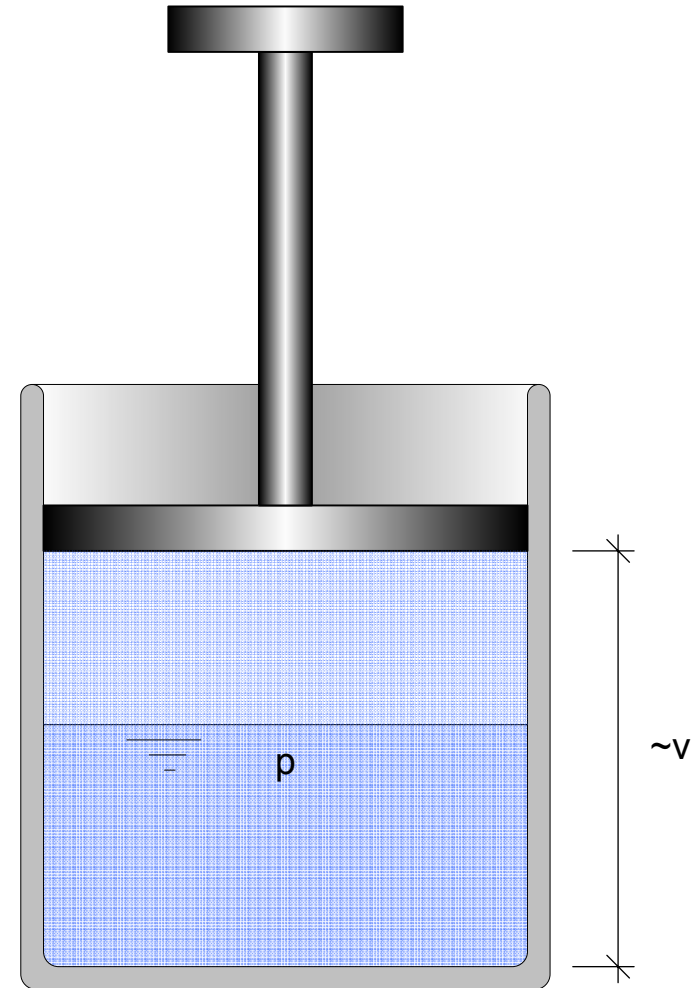
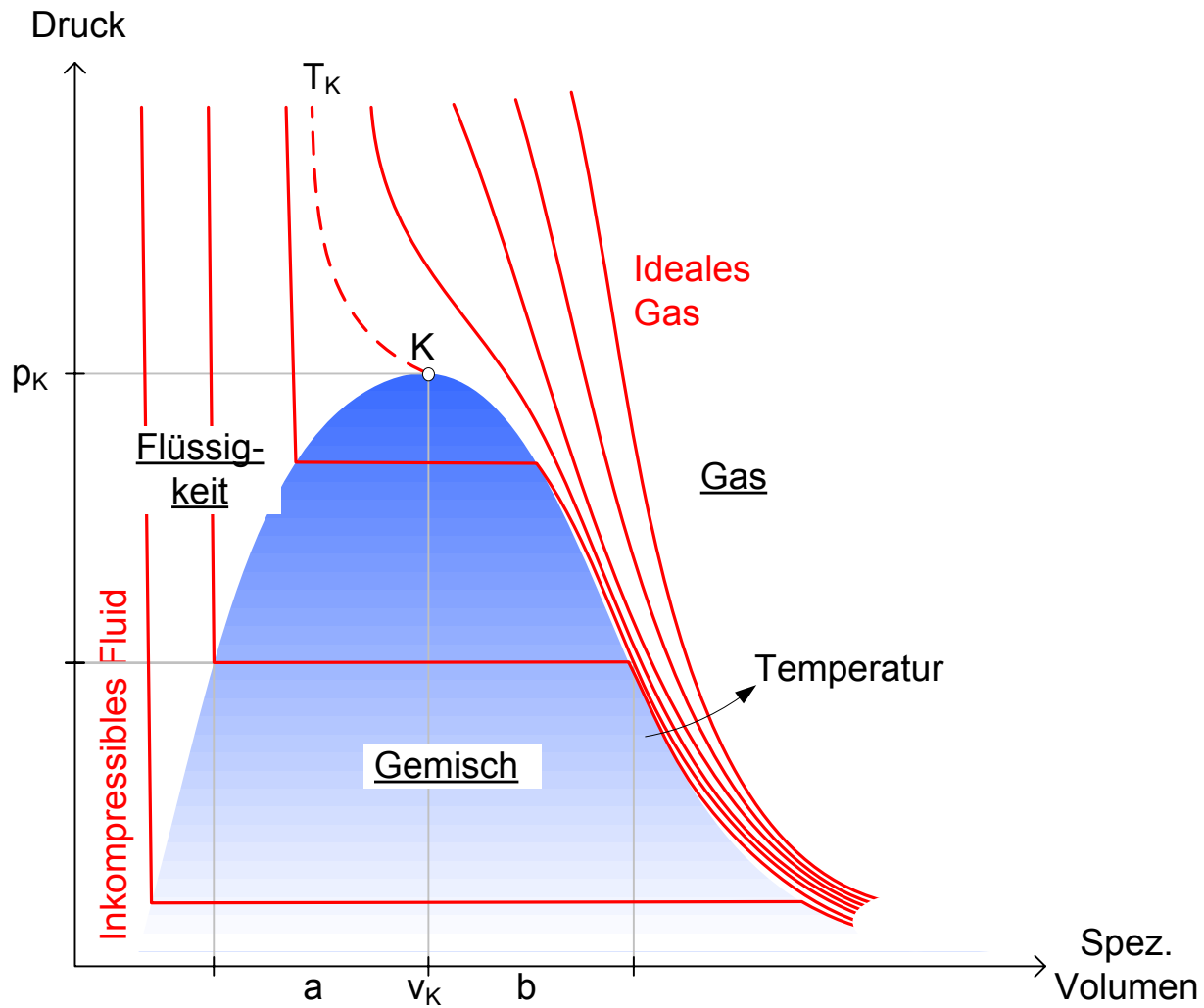
Höhere Schwingungsamplitude,
vermehrte Platzwechsel bei höherer
Temperatur

Gase:

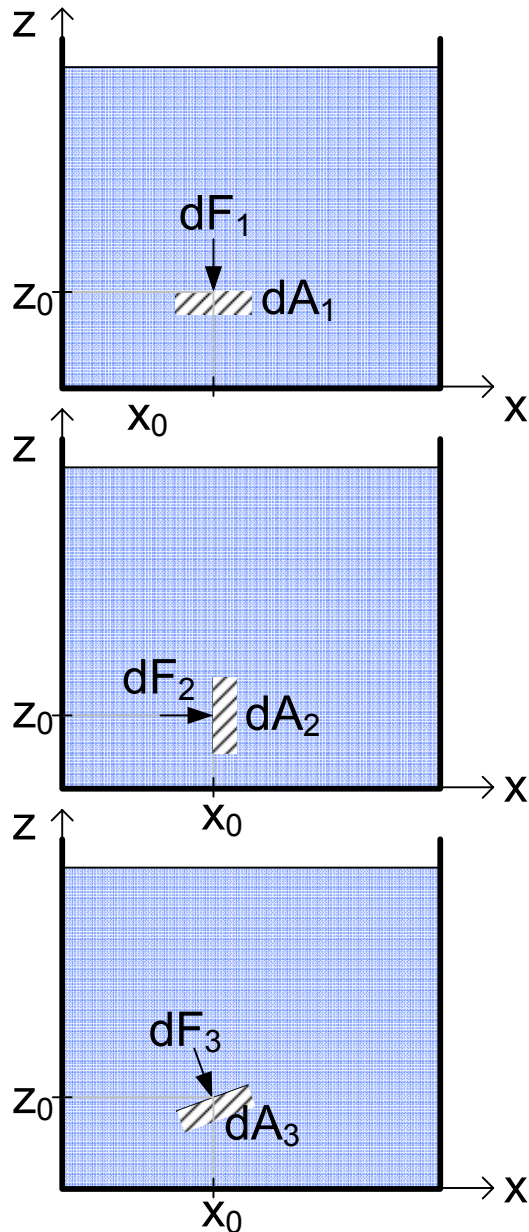
vermehrte Zusammenstöße in
Scherrichtung bei höherer
Temperatur

kinematische Zähigkeit: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

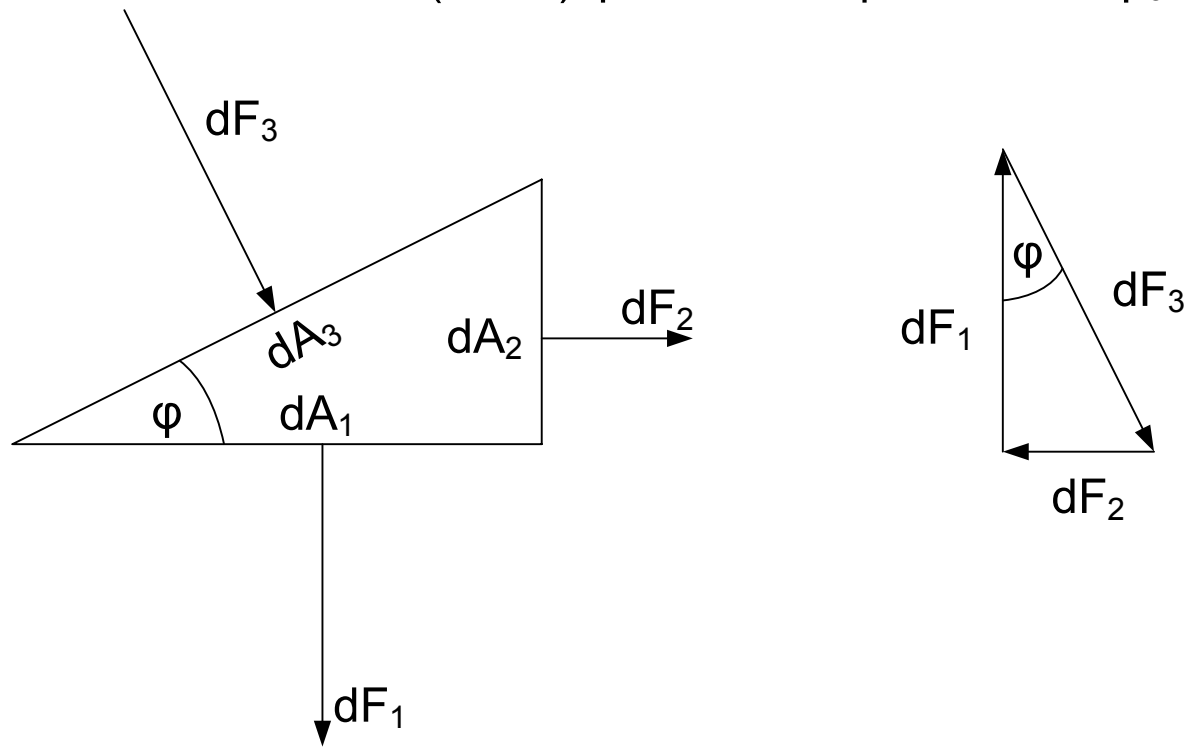
η (eta): dynamische Zähigkeit
 ν (ny): kinematische Zähigkeit
 ρ (rho): Dichte



