4


# ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
VON
**KARL SCHEEL**

*Sonderabdruck 53. Band. 11. und 12. Heft*



L. Szilard


## Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen


VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1929

Die

## Zeitschrift für Physik

erscheint zwanglos in einzelnen Heften, die zu Bänden von 60 Bogen vereinigt werden.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstr. 23/24, zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstande der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Die Verfasser erhalten von Arbeiten bis zu $1^1/_2$ Druckbogen Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an Herrn **Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Karl Scheel, Berlin-Dahlem, Werderstr. 28.**

**53. Band.** **Inhalt.** **11. und 12. Heft.**

# Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen.

Von **L. Szilard** in Berlin.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 18. Januar 1928.)

Es wird untersucht, durch welche Umstände es bedingt ist, daß man scheinbar ein Perpetuum mobile zweiter Art konstruieren kann, wenn man ein Intellekt besitzendes Wesen Eingriffe an einem thermodynamischen System vornehmen läßt. Indem solche Wesen Messungen vornehmen, erzeugen sie ein Verhalten des Systems, welches es deutlich von einem sich selbst überlassenen mechanischen System unterscheidet. Wir zeigen, daß bereits eine Art Erinnerungsvermögen, welches ein System, in dem sich Messungen ereignen, auszeichnet, Anlaß zu einer dauernden Entropieverminderung bieten kann und so zu einem Verstoß gegen den zweiten Hauptsatz führen würde, wenn nicht die Messungen selbst ihrerseits notwendig unter Entropieerzeugung vor sich gehen würden. Zunächst wird ganz universell diese Entropieerzeugung aus der Forderung errechnet, daß sie im Sinne des zweiten Hauptsatzes eine volle Kompensation darstellt [Gleichung (1)]. Es wird dann auch an Hand einer unbelebten Vorrichtung, die aber (unter dauernder Entropieerzeugung) in der Lage ist, Messungen vorzunehmen, die entstehende Entropiemenge berechnet und gefunden, daß sie gerade so groß ist, wie es für die volle Kompensation notwendig ist: die wirkliche Entropieerzeugung bei der Messung braucht also nicht größer zu sein, als es Gleichung (1) verlangt.

Es gibt einen schon historisch gewordenen Einwand gegen die allgemeine Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, welcher in der Tat einen recht bedrohlichen Eindruck macht. Es ist dies der Einwand des Maxwellschen Dämons, der in verschiedener Umkleidung auch heute noch immer wieder auftaucht, und vielleicht nicht ganz mit Unrecht insofern, als hinter der präzis gestellten Frage sich quantitative Zusammenhänge zu verbergen scheinen, die bisher nicht aufgeklärt worden sind. Den Einwand in seiner ursprünglichen Formulierung, die mit einem Dämon operiert, welcher die raschen Moleküle abfängt und die langsamen passieren läßt, kann man allerdings mit der Entgegnung abtun, daß wir Menschen den Wert der thermisch schwankenden Parameter ja prinzipiell nicht jeweils erraten können; aber es läßt sich nicht leugnen, daß wir den Wert eines solchen schwankenden Parameters sehr wohl messen könnten und dann sicherlich Arbeit auf Kosten der Wärme gewinnen könnten, indem wir unsere Eingriffe dann je nach dem Resultat der Messung passend einrichten. Freilich bleibt es zunächst dahingestellt, ob wir nicht einen Fehler begehen, wenn wir den eingreifenden Menschen selbst nicht mit zum System rechnen und seine Lebensvorgänge nicht mitberücksichtigen.

Abgesehen von diesem ungeklärten Punkt ist heute erkannt, daß in einem sich selbst überlassenen System trotz der Schwankungserscheinungen kein Perpetuum mobile zweiter Art, d. h. genauer, „keine automatische Wärme niedrigster Temperatur verbrauchende Maschine von fortdauernder endlicher Arbeitsleistung“ wirksam sein kann. Es wäre dies eine Maschine, deren Wirksamkeit, auch wenn man lange Zeiten ins Auge faßt, das Resultat hätte, daß ein Gewicht auf Kosten des Wärmeinhalts eines Wärmereservoirs gehoben wird. Etwas anders ausgedrückt kann man auch sagen, daß, wenn wir die Schwankungserscheinungen benutzen wollen, um Arbeit auf Kosten der Wärme zu gewinnen, wir in derselben Lage sind wie bei einem Glücksspiel, bei welchem wir ab und zu gewisse Beträge gewinnen können, bei dem aber der Erwartungswert (mathematische Hoffnung) des Gewinns null oder negativ ist. Dasselbe gilt für ein System, das zwar nicht ganz sich selbst überlassen ist, bei dem aber die Eingriffe von außen her streng periodisch erfolgen, etwa durch periodisch sich bewegende Maschinen. Diese Erkenntnis betrachten wir als gesichert* und wollen uns hier nur mit den Schwierigkeiten befassen, die auftreten, wenn etwa intelligente Wesen Eingriffe im System vornehmen und die dabei auftretenden quantitativen Zusammenhänge zu erkennen trachten.

Smoluchowski schreibt**: „Soweit unsere jetzigen Kenntnisse reichen, gibt es also trotz molekularer Schwankungen kein automatisches, dauernd wirkendes Perpetuum mobile, aber wohl könnte eine solche Vorrichtung regelmäßig funktionieren, falls sie durch intelligente Wesen in passender Weise betätigt würde. ...

Ein Perpetuum mobile ist also möglich, falls man nach der üblichen Methode der Physik den experimentierenden Menschen als eine Art »Deus ex machina« auffaßt, welcher von dem momentanen Zustand der Natur fortwährend genau unterrichtet ist und die makroskopischen Naturvorgänge in beliebigen Momenten ohne Arbeitsleistung in Gang setzen oder unterbrechen kann. Er brauchte somit durchaus nicht wie ein Maxwellscher Dämon die Fähigkeit zu besitzen, einzelne Moleküle abzufangen, würde sich aber doch schon in obigen Punkten durchaus von wirklichen Lebewesen unterscheiden. Denn die Hervorbringung irgend eines physikalischen Effekts durch Betätigung des sensorischen wie auch des motorischen Nervensystems derselben ist immer mit einer Energieentwertung verbunden, abgesehen davon, daß ihre ganze Existenz an fortwährende Dissipation derselben gebunden ist.

