

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E	H	T	A	M

Beweisen

Jahrgangsstufe 11

Jürgen Appel

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				M
E	H	T	A	M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Gliederung

1. Bildungsplan
2. Fachlicher Hintergrund
3. Unterrichtsgang
4. Fazit

M	A	T	H	E
A	Vertiefungskurs Mathematik			H
T				T
H				A
E				M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit



Baden-Württemberg

REGIERUNGSPRÄSIDIUM STUTTGART
SCHULE UND BILDUNG

Vorschlag zur inhaltlichen Schwerpunktsetzung des Vertiefungskurses Mathematik

Zentrale Themen

1. Aussagenlogik und Beweistechniken

- Aussage, Existent- und Allquantor, Verknüpfung von Aussagen (Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz), Beweis mit Wahrheitstabelle, aussagenlogische Gesetze
- Voraussetzung; Behauptung; Satz, Umkehrsatz; Kontraposition, notwendige und hinreichende Bedingung
- Direkter und indirekter Beweis
- Vollständige Induktion

2. Prozessbezogene Kompetenzen

2.1 Argumentieren und Beweisen

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Fragestellungen, äußern begründet Vermutungen und entwickeln und überprüfen mathematische Argumentationen. Sie beschreiben und begründen Lösungswege. Dabei nutzen sie einfache Plausibilitätsbetrachtungen, inhaltlich-anschauliche Begründungen und Beweise.

Die Schülerinnen und Schüler können

Fragen stellen und Vermutungen begründet äußern

1. in mathematischen Zusammenhängen Vermutungen entwickeln und als mathematische Aussage formulieren
2. eine Vermutung anhand von Beispielen auf ihre Plausibilität prüfen oder anhand eines Gegenbeispiels widerlegen
3. bei der Entwicklung und Prüfung von Vermutungen Hilfsmittel verwenden (zum Beispiel Taschenrechner, Computerprogramme)

Beweisen

M	A	T	H	E
A	Vertiefungskurs Mathematik			H
T				T
H				A
E				M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

mathematische Argumentationsstrukturen nutzen

4. in einer mathematischen Aussage zwischen Voraussetzung und Behauptung unterscheiden
5. eine mathematische Aussage in einer standardisierten Form (zum Beispiel Wenn-Dann) formulieren
6. zu einem Satz die Umkehrung bilden
7. zwischen Satz und Kehrsatz unterscheiden und den Unterschied an Beispielen erklären

mathematische Argumentationen (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) nachvollziehen und entwickeln

8. mathematische Verfahren und ihre Vorgehensweisen erläutern und begründen
9. beim Erläutern und Begründen unterschiedliche Darstellungsformen verwenden (verbal, zeichnerisch, tabellarisch, formalisiert)
10. Beweise nachvollziehen und wiedergeben
11. bei mathematischen Beweisen die Argumentation auf die zugrunde liegende Begründungsbasis zurückführen
12. ausgehend von einer Begründungsbasis durch zulässige Schlussfolgerungen eine mehrschrittige Argumentationskette aufbauen
13. Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt prüfen und Beweise führen
14. Beziehungen zwischen mathematischen Sätzen aufzeigen

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Bildungsplan IMP - Aussagenlogik und Graphen Klasse 10

Die Schülerinnen und Schüler können

- (1) *Umkehrung* und *Kontraposition* einer *Subjunktion* angeben und vergleichen
- (2) die Äquivalenz einer *Subjunktion* zu ihrer *Kontraposition* mithilfe einer Wahrheitstabelle begründen und mit ihrer Hilfe das Prinzip des *Beweisverfahrens durch Kontraposition* erläutern (zum Beispiel anhand der Umkehrung des *Satzes des Thales*)
- (3) logische Verknüpfungen verwenden, um (mathematische) Aussagen zu beschreiben
- (4) den Wahrheitswert einer negierten oder zusammengesetzten Aussage bestimmen
- (5) die De Morgan'schen Regeln mithilfe von Wahrheitstabellen begründen und auf Alltagssituationen anwenden

- P** 2.21 Argumentieren und Beweisen 4, 5, 6, 7, 13
P 2.22 Probleme lösen 7
L MB Informationstechnische Grundlagen

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				M
E	H	T	A	M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Struktur eines Beweises

1. Voraussetzung
2. Behauptung
3. Beweis

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

direkte Beweise

- direkter Beweis
- Gegenbeispiel
- Wahrheitstabelle
- vollständige Induktion

indirekte Beweise

- Kontraposition
- Widerspruchsbeweis

vollständige Fallunterscheidung

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Satz: $A \rightarrow B$

Kehrsatz:

$$B \rightarrow A$$

Kontraposition:

$$\neg B \rightarrow \neg A$$

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				H

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Vollständige Induktion

- 1) Induktionsanfang
- 2) Induktionsschritt
- 3) Induktionsschluss

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				M
E	H	T	A	M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Vollständige Induktion

- Summenformeln
- Teilbarkeit
- Ungleichungen
- höhere Ableitungen
- geometrische Beispiele

M	A	T	H	E
A	Vertiefungskurs Mathematik			H
T				T
H				A
E				H

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Welche Beweismethoden „kennen“ die SuS?