Quelle: Schade/Kunz: Strömungslehre



p_1, p_2 und p_3 : Druckspannungen aus unterschiedlichen Richtungen am Punkt (x_0, z_0) $p_1 = dF_1/dA_1, p_2 = dF_2/dA_2, p_3 = dF_3/dA_3$

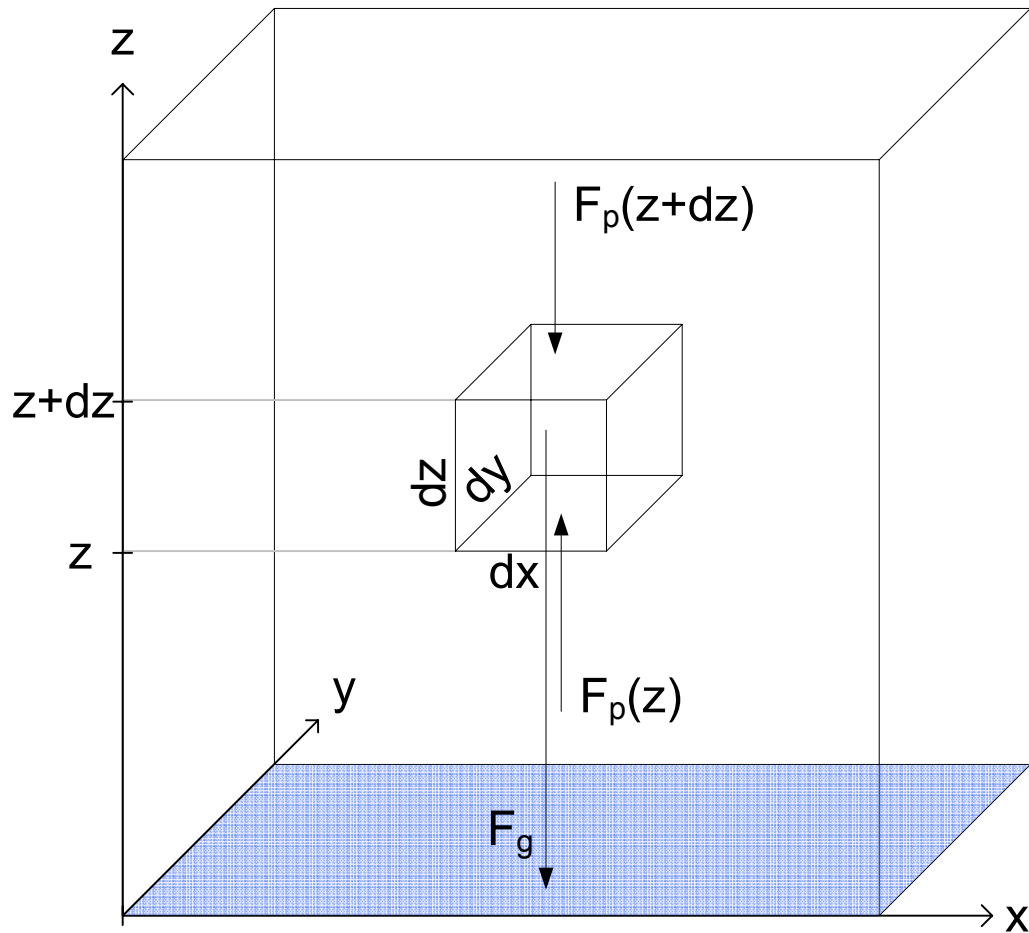


$$dA_1 = \cos \varphi \, dA_3 \quad p_1 = dF_1/dA_1 = dF_3/dA_3 = p_3 \quad dF_1 = \cos \varphi \, dF_3$$

$$dA_2 = \sin \varphi \, dA_3 \quad p_2 = dF_2/dA_2 = dF_3/dA_3 = p_3 \quad dF_2 = \sin \varphi \, dF_3$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p$$