* Vgl. z. B. L. Szilard, ZS. f. Phys. **32**, 753, 1925.

** Vorträge über die kinetische Theorie der Materie u. Elektrizität, S. 89. Leipzig 1914.

Ob also bei Berücksichtigung dieser Umstände wirkliche Lebewesen dauernd, oder wenigstens in regelmäßiger Weise Arbeit auf Kosten der Wärme niederster Temperatur erzeugen könnten, erscheint wohl recht zweifelhaft, wiewohl unsere Unkenntnis der Lebensvorgänge eine definitive Antwort ausschließt. Doch führen die zuletzt berührten Fragen schon über den Rahmen der eigentlichen Physik hinaus ..."

Es scheint nun, daß uns die Unkenntnis der Lebensvorgänge nicht zu stören braucht, um das zu erkennen, auf was es unserer Ansicht nach hier ankommt. Denn wir dürfen ja sicher sein, daß man die intelligenten Wesen, sofern es sich um ihre Eingriffe in ein thermodynamisches System handelt, durch unbelebte Vorrichtungen ersetzen kann, deren „Lebensvorgänge" sich verfolgen ließen, so daß man feststellen könnte, ob dabei in der Tat eine Kompensation für die Entropieverminderung auftritt, welche durch die Eingriffe der Vorrichtung im System hervorgerufen wird.

Wir wollen zunächst zu erkennen trachten, durch welchen Umstand bei dem Eingreifen intelligenter Wesen in ein thermodynamisches System die in diesem hervorgebrachte Entropieverminderung bedingt wird, und werden dabei sehen, daß es auf Kopplungen besonderer Art zwischen verschiedenen Parametern des Systems ankommt. Wir wollen eine besonders einfache Art dieser bedrohlichen Kopplungen betrachten. Wir werden kurz von einer „Messung" reden, wenn es uns gelingt, den Wert eines Parameters $y$ (z. B. der Lagenkoordinate des Zeigers eines Meßinstrumentes) in einem Augenblick mit dem Momentanwert eines schwankenden Parameters $x$ des Systems zu koppeln, so daß man aus dem Werte von $y$ Rückschlüsse auf den Wert, den $x$ zum Zeitpunkt der „Messung" gehabt hat, ziehen kann. Dabei seien $x$ und $y$ nach der Messung wieder entkoppelt, so daß sich $x$ verändern kann, während $y$ noch seinen Wert eine Zeitlang beibehält. Solche Messungen sind keine harmlosen Eingriffe; ein System, in welchem solche Messungen vorkommen, weist ja eine Art Erinnerungsvermögen auf, in dem Sinne, daß man an dem Zustandsparameter $y$ erkennen kann, was für einen Wert ein anderer Zustandsparameter $x$ zu einem früheren Zeitpunkt gehabt hat, und wir werden sehen, daß schon vermöge einer solchen Erinnerung der zweite Hauptsatz verletzt wäre, wenn der Vorgang der Messung sich ohne Kompensation abspielen würde. Daß der zweite Hauptsatz durch diese Entropieverminderungen nicht so stark bedroht ist, wie man es ursprünglich meinen könnte, werden wir dann sehen, wenn wir zunächst erkennen, daß die durch die Eingriffe bedingte Entropieverminderung jedenfalls schon vollständig kompensiert wäre, falls die Vornahme einer solchen Messung ganz universell beispiels-weise jedesmal mit einer Entropieerzeugung von dem Betrage $k . \log 2$ einherginge. Es wird dann gelingen, ein etwas allgemeineres Entropiegesetz aufzufinden, welches sich ganz universell auf alle Messungen bezieht. Zum Schluß wird dann eine sehr einfache (natürlich unbelebte) Vorrichtung betrachtet, welche in der Lage ist, dauernd „Messungen“ vorzunehmen, und deren „Lebensvorgänge“ wir leicht verfolgen können. Durch direktes Ausrechnen findet man dann in der Tat eine dauernde Entropieerzeugung von dem Betrage, wie ihn das erwähnte, allgemeinere, aus der Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes hergeleitete Entropiegesetz fordert.

Das erste Beispiel, welches wir als typisch jetzt näher betrachten wollen, ist nun das folgende: Ein etwa stehender Hohlzylinder, der nach unten und oben durch einen Boden, bzw. einen Deckel abgesperrt ist, läßt sich in zwei im allgemeinen ungleich große Hälften vom Volumen $V_1$ bzw. $V_2$ teilen dadurch, daß man in irgend einer festgesetzten Höhenlage von der Seite her eine Zwischenwand einschiebt. Diese Zwischenwand bildet einen Stempel, der sich im Zylinder nach oben und unten verschieben läßt. Ein unendlich großes Wärmereservoir von irgend einer Temperatur $T$ sorgt dafür, daß ein etwa im Zylinder vorhandenes Gas bei der Bewegung des Stempels eine isotherme Expansion durchmacht. Dieses Gas soll nun aus einem einzigen Molekül bestehen, welches, solange der Stempel nicht in den Zylinder eingeschoben wird, sich vermöge seiner thermischen Bewegung in dem ganzen Zylinder herumtummelt.