- direkter Beweis (Geometrie Kl.7/8)
- Gegenbeispiel (Teilbarkeit Kl.5/6)
- Fallunterscheidung (Geometrie Kl.7/8)
- Widerspruchsbeweis ($\sqrt{2}$ ist irrational)

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				M
E	H	T	A	M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Mögliche Reihenfolge und **Schwerpunkte**

- 1) direkter Beweis
- 2) Beweis durch Gegenbeispiel
- 3) Beweis durch Kontraposition
- 4) Widerspruchsbeweis
- 5) vollständige Fallunterscheidung
- 6) vollständige Induktion

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Möglicher Unterrichtsgang (18 Stunden)

Beweisstruktur, direkter Beweis, Gegenbeispiel	3 h
Kontraposition und Kehrsatz	3 h
Beweis durch Widerspruch	3 h
vollständige Fallunterscheidung	3 h
vollständige Induktion	6 h

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Beispiele: direkte Beweise

- Satz des Thales
- Winkelsumme im Viereck
- Satz vom Umkreis
- Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade
- Wenn n durch 6 teilbar ist, dann ist n durch 3 teilbar

M	A	T	H	E
A	Vertiefungskurs Mathematik			H
T				T
H				A
E				H

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Beispiele: Beweis durch Gegenbeispiel

- Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ hat eine gerade Anzahl von Teilern
- Wenn P ein Extrempunkt ist, dann hat der Graph in P eine waagrechte Tangente
- $n^2 + n + 41$ ist für alle natürlichen Zahlen n eine Primzahl

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				M
E	H	T	A	M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Beispiele: Beweis durch Kontraposition

- Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n durch 3 teilbar, dann ist auch n durch 3 teilbar
- Das arithmetische Mittel zweier verschiedener natürlicher Zahlen ist größer als deren geometrisches Mittel
- Kehrsatz des Stufenwinkelsatzes

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				M
E	H	T	A	M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Beispiele: Beweis durch Widerspruch

- $\sqrt{2}$ ist irrational
- Es gibt genau einen Primzahltripling, nämlich 3, 5, 7
- Es gibt unendlich viele Primzahlen

M	A	T	H	E
A	<i>Vertiefungskurs Mathematik</i>			H
T				T
H				A
E				M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Beispiele: vollständige Fallunterscheidung

- Der Satz vom Umfangswinkel
- Für zwei beliebige reelle Zahlen x und y gilt
 $|x - y| \leq |x| + |y|$
- Wählt man fünf beliebige natürliche Zahlen aus, so kann man unter diesen immer drei finden, deren Summe durch 3 teilbar ist

Beispiele: vollständige Induktion

- Summenformel: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- Teilbarkeit: 4 ist ein Teiler von $5^n - 1$
- Ungleichungen: Für $n \geq 4$ gilt $3n + 1 \leq 2^n$
- Ableitungen: $f(x) = x \cdot e^{2x} \rightarrow f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot (n+2x) \cdot e^{2x}$
- Geometrie: Man kann mit Zirkel und Lineal immer ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Summe der Flächeninhalte von n ($n \geq 2$) gegebenen Quadraten

M	A	T	H	E
A	Vertiefungskurs Mathematik			H
T				T
H				A
E				M
E	H	T	A	M

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Typische Schwierigkeiten für die SuS

- Voraussetzung und Behauptung
- Unterschied: Kehrsatz – Kontraposition
- Unterschied: Kontraposition – Widerspruchsbeweis
- Verneinung bei Kontraposition (de Morgan)
- Algebraische Umformungen (vollständige Induktion)
- Abschätzungen (vollständige Induktion: Ungleichung)

M	A	T	H	E
A	Vertiefungskurs Mathematik			H
T				T
H				A
E				H

Bildungsplan

Fachliches

Unterricht

Fazit

Fazit

- gute Möglichkeiten „nebenbei“ etwas einzuführen (Schreibweisen: Summe; (un)gerade Zahl; Modulo...)
- gute Möglichkeit Fehlvorstellungen aus dem Mathematikunterricht zu korrigieren (Extremwerte ...)
- gutes Training für algebraische Umformungen
- Kontraposition und vollständige Induktion sind wichtig für die Zertifikatsklausur
- zukünftig wegen IMP möglicherweise Kontraposition binnendifferenziert unterrichten