**Infinitesimal kleiner Quader
in einem ruhenden Fluid:**



Eulersches Grundgesetz der Hydrostatik

$$F_p(z) - F_p(z+dz) - F_g = 0$$

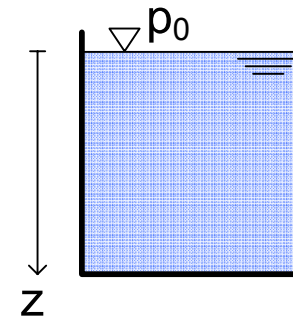
$$F_g = dx \, dy \, dz \, \rho \, g$$

$$F_p(z) = dx \, dy \, p(z)$$

$$F_p(z+dz) = dx \, dy \, p(z+dz)$$

$$\boxed{dp/dz = -\rho \, g}$$

Hydrostatische Druckverteilung



$\rho = \text{const.}$

$$\boxed{p(z) = p_0 + \rho \, g \, z}$$

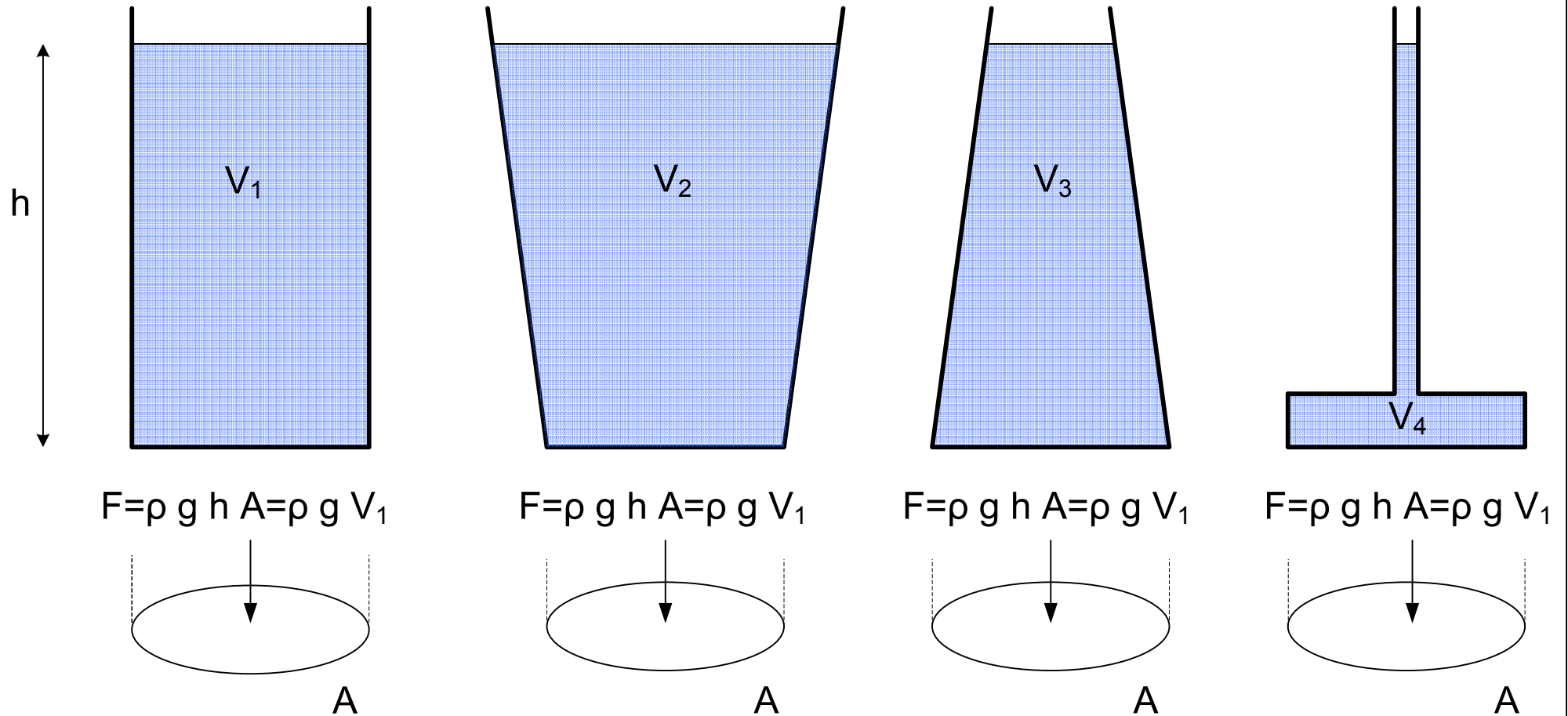
Barotrope Schichtung

$$\rho(z) = p(z)/(R \, T) \quad dp/dz = - p(z) \, g/(R \, T)$$

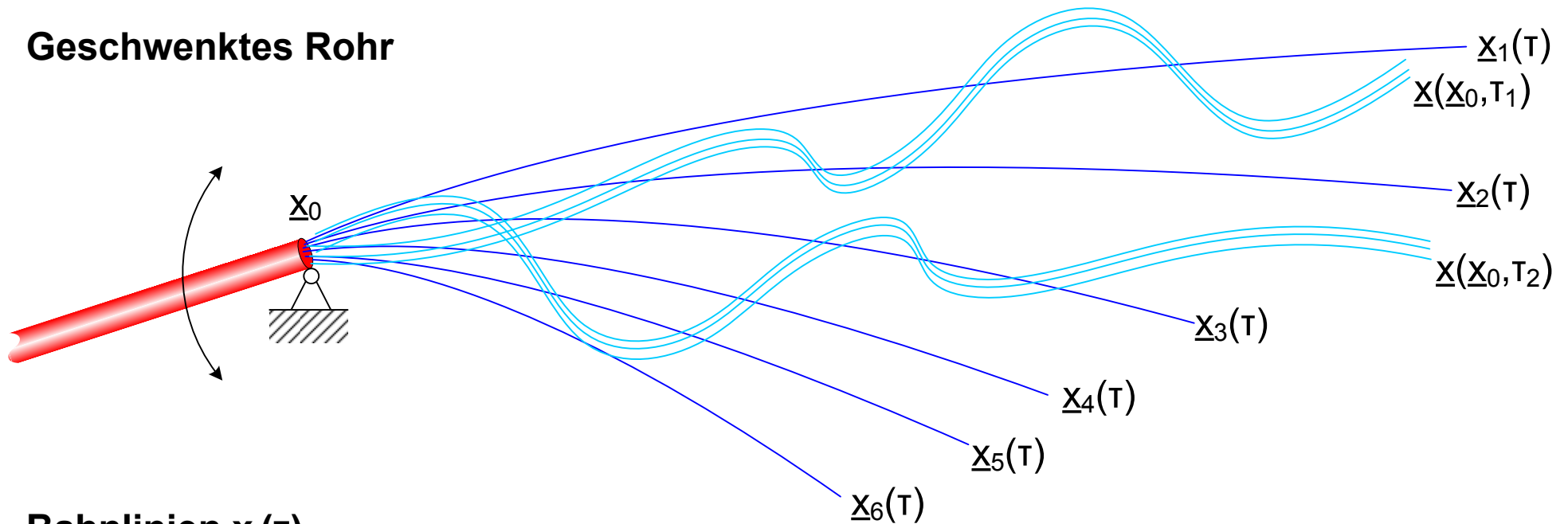


$$\boxed{p(z) = p_0 \, e^{-g/(R \, T)z}}$$

Hydrostatisches Paradoxon



Geschwenktes Rohr

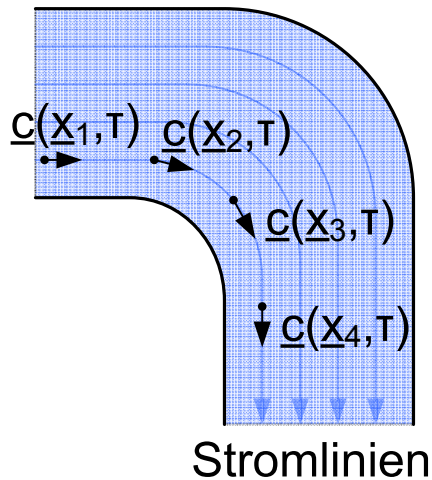


Bahnliesen $\underline{x}_i(\tau)$

- Bahnen, die die Teilchen, beginnend vom Ort \underline{x}_0 im Laufe der Zeit τ beschreiben
- zusammengesetzt aus Orten
- Langzeitaufnahmen

Streichlinien $\underline{x}(\underline{x}_0, \tau_i)$

- Kurven zu einem Zeitpunkt τ_j aus allen Teilchen, die von einem Ort \underline{x}_0 kommen
- zusammengesetzt aus Teilchen
- Momentaufnahmen



Stromlinien

- weisen in jedem Punkt in die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit
- zusammengesetzt aus allen Teilchen
- Momentaufnahmen.

Richtungsstationarität

- Geschwindigkeitsvektor zeitunabhängig in der Richtung
- Bahnlinien, Streichlinien und Stromlinien fallen zusammen

Stationarität

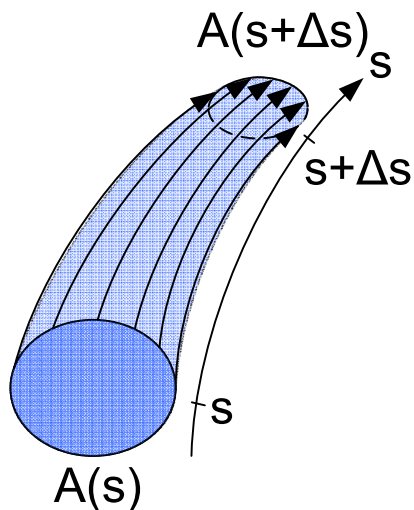
Geschwindigkeitsvektor zeitunabhängig in Betrag und Richtung

Instationarität

Geschwindigkeitsvektor zeitabhängig in Betrag und/oder Richtung

Stromröhre

- zwei Stirn- und eine Mantelfläche
- Mantelfläche wird durch Stromlinien gebildet
- Teilchen können nur durch die Stirnflächen hindurchtreten



Stromfaden

Stromröhre, in der alle Größen über den Querschnitt hinweg konstant sind

Bilanzgleichung

Gleichung über die zeitliche Änderung einer Größe (Bilanzgröße, z.B. Menschenzahl) in einem Bilanzbereich (z.B. Berlin).

Allgemeine Form:

Zeitliche Änderung der Bilanzgröße im Bereich = Transportströme in den Bereich + Wandlungsströme im Bereich

Transportströme in den Bereich (z.B. täglich nach Berlin Reisende) tragen positives Vorzeichen, Transportströme aus dem Bereich (z.B. täglich aus Bln. Ausreisende) tragen negatives Vorzeichen. Wandlungen, die zu einer Vermehrung der Bilanzgröße im Bereich führen (z.B. tägliche Geburten in Berlin) tragen positives Vorzeichen, Wandlungen, die zu einer Minderung führen (z.B. tägliche Sterbefälle) tragen negatives Vorzeichen.

Im stationären Fall ist die linke Seite Null, d.h. die Bilanzgröße ändert sich nicht. Alle Transport und Wandlungsströme gleichen sich dann genau aus. Änderts sich z.B. an einem Tag die Zahl der Menschen in Berlin nicht, muß die Summe aller Ein- und Ausreisenden, aller Geburten und aller Sterbefälle an diesem Tag Null sein.

In der Strömungs- und Wärmelehre interessierende Bilanzbereiche

1. materielle, aus Teilchen bestehende Volumen, 2. raumfeste, aus Orten bestehende Volumen, 3. einzelne Punkte im Raum
4. Stromfäden als Sonderfall eines raumfesten Volumens.

Bilanzgrößen werden meist als Bereichsintegrale einer intensiven Größe (Ortsgröße) dargestellt.

Z.B. ist die Masse eines Wassertropfens gleich dem Volumenintegral der Dichte im Tropfen.

In der Strömungs- und Wärmelehre interessierende Bilanzgrößen

Masse, Impuls, Energie

In der Strömungs- und Wärmelehre auftretende Transportströme

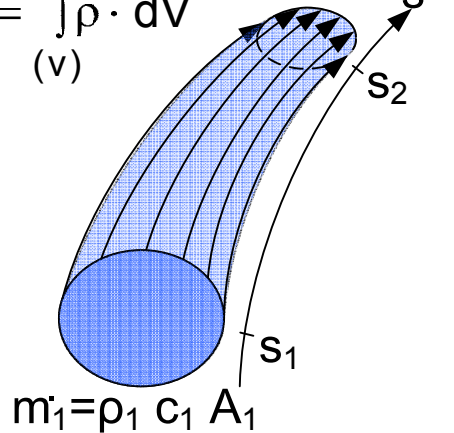
1. immaterielle Transporte (Konduktion), z.B. Wärmeleitung und Oberflächenkräfte,
2. materielle Transporte (Konvektion), z.B. ein- und austretender Massenstrom, Eintritts- und Austrittsenthalpie (materielle Transporte treten bei einem raumfesten Volumen wie z.B. einem Stromfaden oder einem Punkt im Raum auf).

Wandlungen

Kräfte, die auf alle Teilchen des Bereichs wirken (Volumenkräfte, z.B. Gewichtskraft) oder Energiewandlung (z.B. Strahlung)

Bilanzgröße

$$m = \int_{(v)} \rho \cdot dV$$



Massenbilanz

Bilanzgröße

Masse $\dot{m}(\tau)$ im Stromfaden

Materielle Transportströme (Konvektion)

Massenströme \dot{m}

Immaterielle Transportströme (Konduktion)

keine

Wandlungsströme

keine

Impulsbilanz

Bilanzgröße

Impuls $\underline{I}(\tau) = \dot{m} \underline{c}(\tau)$ im Stromfaden

Materielle Transportströme (Konvektion)

Impulsströme $\dot{m} \underline{c}$

Immaterielle Transportströme (Konduktion)

Oberflächenkräfte:

1. Druckkräfte an den Stirnflächen

2. Reibungskräfte (Schubspannungskräfte) an der Mantelfläche

Wandlungsstrom

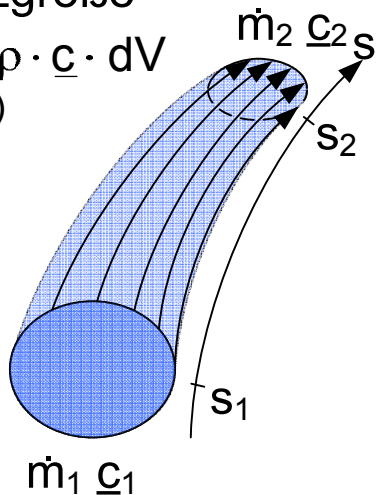


Volumenkraft:

Gewichtskraft auf die Masse im Stromfaden

Bilanzgröße

$$\underline{I} = \int_{(v)} \rho \cdot \underline{c} \cdot dV$$



$$\rho \int_1^2 \frac{dc}{d\tau} ds = \left(\rho \frac{c_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 \right) - \left(\rho \frac{c_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 \right)$$