Wir denken uns nun etwa einen Menschen, der zu irgend einem Zeitpunkt den Stempel in den Zylinder hineinschiebt und gleichzeitig irgendwie feststellt, ob nun das Molekül in der oberen oder unteren Hälfte des Zylinders, im Volumen $V_1$ oder $V_2$, gefangen ist. Findet er dann etwa, daß das erstere der Fall ist, so wird er den Stempel langsam nach unten schieben, bis der Boden des Zylinders erreicht ist. Während dieser langsamen Bewegung des Stempels bleibt das Molekül selbstverständlich immer oberhalb des Stempels, nicht aber in der oberen Hälfte des Zylinders, prallt vielmehr viele Male gegen den bereits in der unteren Hälfte des Zylinders sich bewegenden Stempel. Das Molekül überträgt auf diese Weise eine gewisse Menge Arbeit auf den Stempel. Es ist dies die Arbeit, die einer isothermen Expansion eines aus einem einzigen Molekül bestehenden idealen Gases vom Volumen $V_1$ auf das Volumen $V_1 + V_2$ entspricht. Nach einiger Zeit, wenn der Stempel den Boden des Gefäßes erreicht hat, steht dem Molekül wieder das ganze Volumen $V_1 + V_2$ zur Verfügung, und der Stempel wird alsdann herausgezogen. Der Vorgang kann beliebig oft wiederholt werden, wobei der eingreifende

Mensch den Stempel, je nachdem das Molekül in der oberen oder unteren Hälfte des Stempels gefangen ist, eben nach unten oder nach oben verschiebt, d. h. genauer, etwa mit einem Gewicht, das gehoben werden soll, durch eine mechanische Kraftübertragung jeweils so koppelt, daß das Gewicht durch den Stempel jeweils nach oben verschoben wird. Auf diese Weise wächst die potentielle Energie des Gewichts sicher dauernd. (Die Kraftübersetzung auf das Gewicht wird zweckmäßig so gestaltet, daß die von dem Gewicht auf den Stempel übertragene Kraft bei jeder Stellung des Stempels dem mittleren Druck des Gases gerade das Gleichgewicht hält.) Es ist klar, daß auf solche Weise dauernd Arbeit auf Kosten der Wärme gewonnen wird, sofern die Lebensvorgänge des eingreifenden Menschen nicht mit in Rechnung gestellt werden.

Um zu erkennen, was der Mensch hier eigentlich für das System leistet, stellt man sich am besten vor, daß die Bewegung des Stempels maschinell erfolgt und daß die ganze Tätigkeit des Menschen sich darin erschöpft, daß er die Höhenlage des Moleküls feststellt und daß er einen Hebel, der die Bewegung des Stempels steuert, nach rechts oder nach links legt, je nachdem, ob die festgestellte Höhenlage eine Abwärts- oder eine Aufwärtsbewegung des Stempels erfordert. Das heißt, der Eingriff des Menschen besteht lediglich in der Kopplung von zwei Lagenkoordinaten, nämlich einer Koordinate $x$, welche die Höhenlage des Moleküls festlegt, mit einer anderen Koordinate $y$, welche die Lage des Hebels definiert und welche also dafür bestimmend ist, ob dem Stempel eine aufwärts oder abwärts gerichtete Geschwindigkeit erteilt wird. Die Masse des Stempels denkt man sich dabei am besten groß und die erteilte Geschwindigkeit hinreichend hoch, so daß die thermische Agitation, die der Stempel bei der betreffenden Temperatur hat, daneben zu vernachlässigen ist.

Wir wollen bei den Vorgängen des hier betrachteten typischen Beispiels zwei Zeitabschnitte unterscheiden, und zwar:

1. den Zeitabschnitt der Messung, bei welchem der Stempel bereits in die Zylindermitte eingeschoben und das Molekül entweder in der oberen oder unteren Zylinderhälfte eingeschlossen ist, so daß, wenn wir den Koordinatenanfangspunkt passend wählen, seine $x$-Koordinate auf das Intervall $x > 0$ oder $x < 0$ beschränkt ist;

2. den Zeitabschnitt der Ausnutzung der Messung, währenddessen die Abwärts- oder Aufwärtsbewegung des Stempels erfolgt, den „Zeitabschnitt der Entropieverminderung“. Während dieses Zeitabschnitts wird die $x$-Koordinate des Moleküls keineswegs auf das ursprüngliche Intervall $x > 0$

bzw. $x < 0$ beschränkt bleiben. Vielmehr muß, wenn das Molekül im Zeitabschnitt der Messung sich in der oberen Hälfte des Zylinders befunden hat, so daß $x > 0$ war, das Molekül auf den sich jetzt entsprechend in der unteren Hälfte des Zylinders nach abwärts bewegenden Stempel aufprallen, wenn es auf diesen Arbeit übertragen soll. Das heißt, es muß die $x$-Koordinate des Moleküls in das Intervall $x < 0$ eintreten. Dagegen wird der Hebel seine der Abwärtsbewegung entsprechende Rechtsstellung während des ganzen Zeitabschnitts beibehalten. Ist diese Rechtslage des Hebels etwa durch $y = 1$ festgelegt (und entsprechend die Linkslage $y = -1$), so sehen wir, daß während des Zeitabschnitts der Messung der Lage $x > 0$ $y = 1$ zugeordnet wird, daß aber nachher $y = 1$ bleibt, obschon $x$ in das andere Intervall $x < 0$ eintritt. Man sieht, daß bei der Ausnutzung der Messung die Kopplung der beiden Parameter $x$ und $y$ wieder verloren geht.

Wir wollen ganz allgemein davon reden, daß ein Parameter $y$ den Wert eines etwa nach einem Wahrscheinlichkeitsgesetz schwankenden Parameters $x$ „mißt“, wenn der Wert von $y$ sich danach richtet, welchen Wert der Parameter $x$ zu einem bestimmten Zeitpunkt annimmt. Die Vornahme einer Messung liegt der Entropieverminderung bei den Eingriffen intelligenter Wesen zugrunde.

Es ist nun naheliegend, anzunehmen, daß die Vornahme einer Messung prinzipiell mit einer ganz bestimmten mittleren Entropieerzeugung verbunden ist, und daß dadurch der Einklang mit dem zweiten Hauptsatz wieder hergestellt wird; größer dürfte die bei der Messung entstehende Entropiemenge freilich immer sein, nicht aber kleiner. Genauer gesprochen, müssen hier zwei Entropiegrößen unterschieden werden, die eine, $\bar{S}_1$, wird erzeugt, wenn bei dem Meßprozeß $y$ den Wert 1 annimmt, und die andere, $\bar{S}_2$, wenn $y$ den Wert $-1$ erhält. Wir können nicht erwarten, ganz allgemein über $\bar{S}_1$ oder $\bar{S}_2$ allein etwas zu erfahren, wohl aber werden wir sehen, daß aus der Annahme, daß diese bei der „Messung“ erzeugte Entropiemenge die durch die Ausnutzung erzielte Entropieverminderung des Systems im Sinne des zweiten Hauptsatzes kompensieren muß, ganz allgemein die Beziehung

$$e^{-\frac{\bar{S}_1}{k}} + e^{-\frac{\bar{S}_2}{k}} \leqq 1 \tag{1}$$

folgt.

Man sieht aus dieser Formel, daß wir wohl eine der Größen, also etwa $\bar{S}_1$, beliebig klein machen können, daß aber dann dafür die andere Größe, $\bar{S}_2$, entsprechend groß wird. Es kann ferner auffallen, daß es gar nicht auf die Größe des betrachteten Intervalls ankommt. Immerhin kann man leicht einsehen, daß es auch gar nicht anders sein kann.

Wir können auch umgekehrt sagen, sobald die bei der Messung entstehenden Entropien $S_1$ und $S_2$ der Ungleichung (1) genügen, dürfen wir beruhigt sein, daß dadurch die nachher bei der Messung erzielbare Entropieverminderung schon voll kompensiert wird.

Bevor wir nun auf den Beweis der Ungleichung (1) eingehen, können wir an dem bisher betrachteten mechanischen Beispiel zusehen, wie sich dies alles zusammenreimt. Für die bei der Messung erzeugten Entropien $\bar{S}_1$ und $\bar{S}_2$ machen wir als Spezialfall den Ansatz:

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_2 = k \log 2.$$

Dieser Ansatz gehorcht der Ungleichung (1), und der mittlere Wert der bei einer Messung erzeugten Entropiemenge ist (in diesem Spezialfall natürlich unabhängig von dem Verhältnis der Häufigkeit $w_1$, $w_2$ der beiden Ereignisse):

$$\bar{S} = k \log 2.$$

Bei dem betrachteten Beispiel erzielt man bei der isothermen Expansion Entropieverminderung*:

$$-\bar{s}_1 = -k \log \frac{V_1}{V_1 + V_2}; \quad -\bar{s}_2 = -k \log \frac{V_2}{V_1 + V_2},$$

je nachdem, ob beim Einschieben des Stempels das Molekül im Volumen $V_1$ oder $V_2$ angetroffen wurde. (Die Entropieverminderung ist gleich dem Quotienten der Wärmemenge, die bei der isothermen Expansion dem Wärmereservoir entzogen wird, und der Temperatur des betreffenden Wärmereservoirs.) Da nun im vorliegenden Falle die Häufigkeit $w_1$, $w_2$ der beiden Ereignisse sich verhält wie die Volumina $V_1$, $V_2$, so ist der mittlere Betrag der erzeugten Entropie (negative Zahl)

$$\bar{s} = w_1(+\bar{s}_1) + w_2 \cdot (+\bar{s}_2) = \frac{V_1}{V_1 + V_2} k \log \frac{V_1}{V_1 + V_2} + \frac{V_2}{V_1 + V_2} k \log \frac{V_2}{V_1 + V_2}.$$

Wie man sieht, ist nun in der Tat

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2} k \log \frac{V_1}{V_1 + V_2} + \frac{V_2}{V_1 + V_2} k \log \frac{V_2}{V_1 + V_2} + k \log 2 \geqq 0$$

und also

$$\bar{S} + \bar{s} \geqq 0.$$

* Die erzeugte Entropie ist mit $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ bezeichnet.

Es wäre also tatsächlich im vorliegenden Spezialfall eine volle Kompensation für die bei der Ausnutzung der Messung erzielbare Entropieverminderung vorhanden.

Wir wollen nun darauf verzichten, weiter spezielle Beispiele zu betrachten, und gleich mit Hilfe einer allgemeinen Betrachtung über die hier obwaltenden Verhältnisse Klarheit zu schaffen und Formel (1) abzuleiten versuchen. Wir wollen hierzu das ganze System, in welchem die Koordinate $x$ irgendwelchen thermischen Schwankungen unterworfen ist und durch $y$ in der soeben erörterten Weise gemessen werden kann, in sehr vielen Exemplaren vorgegeben denken, die alle in einem gemeinsamen Kasten eingeschlossen sind. Jedes einzelne dieser Exemplare sei frei beweglich, so daß die einzelnen Systeme als die Moleküle eines idealen Gases betrachtet werden können, die infolge der thermischen Agitation in dem gemeinsamen Kasten voneinander unabhängig umherirren und auf die Wände des Kastens einen bestimmten, der Temperatur der fortschreitenden Bewegung entsprechenden Druck ausüben. Wir werden nun zwei dieser Moleküle als chemisch verschieden und durch semipermeable Wände prinzipiell trennbar ansehen, falls die $x$-Koordinate für das eine Molekül sich in einem hervorgehobenen Intervall befindet und für das andere Molekül außerhalb des Intervalls. Ebenso werden wir sie als chemisch verschieden ansehen, wenn sie sich nur darin unterscheiden, daß der Wert der $y$-Koordinate für das eine 1 ist und für das andere $-1$ beträgt.

Dem Kasten, in welchem diese „Moleküle" eingeschlossen sind, wollen wir nun die Form eines Hohlzylinders geben, in welchem vier Stempel angebracht sind (siehe Fig. 1). $A$ und $A'$ sind fest, die beiden anderen $B$ und $B'$ beweglich, und zwar so, daß der Abstand $BB'$ konstant gleich dem Abstand $AA'$ gehalten wird, wie dies in der Figur durch die beiden Klammern angedeutet ist. $A'$, der Boden, und $B$, der Deckel des ganzen Gefäßes, sind für alle „Moleküle" undurchdringlich, dagegen $A$ und $B'$ semipermeabel, und zwar $A$ nur permeabel für jene „Moleküle", für welche der Parameter $x$ im hervorgehobenen Intervall $x_1 x_2$ liegt, $B'$ nur permeabel für die übrigen.

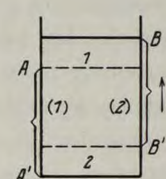

Fig. 1.