Gleichung

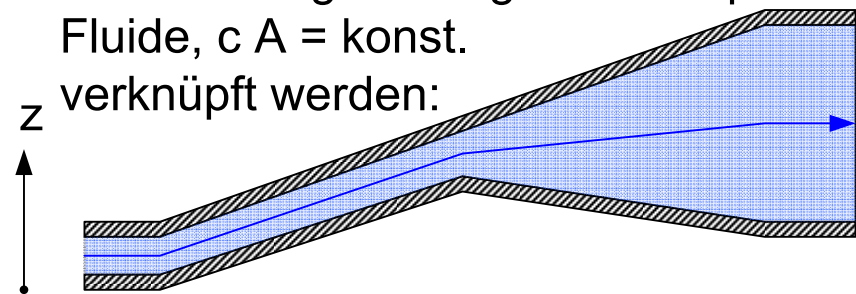
$$\frac{c_1^2}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho} \cdot g z_1 = \frac{c_2^2}{2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho} \cdot g z_2 = H$$

Voraussetzungen

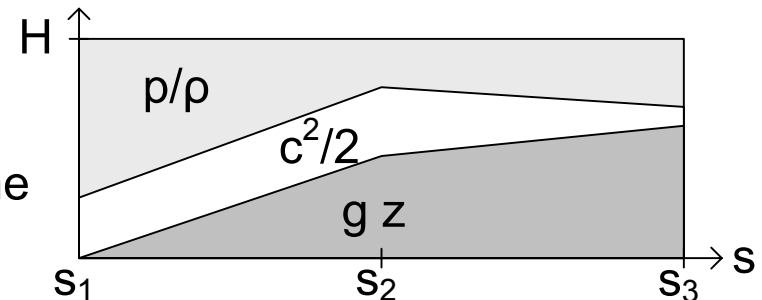
- Stationarität: $c = c(s)$, nicht $c = c(s, \tau)$
- inkompressibles Fluid: $\rho = \text{const.}$
- reibungsfreies Fluid, keine Schubspannungsaufnahme
- Schwerfeld als einziges Kraftfeld

Bernoulli-Diagramm

- Bernoulligleichung gilt nur zwischen zwei Punkten einer Stromlinie zur gleichen Zeit
- Wenn die Stromlinie Teil einer Stromröhre ist, kann die Bernoulli-Gleichung mit der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide, $c A = \text{const.}$ verknüpft werden:

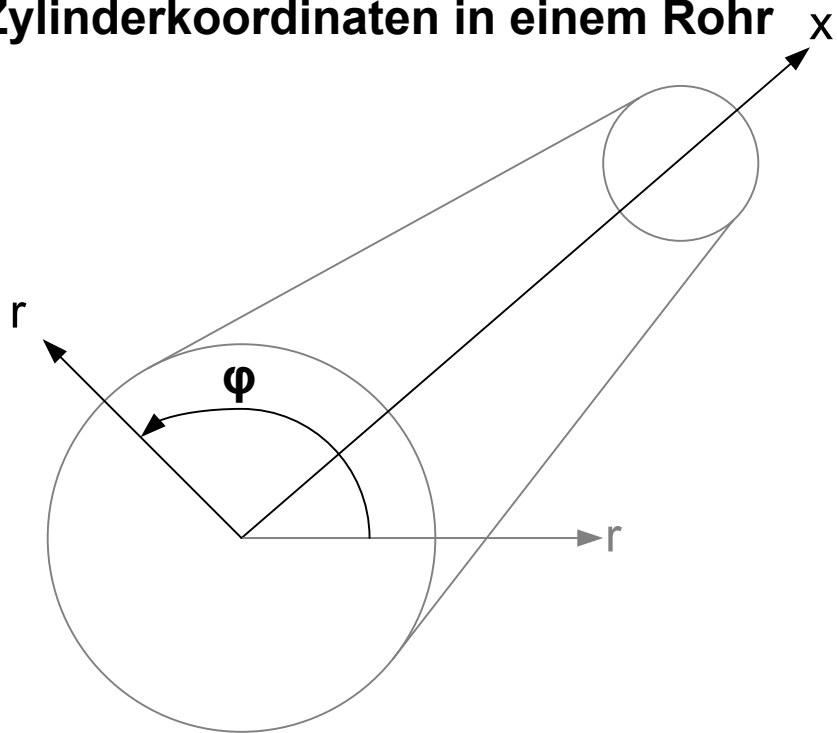


- 1.Schritt: $g z$ nach z -Verlauf der Stromlinie
- 2.Schritt: $c^2/2$ nach Querschnittsverlauf
- 3.Schritt: p/ρ auffüllen bis $H = \text{const.}$



(Hinweis: Die folgenden Indizes und die Wahl der Reihenfolge sind Konvention in dieser Veranstaltung. In der Literatur findet man andere Indizes (z für die axiale Richtung) und eine andere Reihenfolge (axiale Richtung zuletzt))

Zylinderkoordinaten in einem Rohr



axiale Richtung „x“

in Strömungsrichtung gerichtet
auch gekrümmter Verlauf möglich
z.B. Stromlinie in Rohrmitte

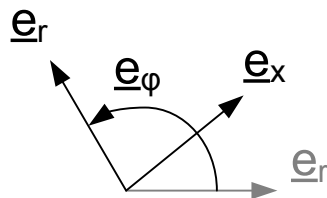
radiale Richtung „r“

von der Rohrmitte zur Wand hin gerichtet
Einheitsvektor drehbar wie ein Zeiger

azimutale Richtung „φ“

gibt den Drehwinkel des Einheitsvektors
der radialen Richtung an

Basis, Einheitsvektoren

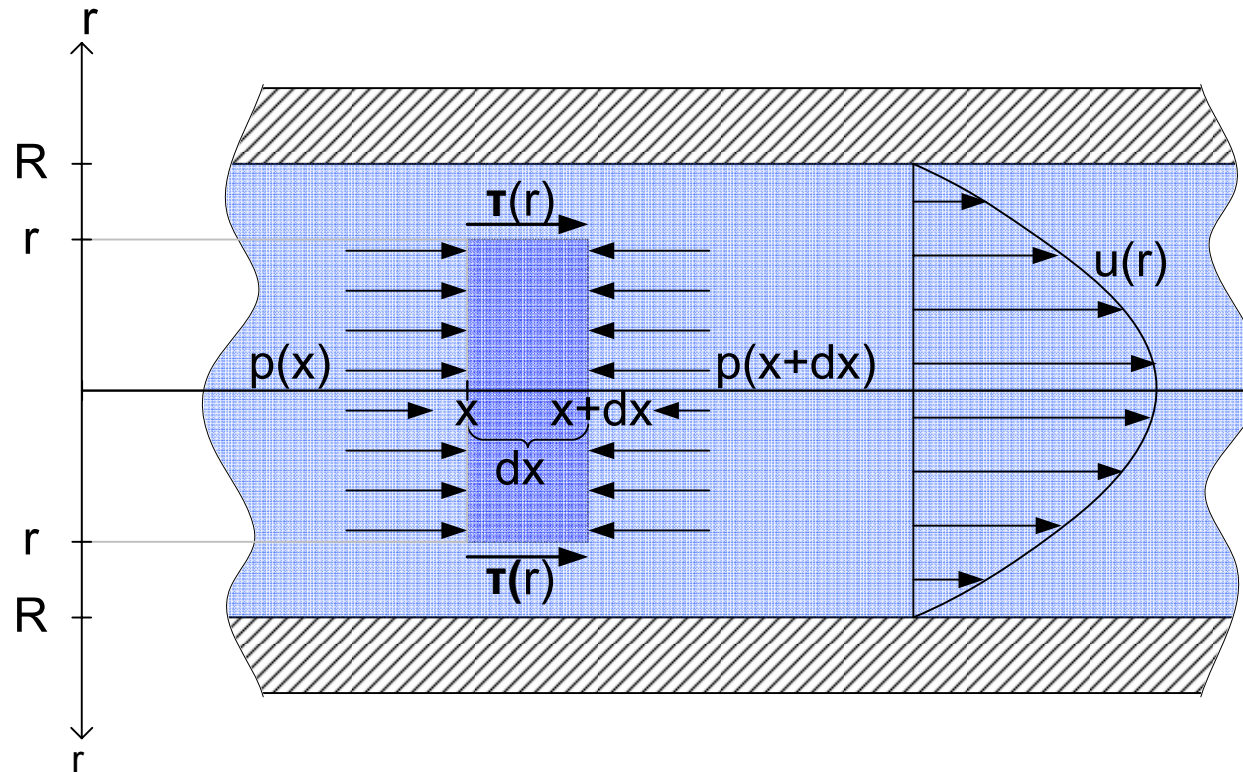


Darstellung eines Punktes in Zylinderkoordinaten

Linearkombination

$$\underline{x}(x,r,\varphi) = x \underline{e}_x + r \underline{e}_r + \varphi \underline{e}_\varphi$$

Z.B. $\underline{x}(1,R,\pi/2)$: 1 m ins Rohr hinein, an der Oberkante



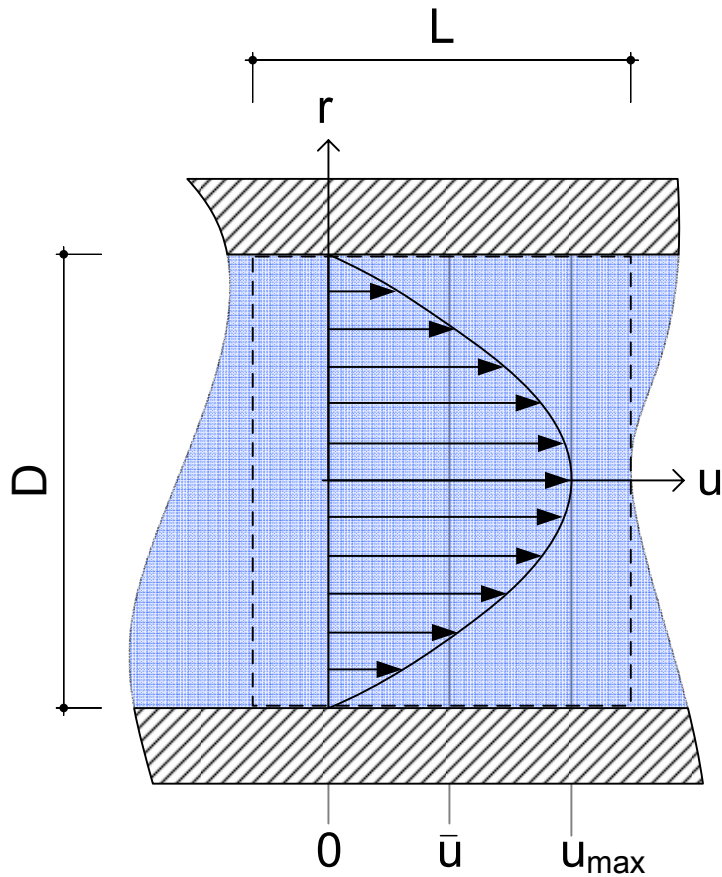
$$u(r) = \frac{R^2}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$= \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] u_{\max}$$