Anfänglich liegt der Stempel $B$ bei $A$ und also $B'$ bei $A'$, und alle „Moleküle" befinden sich in dem Zwischenraum. Bei einem bestimmten Bruchteil der Moleküle befindet sich $x$ in dem hervorgehobenen Intervall. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies bei einem herausgegriffenen

Molekül der Fall ist, sei mit $w_1$ bezeichnet, dafür, daß $x$ außerhalb des Intervalls fällt, mit $w_2$. Es gilt dann:

$$w_1 + w_2 = 1.$$

Die Verteilung der $y$-Parameter möge auf die beiden Werte 1 und $-1$ in irgend einem Verhältnis, aber jedenfalls von den $x$-Werten unabhängig sein. Wir denken uns nun etwa durch ein intelligentes Wesen einen Eingriff vorgenommen, durch welchen $y$ der Wert 1 erteilt wird in allen „Molekülen", für welche in dem betreffenden Zeitpunkt $x$ in das hervorgehobene Intervall fällt, und entsprechend im umgekehrten Falle der Wert $-1$. Tritt dann infolge der thermischen Schwankung bei irgend einem „Molekül" der Parameter $x$ aus dem hervorgehobenen Intervall heraus oder, wie wir uns hier auch ausdrücken können, erleidet das „Molekül" bezüglich $x$ eine monomolekulare chemische Reaktion (durch welche es aus der Modifikation, welche durch den semipermeablen Stempel $A$ durchgelassen wird, in eine Modifikation überführt wird, für welche dieser Stempel undurchlässig ist), so behält der Parameter $y$ zunächst seinen Wert 1 unverändert bei, so daß sich das „Molekül" vermöge des Parameters $y$ während des ganzen späteren Prozesses daran „erinnert", daß $x$ ursprünglich in das hervorgehobene Intervall fiel. Wir werden gleich sehen, welche Rolle diese Erinnerung spielen kann. Nach dem soeben besprochenen Eingriff verschieben wir nun die Stempel, so daß wir ohne Arbeitsleistung die beiden Molekülsorten voneinander trennen. Es liegen dann zwei Gefäße vor, von denen das eine nur die eine Modifikation, das andere nur die andere Modifikation enthält. Jede Modifikation allein nimmt jetzt dasselbe Volumen ein wie früher das Gemisch. In einem dieser Gefäße für sich betrachtet, herrscht jetzt bezüglich der beiden „Modifikationen in $x$" nicht die Gleichgewichtsverteilung. Das Mengenverhältnis der beiden Modifikationen ist natürlich $w_1 : w_2$ geblieben. Lassen wir bei konstant gehaltenem Volumen und Temperatur in beiden Gefäßen für sich diese Gleichgewichtsverteilung entstehen, so hat dabei die Entropie des Systems bestimmt zugenommen. Denn die Gesamtwärmetönung ist dabei 0, da doch das Verhältnis der beiden „Modifikationen in $x$" $w_1 : w_2$ sich dabei nicht ändert. Wenn wir die Einstellung der Gleichgewichtsverteilung in beiden Gefäßen für sich auf reversiblem Wege leiten, so wird dabei die Entropie der übrigen Welt um denselben Betrag abnehmen. Die Entropie nimmt also um eine negative Größe zu, und zwar ist der Wert der Entropiezunahme pro Molekül:

$$\bar{s} = k\,(w_1 \log w_1 + w_2 \log w_2). \qquad (2)$$

(Die Entropiekonstanten, die wir beiden „Modifikationen in $x$“ zuzuordnen haben, kommen hier nicht explizite vor, weil der Prozeß die Gesamtanzahl der Moleküle, die der einen oder der anderen Modifikation angehören, ungeändert läßt.)

Wir können freilich jetzt durch einfache Rückverschiebung der Stempel die beiden Gase nicht mehr ohne weiteres ohne Arbeitsleistung wieder auf das ursprüngliche Volumen bringen. Denn es sind jetzt etwa in dem Gefäß, welches durch die Stempel $B\,B'$ begrenzt ist, auch solche Moleküle da, deren $x$-Koordinate außerhalb des hervorgehobenen Intervalls fällt und für die infolgedessen der Stempel $A$ nicht mehr permeabel ist. So sieht man, daß die gefundene Entropieverminderung (2) nicht einen Widerspruch zum zweiten Hauptsatz bedeutet. Solange wir nicht die Tatsache benutzen, daß die Moleküle in dem Gefäß $BB'$ vermöge der Koordinate $y$ sich noch daran „erinnern“, daß die $x$-Koordinate für die Moleküle dieses Gefäßes ursprünglich im hervorgehobenen Intervall lag, solange ist auch für die errechnete Entropieverminderung bestimmt die volle Kompensation da in der Tatsache, daß die Partialdrucke in den beiden Gefäßen jetzt kleiner sind als im ursprünglichen Gemisch.

Wir können aber nun die Tatsache, daß alle Moleküle im Gefäß $BB'$ die $y$-Koordinate 1 haben und im anderen Gefäß entsprechend $-1$, benutzen, um alle Moleküle wieder auf das ursprüngliche Volumen zu bringen. Hierzu brauchen wir bloß die semipermeable Wand $A$ durch eine Wand $A^*$ zu ersetzen, welche semipermeabel ist nicht mit Rücksicht auf $x$, sondern mit Rücksicht auf $y$, und zwar so, daß sie permeabel ist für die Moleküle mit der $y$-Koordinate 1 und impermeabel für die anderen, und umgekehrt $B'$ ersetzen durch einen Stempel $B'^*$, der impermeabel ist für die Moleküle mit $y = +1$ und permeabel ist für die anderen. Dann lassen sich die beiden Gefäße wieder ohne Arbeitsleistung ineinander verschieben. Die Verteilung der $y$-Koordinate auf 1 und $-1$ ist nunmehr von den $x$-Werten statistisch unabhängig geworden, und wir können außerdem noch die ursprüngliche Verteilung auf 1 und $-1$ herstellen: wir durchliefen so einen vollständigen Kreisprozeß. Die einzige Veränderung, die wir dann zu registrieren haben, ist die erzielte Entropieverminderung von dem Betrage (2),

$$\bar{s} = k(w_1 \log w_1 + w_2 \log w_2).$$

Wenn wir also nicht zugeben wollen, daß der zweite Hauptsatz verletzt ist, so müssen wir schließen, daß der Eingriff, der die

Kopplung zwischen $y$ und $x$ bewirkt, die Messung von $x$ durch $y$, unlöslich mit einer Entropieerzeugung verknüpft ist. Wird ein bestimmter Weg zur Erzielung dieser Kopplung eingeschlagen, und wird die dabei notwendig erzeugte Entropiemenge mit $S_1$ und $S_2$ bezeichnet, wobei dann $S_1$ die mittlere Entropievergrößerung angibt, die eintritt, wenn $y$ den Wert 1 erhält, und entsprechend $S_2$ die, welche eintritt, wenn $y$ den Wert $-1$ erhält, so wird die bei einem solchen im Mittel erzeugte Entropiemenge gegeben sein durch

$$w_1 S_1 + w_2 S_2 = \bar{S}.$$

Damit der zweite Hauptsatz zu Recht besteht, muß diese Entropiemenge größer sein als die durch die Verwertung der Messung erzielbare Entropieverminderung $\bar{s}$ nach (2). Es muß daher gelten:

$$\bar{S} + \bar{s} \geqq 0,$$

$$w_1 S_1 + w_2 S_2 + k(w_1 \log w_1 + w_2 \log w_2) \geqq 0. \tag{3}$$

Diese Ungleichheit muß für beliebige Werte von $w_1$ und $w_2$ gelten*; natürlich darf die Nebenbedingung $w_1 + w_2 = 1$ nicht verletzt sein. Im besonderen fragen wir danach, bei welchem $w_1$ und $w_2$ für gegebene $S$-Werte der Ausdruck ein Minimum wird. Auch für dieses Wertepaar $w_1$ und $w_2$ muß die Ungleichheit (3) noch gelten. Unter der erwähnten Nebenbedingung tritt das Minimum ein, wenn

$$\frac{S_1}{k} + \log w_1 = \frac{S_2}{k} + \log w_2 \tag{4}$$

gilt. Dann ist aber

$$e^{-\frac{S_1}{k}} + e^{-\frac{S_2}{k}} \leqq 1.$$

Dies kann man sehr einfach sehen, wenn man die Bezeichnung

$$\frac{S_1}{k} + \log w_1 = \frac{S_2}{k} + \log w_2 = \lambda$$

einführt. Es ist dann

$$w_1 = e^{\lambda} . e^{-\frac{S_1}{k}}; \quad w_2 = e^{\lambda} . e^{-\frac{S_2}{k}}. \tag{5}$$

Setzt man diese Werte in die Ungleichheit (3) ein, so ergibt sich

$$\lambda e^{\lambda}\left(e^{-\frac{S_1}{k}} + e^{-\frac{S_2}{k}}\right) \geqq 0.$$

Es gilt also auch

$$\lambda \geqq 0.$$

* Die Entropievergrößerung kann ja nur von der Art der Messung und seinem Resultate, nicht aber davon abhängen, wie viele Systeme der einen oder anderen Art vorhanden sind.

Setzt man aber die Werte für $w_1$ und $w_2$ aus (5) in die Gleichung $w_1 + w_2 = 1$ ein, so erhält man

$$e^{-\frac{S_1}{k}} + e^{-\frac{S_2}{k}} = e^{-\lambda}.$$

Und wegen $\lambda \geqq 0$ gilt also

$$e^{-\frac{S_1}{k}} + e^{-\frac{S_2}{k}} \leqq 1. \tag{6}$$

Diese Formel muß also ganz allgemein gelten, wenn die Thermodynamik nicht verletzt sein soll.

Solange wir die Eingriffe durch intelligente Wesen vornehmen lassen, ist freilich eine direkte Nachprüfung ausgeschlossen. Wir können jedoch versuchen, einfache unbelebte Vorrichtungen anzugeben, welche eine solche Kopplung bewirken, und zusehen, ob dabei in der Tat eine Entropie erzeugt wird und von welchem Betrage. Wenn wir erst einmal erkannt haben, daß es lediglich auf eine bestimmte charakteristische Art der Kopplung, eine „Messung", ankommt, so brauchen wir nicht irgendwelche komplizierten Modelle zu konstruieren, welche die Eingriffe der Lebewesen weitgehend nachahmen, sondern können uns mit dem Zustandebringen dieser besonderen, mit Erinnerung behafteten Kopplung begnügen.

Bei dem Beispiel, das wir hier anführen wollen, wird die Lagenkoordinate eines hin und her schwankenden Zeigers durch den Energieinhalt eines Körpers $K$ „gemessen". Der Zeiger soll zunächst rein mechanisch bewirken, daß der Körper $K$, durch dessen Energieinhalt die Lage des Zeigers gemessen werden soll, je nach Lage des Zeigers mit dem einen von zwei Zwischenstücken, $A$ bzw. $B$, wärmeleitend verbunden ist, und zwar so, daß der Körper mit $A$ verbunden ist, solange die Koordinate, welche die Lage des Zeigers festlegt, in ein bestimmtes hervorgehobenes, im übrigen aber beliebig großes oder kleines Intervall $a$ fällt, und sonst, im Intervall $b$, mit $B$. Beide Zwischenstücke seien bis zu einem gewissen Zeitpunkt, dem Zeitpunkt der „Messung", mit einem Wärmereservoir von der Temperatur $T_0$ in thermischem Kontakt. In diesem Zeitpunkt wird etwa durch eine periodisch funktionierende mechanische Vorrichtung das Zwischenstück $A$ in reversibler Weise auf die Temperatur $T_A$ abgekühlt, d. h. nach sukzessiver Berührung mit Wärmereservoiren von Zwischentemperaturen mit einem Wärmereservoir von der Temperatur $T_A$ in Berührung gebracht. Gleichzeitig wird das Zwischenstück $B$ in derselben Weise auf die Temperatur $T_B$ erwärmt. Alsdann werden die Zwischenstücke wieder von den betreffenden Wärmereservoiren thermisch isoliert.