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

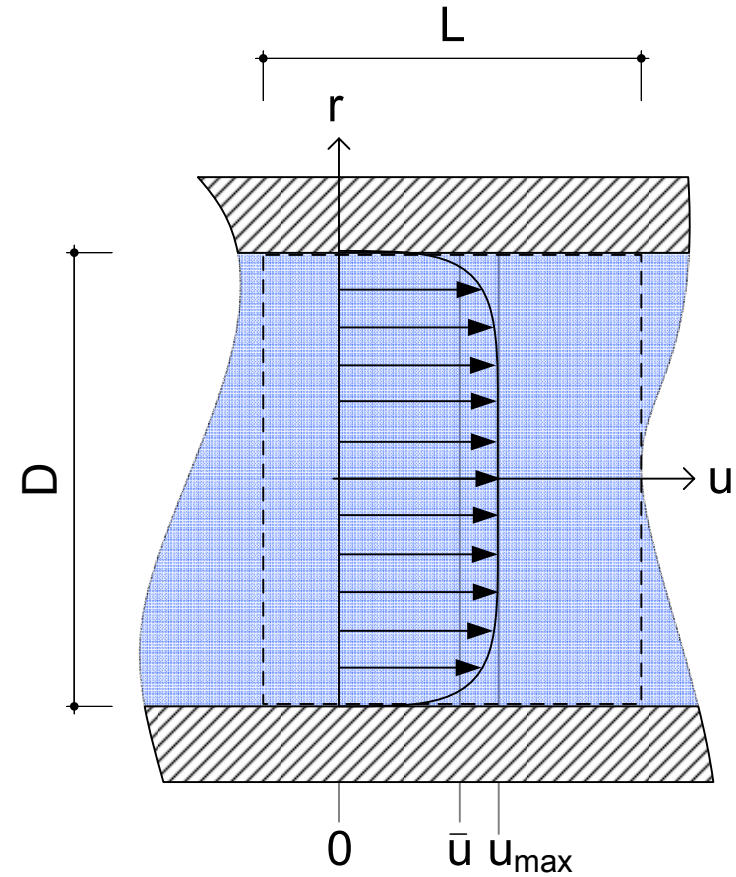
$$\Delta p_v = \frac{32\eta cL}{D^2}$$

Laminare Strömung



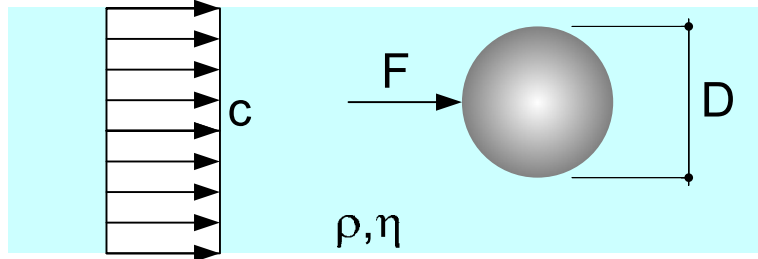
plattenartige Strömung
 $Re \leq 2320$, $u_{max} = 2 \bar{u}$
 $\lambda = 64/Re$

Turbulente Strömung



Querdiffusion
 $Re > 5000$, $u_{max} \approx 1,25 \bar{u}$
 $1/\sqrt{\lambda} = C_1 \cdot \ln(\sqrt{\lambda} \cdot Re) - C_2$

Beispiel Kraft auf umströmte Kugel



gesuchter Zusammenhang

$$F = f(D, \rho, c, \eta)$$

Allgemeine Dimensionsmatrix

	kg	m	s	
[D]	0	1	0	[D] = kg ⁰ m ¹ s ⁰
[ρ]	1	-3	0	[ρ] = kg ¹ m ⁻³ s ⁰
[c]	0	1	-1	[c] = kg ⁰ m ¹ s ⁻¹
[η]	1	-1	-1	[η] = kg ¹ m ⁻¹ s ⁻¹
[F]	1	1	-2	[F] = kg ¹ m ¹ s ⁻²

Natürliche Einheiten

3 linear unabhängige Spalten ⇒ 3 Einflußgrößen werden natürliche Einheiten, gewählt: D, ρ, c, verbleibend: F, η

Kriterielle Gleichung

$$\frac{F}{D^{m1} \rho^{m2} c^{m3}} = f\left(\frac{\eta}{D^{n1} \rho^{n2} c^{n3}}\right)$$

Natürliche Dimensionsmatrix

	D	ρ	c	
[η]	m1	m2	m3	[η] = D ^{m1} ρ ^{m2} c ^{m3}
[F]	n1	n2	n3	[F] = D ⁿ¹ ρ ⁿ² c ⁿ³

Auffinden der Koeffizienten

$$[\eta] = D^{m1} \rho^{m2} c^{m3} \Leftrightarrow$$

$$kg^1 m^{-1} s^{-1} = (kg^0 m^1 s^0)^{m1} (kg^1 m^{-3} s^0)^{m2} (kg^0 m^1 s^{-1})^{m3}$$

$$\Leftrightarrow kg^1 m^{-1} s^{-1} = kg^{m1} m^{m1-3 m2+m3} s^{-m3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kg^1 = kg^{m1} \Leftrightarrow m1=1 \\ m^{-1} = m^{m1-3 m2+m3} \Leftrightarrow -1 = m1-3 m2+m3 \Leftrightarrow m1=1 \\ s^{-1} = s^{-m3} \Leftrightarrow m3=1 \end{cases}$$

[F] (analoge Rechnung): n1=2 n2=1 n3=2

$$\Rightarrow \frac{F}{D^2 \rho c^2} = f\left(\frac{\eta}{\rho D c}\right) = f\left(\frac{1}{Re}\right) \hat{=} f(Re) \Leftrightarrow \tilde{F} = f(Re)$$

„dimensionslose Kraft“ \tilde{F} nur von Re abhängig

Größengleichung

zur Bestimmung interessierender Größen, z.B. $f(F, D, \rho, c, \eta) = 0$, Lösungsformel: $F = f(D, \rho, c, \eta)$, als Zusammenhang zwischen einer interessierenden Größe F und deren Einflußgrößen D, ρ, c, η

Wertgleichung

zur Bestimmung von Werten der interessierenden Größen, z.B. explizit, gemäß einer Lösungsformel

$$\tilde{F} [F] = f(\tilde{D} [D], \tilde{\rho} [\rho], \tilde{c} [c], \tilde{\eta} [\eta])$$

mit Zahlenwerten $\tilde{F}, \tilde{D}, \dots$ und Einheiten $[F], [D], \dots$

Zahlenwertgleichung

nach „Wegkürzen“ von Einheiten, z.B. explizit als

$$\tilde{F} = f(\tilde{D}, \tilde{\rho}, \tilde{c}, \tilde{\eta}) \Leftrightarrow \frac{F}{[F]} = f\left(\frac{D}{[D]}, \frac{\rho}{[\rho]}, \frac{c}{[c]}, \frac{\eta}{[\eta]}\right)$$

Einheitengleichung

Gleichung zw. den Einheitsgrößen, z.B. explizit als $[F] = f([D], [\rho], [c], [\eta])$ als Grundlage d. Zahlenwertgl.
 Voraussetzungen: 1. physikalische Homogenität der Größengleichung, 2. konsistentes Einheitensystem

Natürliche Einheiten

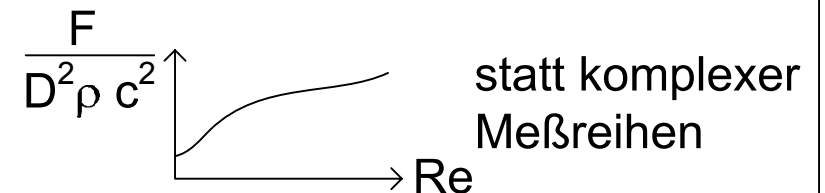
Einheitsgrößen aus der Problemstellung, z.B. Masse einer Kugel, statt allgemeiner Einheitsgrößen wie des Urkilogramms in Sevrés

Kriterielle Gleichung

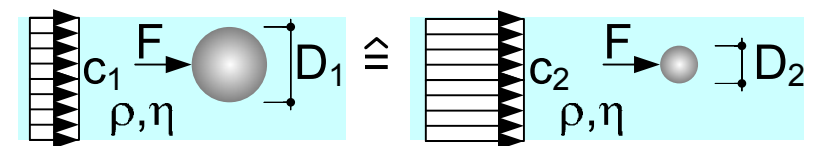
Zahlenwertgleichung aus einer Wertgleichung mit natürlichen Einheiten, z.B. $\tilde{F} = f(Re)$

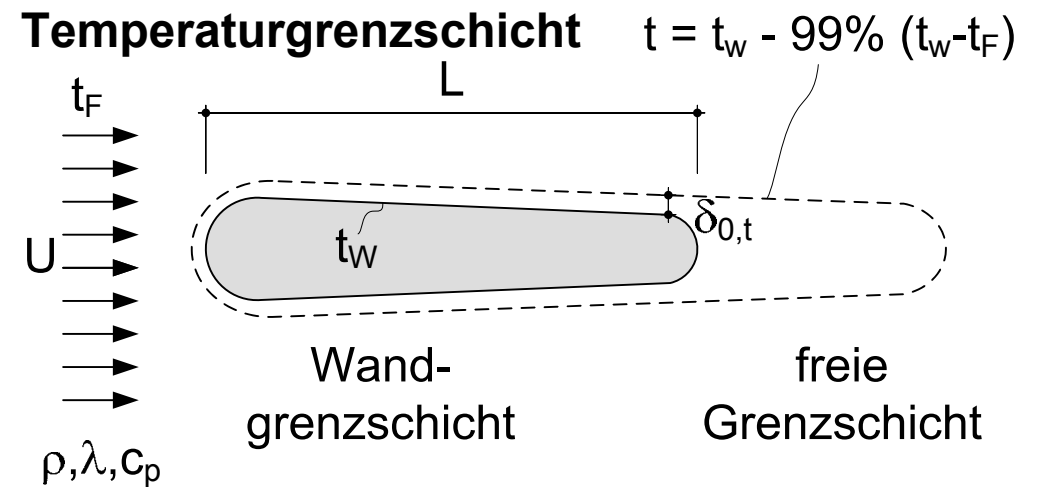
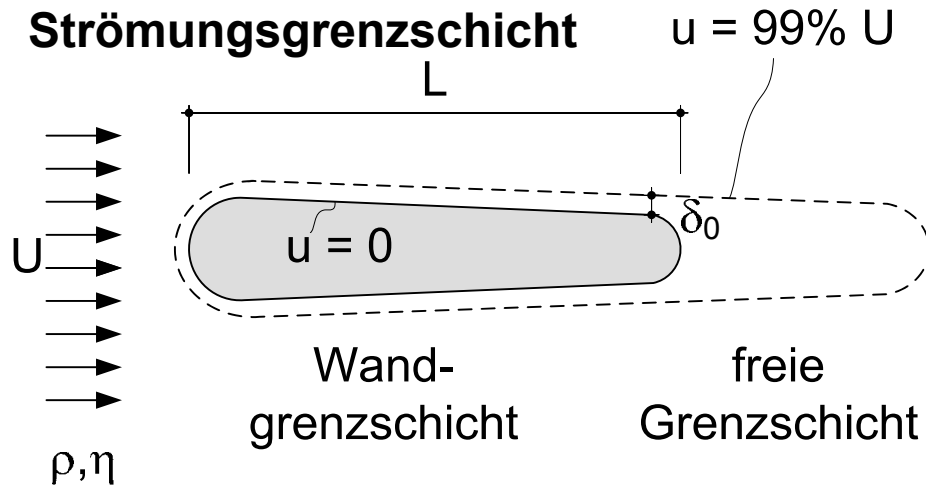
Nutzen kriterieller Gleichungen

- komprimierte Darstellung



- Ableitung physikalischer Ähnlichkeit





Wandgrenzschicht

Abbremsung der Fluidteilchen durch Einfluß der Wandhaftung $u = 0$

Freie Grenzschicht

Beschleunigung der abgebremsten Fluidteilchen durch unabgebremste Fluidteilchen mit der Geschwindigkeit U

Grenzschichtstärke δ_0 abhängig von Re

$$\frac{\delta_0}{L} = f\left(\frac{U \cdot L}{\nu}\right) = f(Re)$$

kinematische Visk. $\nu = \frac{\eta}{\rho}$
 Reynoldszahl $Re = U L / \nu$

O. Reynolds (1842-1912), englischer Physiker

Wandgrenzschicht

Aufheizung ($t_w > t_F$) bzw. Abkühlung ($t_w < t_F$) der Fluidteilchen an der Wand

Freie Grenzschicht

Abkühlung / Aufheizung der abgeschwemmten Teilchen bis auf Temperatur t_F der ungestörten Anströmung

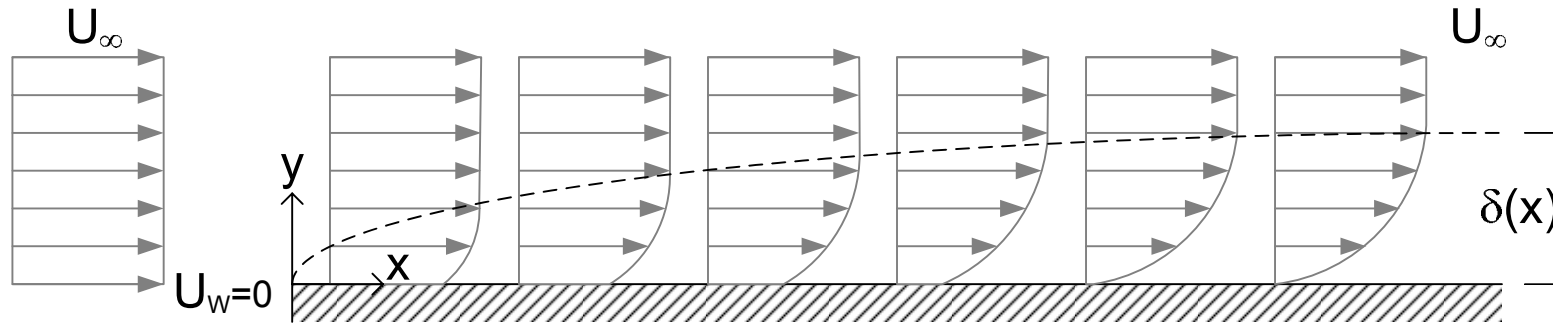
Grenzschichtstärke $\delta_{0,t}$ abhängig von Pe

$$\frac{\delta_{0,t}}{L} = f\left(\frac{U \cdot L}{a}\right) = f(Pe)$$

Temperaturleitzahl $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$
 Pécletzahl $Pe = U L / a$

J. Péclet (1793-1857), französischer Physiker

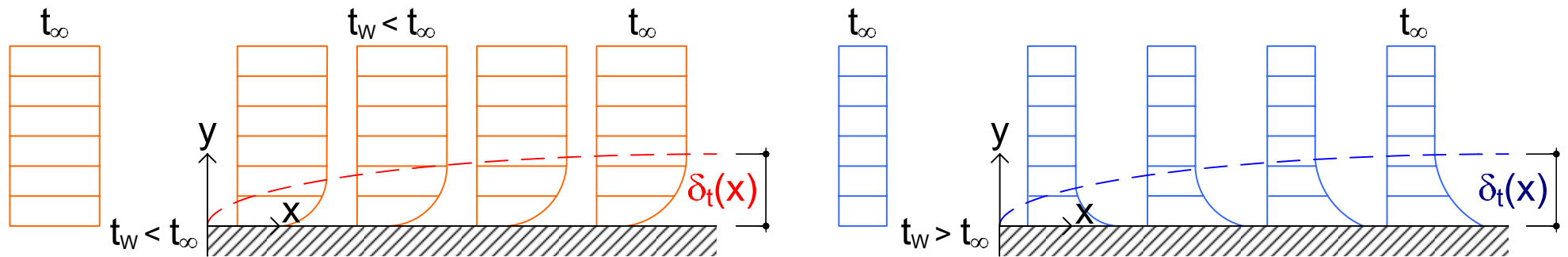
Strömungsgrenzschicht $\delta(x)$



Blasius (1908):

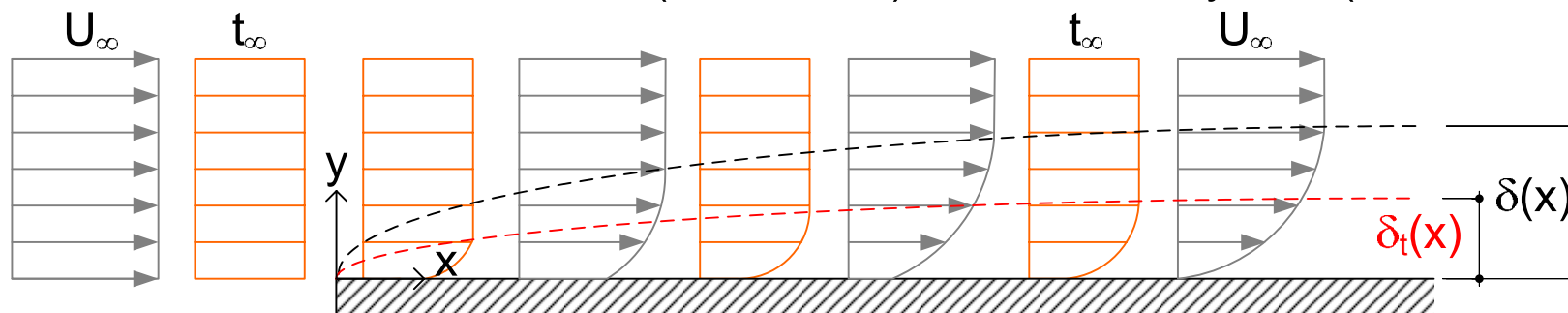
$$\delta(x) = 3\sqrt{\nu x / U_\infty}$$

Temperaturgrenzschicht $\delta_t(x)$



Prandtl-Zahl Pr

L. Prandtl (1875-1933), deutscher Physiker (Hannover und Göttingen)



$$\frac{\delta(x)}{\delta_t(x)} = f(\text{Pr})$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}}$$

Wasser

t	p	ρ	c_p	β	λ	η	ν	a	Pr
°C	bar	kg/m ³	J/(kg K)	10 ⁻³ /K	W/(m K)	10 ⁻⁶ kg/(m s)	10 ⁻⁶ m ² /s	10 ⁻⁶ m ² /s	1
0	1	999,8	4.218	-0,07	0,569	1750	1,751	0,131	13,00
10	1	999,7	4.192	0,088	0,587	1300	1,304	0,138	9,28
20	1	998,2	4.182	0,206	0,604	1000	1,004	0,143	6,94
30	1	995,7	4.178	0,303	0,618	798	0,801	0,148	5,39
40	1	992,2	4.178	0,385	0,632	653	0,658	0,151	4,30
50	1	988,0	4.181	0,457	0,643	546	0,553	0,155	3,56
60	1	983,2	4.184	0,523	0,654	466	0,474	0,158	2,96
70	1	977,8	4.190	0,585	0,662	404	0,413	0,161	2,53
80	1	971,8	4.196	0,643	0,669	355	0,365	0,164	2,20
90	1	965,3	4.205	0,698	0,676	315	0,326	0,166	1,94
100	1,013	958,1	4.216	0,755	0,681	279	0,291	0,168	1,73
120	1,985	942,9	4.245	0,859	0,687	230	0,244	0,172	1,42

Quelle: VDI-Wärmeatlas

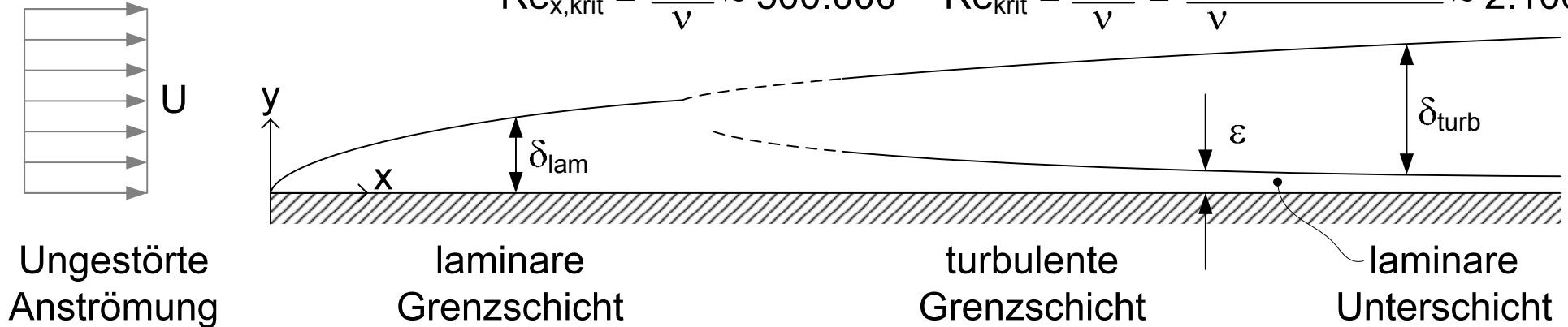
Luft

t	ρ	c_p	β	λ	η	ν	a	Pr
°C	kg/m ³	J/(kg K)	10 ⁻³ /K	W/(m K)	10 ⁻⁶ kg/(m s)	10 ⁻⁶ m ² /s	10 ⁻⁶ m ² /s	1
-20	1,3765	1.006	3,962	0,0230	16,15	11,73	8,04	0,71
0	1,2754	1.006	3,671	0,0245	17,10	13,41	9,96	0,70
20	1,1881	1.007	3,419	0,0260	17,98	15,13	12,00	0,70
40	1,1120	1.008	3,200	0,0275	18,81	16,92	14,30	0,69
60	1,0452	1.009	3,007	0,0289	19,73	18,88	16,60	0,69
80	0,9859	1.010	2,836	0,0304	20,73	21,02	19,10	0,69
100	0,9329	1.012	2,684	0,0318	21,60	23,15	21,80	0,69
120	0,8854	1.014	2,547	0,0332	22,43	25,33	24,50	0,68
140	0,8425	1.017	2,423	0,0347	23,19	27,53	27,40	0,68
160	0,8036	1.020	2,311	0,0361	24,01	29,88	30,50	0,68
180	0,7681	1.023	2,209	0,0375	24,91	32,43	33,70	0,68
200	0,7356	1.026	2,115	0,0389	25,70	34,94	37,00	0,68

Quelle: VDI-Wärmeatlas

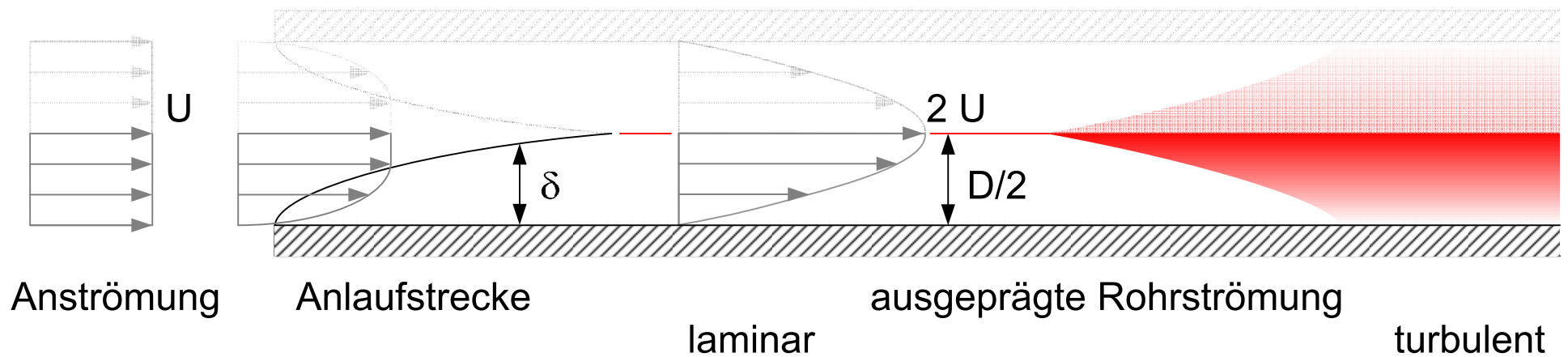
Umschlag laminar-turbulent an der Platte

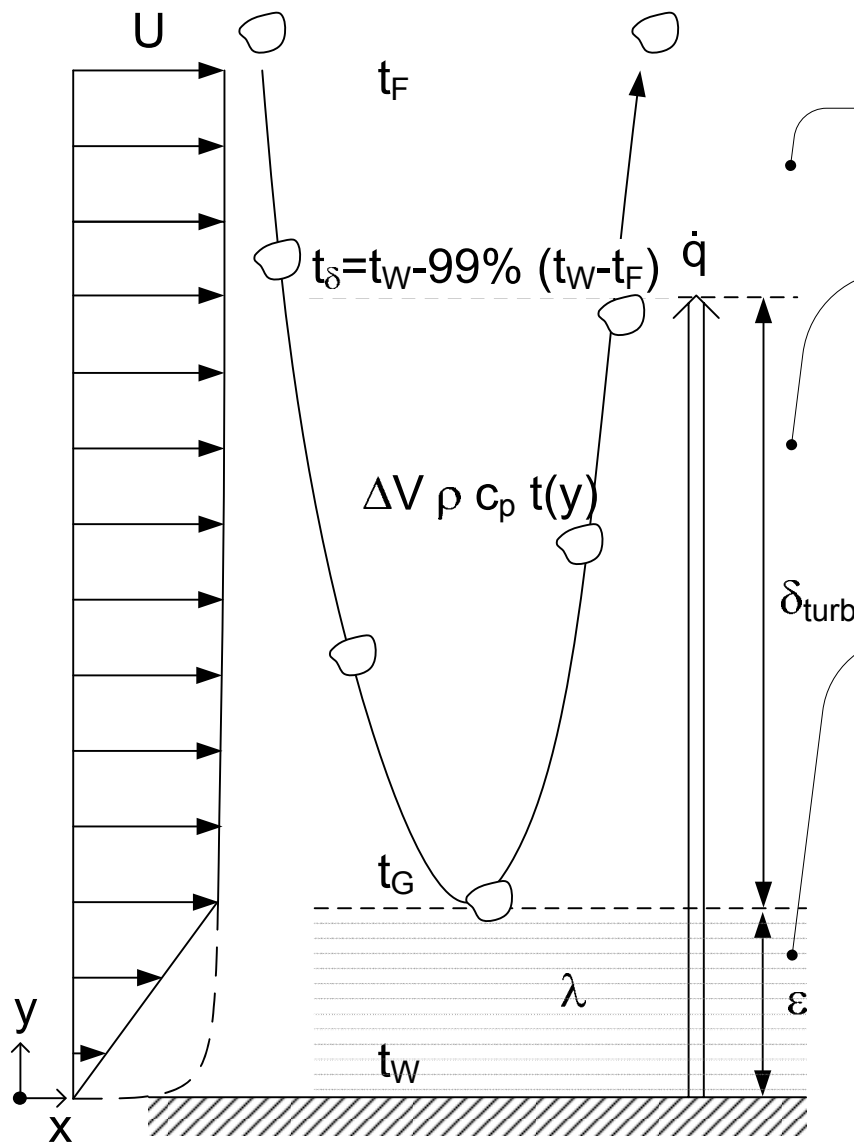
$$Re_{x,krit} = \frac{U x}{\nu} \approx 500.000 \quad Re_{krit} = \frac{U \delta}{\nu} = \frac{U 3 \sqrt{\nu x / U}}{\nu} \approx 2.100$$



Umschlag laminar-turbulent im Rohr

$$Re_{krit} = \frac{U D}{\nu} = 2.320$$





Turbulente Strömung außerhalb der Temperaturgrenzschicht

Turbulente Grenzschicht

Wärmemitführung

$$\frac{\dot{q}}{|t_G - t_\delta|} = f(\rho, c_p, U)$$

Laminare Unterschicht

Wärmeleitung

$$\frac{\dot{q}}{|t_w - t_G|} = f(\lambda, \epsilon)$$

Stantonzahl

$$St(x) = \frac{\alpha(x)}{\rho c_p U} \quad St_m = \frac{\alpha_m}{\rho c_p U}$$

T. E. Stanton (1865-1931),
englischer Ingenieur

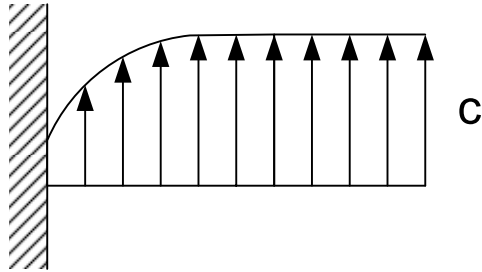
Nußeltzahl

$$Nu(x) = \frac{\alpha(x) \epsilon(x)}{\lambda} \quad Nu_m = \frac{\alpha_m L}{\lambda}$$

L: charakteristische Länge

W. Nußelt (1882-1957),
deutscher Physiker
(Karlsruhe und München)

Erzwungene Konvektion



Strömung mit mechanisch aufgeprägten Druckgradienten, z.B. durch einen Lüfter

$$\text{Nu}_m = f(\text{Pr}, \text{Re})$$

$$\text{Re} = \frac{c L}{\nu}$$

c gegeben

Freie Konvektion



Strömung aufgrund von Dichteunterschieden aus Temperaturunterschieden

$$\text{Nu}_m = f(\text{Pr}, \text{Gr}) \text{ bzw. } \text{Nu} = f(\text{Pr}, \text{Ra})$$

$$\text{Gr} = \frac{g L^3 \beta \Delta t}{\nu^2} \quad \text{Ra} = \text{Gr Pr} = \frac{g L^3 \beta \Delta t}{\nu \alpha}$$

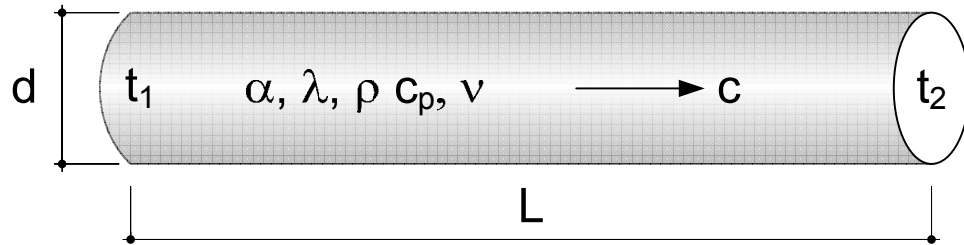
β : Volumenausdehnungskoeffizient in $1/\text{K}$

Δt gegeben, c ergibt sich aus $\rho(t)$

G. Grashof (1826-1893), deutscher Physiker (Berlin und Karlsruhe)

Lord Rayleigh (1842-1919), englischer Physiker

nach Glück:



alle Stoffgrößen für $(t_1+t_2)/2$
 t_1 und t_2 calorisch gemittelt

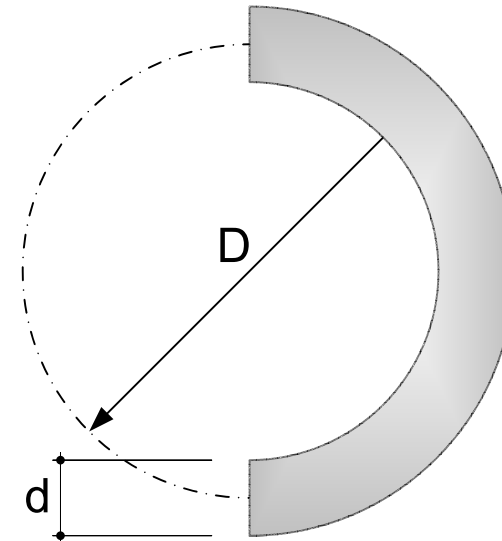
laminar

$$Nu_m = \frac{\alpha_m d}{\lambda} = \left[3,66 + \frac{0,0668 \cdot Pe \cdot \frac{d}{L}}{1 + 0,045 \cdot \left(Pe \frac{d}{L} \right)^{2/3}} \right] \cdot \left(\frac{\eta_F}{\eta_W} \right)^{0,14}$$

turbulent

$$Nu_m = \frac{\alpha_m d}{\lambda} = 0,0235 \cdot (Re^{0,8} - 230) \cdot (1,8 \cdot Pr^{0,3} - 0,8)$$

Gekrümmte Rohre



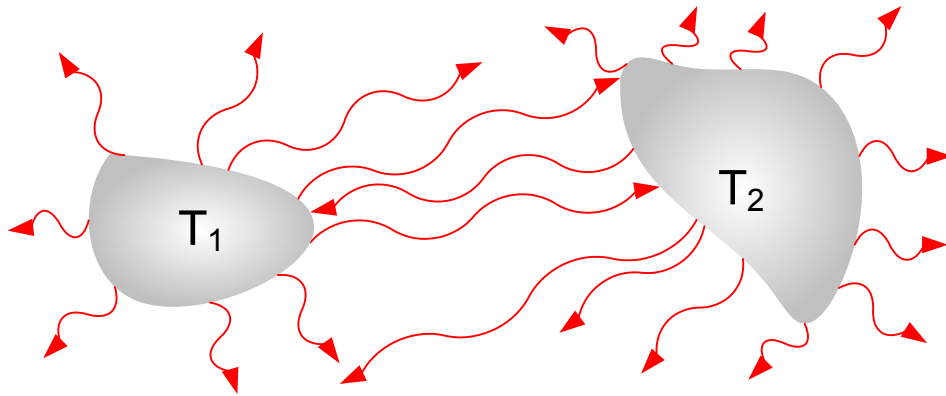
$$\alpha_{kr} = \left(1 + \frac{21}{Re^{0,14}} \cdot \frac{d}{D} \right) \cdot \alpha_{ger}$$

kr gekrümmt
ger gerade

Andere Querschnittsformen

Hydraulischer Durchmesser d_{hyd}

$$d_{hyd} = \frac{4 A}{U}$$



Emission von Temperaturstrahlung:

Abgabe von elektromagnetische Wellen aufgrund thermischer Bewegung

Absorption von Temperaturstrahlung:

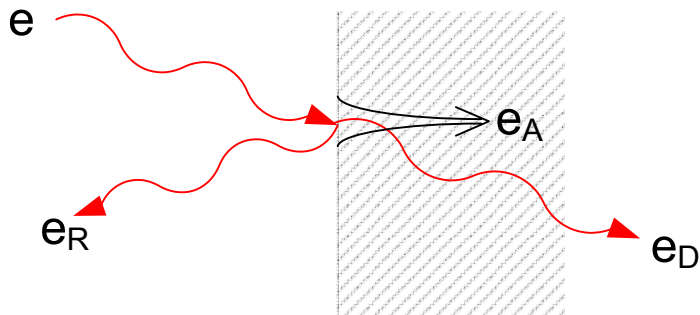
Anregung zu thermischer Bewegung durch aufgenommene elektromagnetische Wellen

Wärmetransport als Überschuß im Strahlungsaustausch:

Wenn Körper 2 mehr Strahlung von Körper 1 aufnimmt als Körper 1 von Körper 2, wird Wärme von Körper 1 nach Körper 2 transportiert $\Rightarrow T_1 > T_2$ (2. Hauptsatz der Thermodynamik)

Entstehende Fragen:

- Wellenlängenbereich der Temperaturstrahlung
- Energiereichtum (Intensität) der Strahlung in Abhängigkeit von Wellenlänge und Temperatur
- von Körper 1 nach Körper 2 transportiert $\Rightarrow T_1 > T_2$ (2. Hauptsatz der Thermodynamik)
- Vermögen von Materie, Temperaturstrahlung abzugeben und aufzunehmen
- Richtungsabhängigkeit von Strahlung und Vermögen, Strahlung abzugeben
- Anteil der Strahlung eines Körpers, den ein anderer Körper aufnehmen kann
- erforderliche Tiefe von Materie, um Strahlung aufzunehmen
- Durchlässigkeit von Materie für Strahlung
- Vermögen von Materie, Strahlung ohne Aufnahme weiterzuleiten (Reflexion)



Stationäre Bilanz

$$e = e_A + e_R + e_D \Leftrightarrow 1 = \frac{e_A}{e} + \frac{e_R}{e} + \frac{e_D}{e} \Leftrightarrow 1 = A + R + D$$

A: Absorptionsgrad schwarzer Körper: 1=A

R: Reflexionsgrad weißer Körper: 1=R

D: Durchlaßgrad diathermaner Körper: 1=D

athermaner Körper: 1= A+R

Kirchhoffsches Gesetz

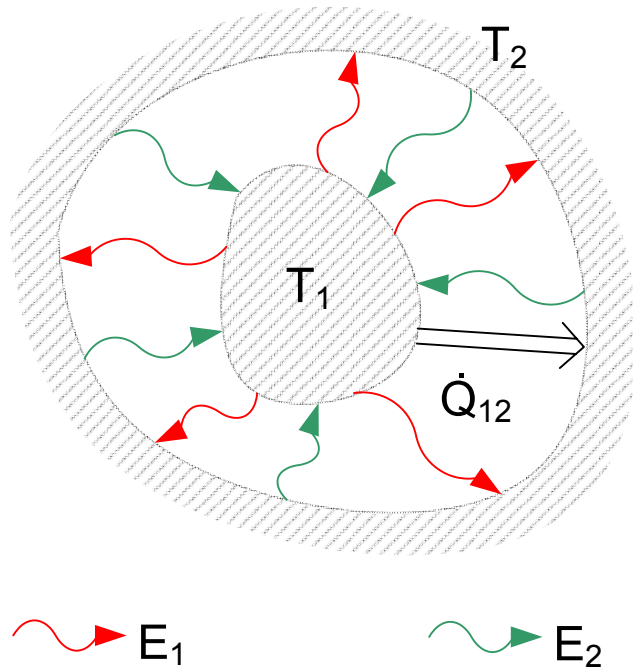
Gedankenexperiment für T₁=T₂:

T₁ = T₂ ⇔ Q₁₂ = 0 für beliebige Absorptionsgrade A₁, A₂, also auch für A₂ = 1 (schwarzer Körper, E = E_S) und A₁ < 1.

T₁ = T₂ und A₂ = 1 ⇔ Q₁₂ = 0 = E₁ - A₁ E₂ ⇔ E₁ = A₁ E₂

⇔ E₁ = A₁ E_S ⇔ E₁ = ε₁ E_S

mit ε = E / E_S: Emissionsgrad



Fazit:

1. ε = A (hier nur bewiesen für T₁ = T₂)
2. ε_{max} = 1 = ε_S : Emissionsgrad des Schwarzen Körpers