Wir setzen voraus, daß die Lage des Zeigers sich so lamgsam verändert, daß alle hier skizzierten Operationen noch bei ein und derselben Zeigerlage vorgegangen sind. Fiel die Lagenkoordinate des Zeigers in das hervorgehobene Intervall, so war während der erwähnten Operation der Körper mit dem Zwischenstück $A$ verbunden und ist infolgedessen jetzt auf die Temperatur $T_A$ abgekühlt. Im umgekehrten Falle ist der Körper jetzt auf die Temperatur $T_B$ erwärmt. Sein Energieinhalt wird also, je nachdem wie die Zeigerlage zu dem Zeitpunkt der „Messung" war, der Temperatur $T_A$ entsprechend klein oder der Temperatur $T_B$ entsprechend groß sein und seinen Wert beibehalten, auch wenn der Zeiger nun im Laufe der Zeit aus dem hervorgehobenen Intervall austritt bzw. in dasselbe eintritt. Nach einiger Zeit, während der Zeiger weiter seine Schwankungen ausführt, läßt sich dann aus dem Energieinhalt des Körpers $K$ kein Schluß mehr auf die augenblickliche Lage des Zeigers ziehen, wohl aber ein sicherer Schluß auf die Lage des Zeigers zum Zeitpunkt der Messung. Dann ist die Messung vollbracht.

Die erwähnte periodisch funktionierende mechanische Vorrichtung, die uns hier die Eingriffe vornimmt, soll dann nach der vollbrachten Messung die jetzt thermisch isolierten Zwischenstücke $A$ und $B$ mit dem Wärmereservoir $T_0$ direkt in Verbindung bringen. Dies hat den Zweck, den Körper $K$, der jetzt mit einem der beiden Zwischenstücke ebenfalls in Verbindung steht, wieder in den ursprünglichen Zustand zu bringen, in welchem er vor der „Messung" war. Die direkte Verbindung der Zwischenstücke und damit des auf $T_A$ abgekühlten bzw. $T_B$ erwärmten Körpers $K$ mit dem Reservoir $T_0$ bewirkt notwendig eine Entropievergrößerung. Dies läßt sich aber gar nicht vermeiden, denn es hätte jetzt keinen Sinn, etwa das Zwischenstück $A$ durch sukzessive Berührung mit Reservoiren von Zwischentemperaturen in reversibler Weise auf die Temperatur $T_0$ erwärmen zu wollen und $B$ ebenso abzukühlen; denn nach vollbrachter Messung wissen wir nicht, mit welchem der beiden Zwischenstücke der Körper $K$ jetzt im Kontakt steht, und ebensowenig wissen wir, ob er zuletzt mit $T_A$ oder $T_B$ in Verbindung gestanden hat. Wir wissen also auch nicht, ob wir Zwischentemperaturen zwischen $T_A$ und $T_0$ oder $T_0$ und $T_B$ anwenden sollen.

Der Betrag der auf diese Weise im Mittel pro Messung erzeugten Entropiemengen $\bar{S}_1$ und $\bar{S}_2$ läßt sich angeben, falls die Wärmekapazität als Funktion der Temperatur $\bar{u}(T)$ für den Körper $K$ bekannt ist, denn die Entropie ist ja aus der Wärmekapazität zu berechnen; von der Wärmekapazität der Zwischenstücke wird natürlich abstrahiert. War die Lagenkoordinate des Zeigers zum Zeitpunkt der „Messung“ in dem hervorgehobenen Intervall und entsprechend der Körper mit dem Zwischenstück $A$ in Verbindung, so wurde den Wärmereservoiren bei der sukzessiven Abkühlung die Entropie

$$\int_{T_A}^{T_0} \frac{1}{T} \frac{d\bar{u}}{dT} dT$$

zugeführt. Dafür wurde aber nachher bei der direkten Berührung mit dem Wärmereservoir $T_0$ diesem Wärmereservoir die Entropie

$$\frac{\bar{u}(T_0) - \bar{u}(T_A)}{T_0}$$

entzogen. Es wurde also in summa die Entropie mit dem Betrage

$$S_A = \frac{\bar{u}(T_A) - \bar{u}(T_0)}{T_0} + \int_{T_A}^{T_0} \frac{1}{T} \frac{d\bar{u}}{dT} dT \tag{7}$$

vermehrt. Analog wird die Entropie, wenn der Körper zum Zeitpunkt der „Messung“ mit dem Zwischenstück $B$ in Verbindung war, den Zuwachs

$$S_B = \frac{\bar{u}(T_B) - \bar{u}(T_0)}{T_0} + \int_{T_B}^{T_0} \frac{1}{T} \frac{d\bar{u}}{dT} dT \tag{8}$$

erfahren.

Wir wollen nun diese Ausdrücke auswerten für den besonders einfachen Fall, daß der Körper, dessen wir uns bedienen, nur zwei Energiezustände, einen unteren und einen oberen Zustand, besitzt. Ist ein solcher Körper mit einem Wärmereservoir von irgend einer Temperatnr $T$ in thermischer Berührung, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er sich im unteren bzw. oberen Zustand befindet, gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} p(T) &= \frac{1}{1 + g e^{-\frac{u}{kT}}} \\ \text{bzw.} \qquad q(T) &= \frac{g e^{-\frac{u}{kT}}}{1 + g e^{-\frac{u}{kT}}}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Dabei bedeutet $u$ den Energieunterschied der beiden Zustände und $g$ das statistische Gewicht. Die Energie des unteren Zustandes können wir, ohne daß dies eine Einschränkung bedeuten würde, gleich Null setzen. Es ergibt sich dann*

$$\left.\begin{aligned} S_A &= q(T_A)\, k \log \frac{q(T_A)}{q(T_0)} \frac{p(T_0)}{p(T_A)} + k \log \frac{p(T_A)}{p(T_0)} \\ \text{bzw.} \quad & \\ S_B &= p(T_B)\, k \log \frac{q(T_0)}{q(T_B)} \frac{p(T_B)}{p(T_0)} + k \log \frac{q(T_B)}{q(T_0)}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dabei bedeuten $q$ und $p$ die durch Formel (9) gegebenen Funktionen von $T$, die hier für die betreffenden Argumente $T_0$, $T_A$ und $T_B$ zu nehmen sind.

Wollen wir nun erreichen, daß ein sicherer Schluß von dem Energieinhalt des Körpers $K$ auf die Lagenkoordinate des Zeigers möglich sei, wie dies bei der hier verwendeten begrifflichen Abgrenzung für die „Messung" zu fordern ist, so müssen wir erreichen, daß der Körper sicher in den unteren Zustand gerät, wenn er mit $T_A$ in Berührung kommt, und sicher in den oberen Zustand, wenn er mit $T_B$ in Berührung kommt, was der Aussage entspricht, daß

$$p(T_A) = 1, \quad q(T_A) = 0; \qquad p(T_B) = 0, \quad q(T_B) = 1$$

gilt. Dies läßt sich zwar nicht erreichen, aber beliebig genau approximieren dadurch, daß man $T_A$ gegen den absoluten Nullpunkt und das statistische Gewicht $g$ gegen Unendlich gehen läßt. [Bei dem Grenzübergang wird auch $T_0$ verändert so, daß $p(T_0)$ und $q(T_0)$ festgehalten werden.] Aus den Formeln (10) wird dann

$$S_A = -k \log p(T_0); \quad S_B = -k \log q(T_0), \tag{11}$$

und wenn wir nun den Ausdruck $e^{-\frac{S_A}{k}} + e^{-\frac{S_B}{k}}$ bilden, so finden wir

$$e^{-\frac{S_A}{k}} + e^{-\frac{S_B}{k}} = 1.$$

Es konnte also der durch unsere vorangehende Überlegung gerade noch zugelassene Grenzfall realisiert werden; die Verwendung von semipermeablen Wänden nach Fig. 1 erlaubt eine volle Ausnützung der Messung: Ungleichung (1) läßt sich sicher nicht verschärfen.

Wie wir an diesem Beispiel gesehen haben, kann eine einfache unbelebte Vorrichtung mit Bezug auf das, was wesentlich ist, dasselbe

* Siehe den Anhang am Schluß der Arbeit.

leisten, was die Eingriffe intelligenter Wesen leisten würden. Wir haben an diesem Beispiel die „Lebensvorgänge" einer unbelebten Vorrichtung verfolgt und sehen können, daß durch sie genau die von der Thermodynamik geforderte Entropiemenge erzeugt wird.

Anhang. In dem betrachteten Falle, wenn die Häufigkeit der beiden Zustände von der Temperatur nach den Formeln

$$p(T) = \frac{1}{1 + g e^{-\frac{u}{kT}}}; \quad q(T) = \frac{g e^{-\frac{u}{kT}}}{1 + g e^{-\frac{u}{kT}}}$$

abhängt und somit die mittlere Energie des Körpers durch

$$\bar{u}(T) = u\, q(T) = \frac{u g e^{-\frac{u}{kT}}}{1 + g e^{-\frac{u}{kT}}}$$

gegeben ist, gilt die Identität

$$\frac{1}{T} \frac{d\bar{u}}{dT} = \frac{d}{dT} \left\{ \frac{\bar{u}(T)}{T} + k \log \left(1 + e^{-\frac{u}{kT}}\right) \right\}.$$

Damit können wir den Ausdruck

$$S_A = \frac{\bar{u}(T_A) - \bar{u}(T_0)}{T_0} + \int_{T_A}^{T_0} \frac{1}{T} \frac{d\bar{u}}{dT} dT$$

auch schreiben:

$$S_A = \frac{\bar{u}(T_A) - \bar{u}(T_0)}{T_0} + \left\{ \frac{\bar{u}(T)}{T} + k \log \left(1 + g e^{-\frac{u}{kT}}\right) \right\}_{T_A}^{T_0},$$

und indem wir die Grenzen einsetzen, erhalten wir

$$S_A = \bar{u}(T_A) \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_A}\right) + k \log \frac{1 + g e^{-\frac{u}{kT_0}}}{1 + g e^{-\frac{u}{kT_A}}}.$$

Schreiben wir nun in diesem letzten Ausdruck zunächst gemäß (9)

$$1 + g e^{-\frac{u}{kT}} = \frac{1}{p(T)}$$

für $T_A$ und $T_0$, so erhalten wir

$$S_A = \bar{u}(T_A) \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_A}\right) + k \log \frac{p(T_A)}{p(T_0)},$$

und wenn wir dann noch gemäß (12)

$$\bar{u}(T_A) = u\, q(T_A)$$

schreiben, so wird daraus

$$S_A = q(T_A) \left(\frac{u}{T_0} - \frac{u}{T_A}\right) + k \log \frac{p(T_A)}{p(T_0)}.$$

Schreiben wir schließlich noch gemäß (9)

$$\frac{u}{T} = -k \log \frac{q(T)}{g\, p(T)}$$

für $T_A$ und $T_0$, so erhalten wir

$$S_A = q(T_A)\, k \log \frac{p(T_0)\, q(T_A)}{q(T_0)\, p(T_A)} + k \log \frac{p(T_A)}{p(T_0)}.$$

Die entsprechende Formel für $S_B$ erhalten wir, indem wir hier den Index $A$ mit $B$ vertauschen. Wir erhalten dann:

$$S_B = q(T_B)\, k \log \frac{p(T_0)}{q(T_0)} \frac{q(T_B)}{p(T_B)} + k \log \frac{p(T_B)}{p(T_0)}.$$

Erstere ist die Formel, die im Text für $S_A$ angeführt ist.

Wir können die Formel für $S_B$ auch noch auf etwas andere Gestalt bringen, indem wir

$$q(T_B) = 1 - p(T_B)$$

schreiben, ausmultiplizieren und das erste und letzte Glied zusammenziehen. Es wird dann:

$$S_B = p(T_B)\, k \log \frac{q(T_0)}{p(T_0)} \frac{p(T_B)}{q(T_B)} + k \log \frac{q(T_B)}{q(T_0)}.$$

Dies ist die Formel, die im Text für $S_B$ angeführt ist.

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig.