III. Elementare Prädikatenlogik

15. Was ist Prädikatenlogik?

15.1 Aussagenlogische Form und prädikatenlogische Form

Die Regeln der Aussagenlogik erlauben uns bloß, solche logischen Folgebeziehungen zwischen Sätzen zu beweisen, für deren Vorliegen allein die aussagenlogische Form dieser Sätze entscheidend ist. Die aussagenlogische Form eines Satzes, so hatten wir gesagt, wird dann sichtbar, wenn man diesen Satz in seine Teilsätze zerlegt. Die aussagenlogische Analyse macht also auf der Ebene von Satzbestandteilen halt, die wiederum Sätze sind. Dabei werden nur solche Teilsätze als logisch relevante Elemente anerkannt, deren Wahrheitswert einen Einfluss auf den Wahrheitswert des ursprünglichen Satzes hat. Im Extremfall ist der einzige solche Teilsatz, aus dem ein gegebener Satz B aufgebaut ist, der Satz B selbst. Dies gilt zum Beispiel für den Satz »Paul ist wütend«. In solchen Fällen spricht man allerdings besser davon, der Satz B habe gar keine aussagenlogische Struktur. Wie wir gesehen haben, ist diese Auskunft durchaus damit verträglich, dass Satz B in aussagenlogischen Folgerungsbeziehungen zu Mengen von anderen Sätzen $A_1 \ldots A_n$ steht – Mengen von Sätzen nämlich, von denen mindestens ein Satz den Satz B als Teilsatz enthält. Ein Beispiel hierfür ist die nachstehend behauptete Folgebeziehung:

$$A \vee B, \sim A \vdash B$$

Wenn von zwei Sätzen A und B hingegen keiner den jeweils anderen als Teilsatz enthält, dann besteht zwischen diesen beiden Sätzen allein im Normalfall keine aussagenlogische Folgerungsbeziehung. Und wenn dasselbe für B und jedes Element einer Menge von Sätzen $A_1 \ldots A_n$ gilt, dann bestehen im Normalfall zwischen B und der Menge $A_1 \ldots A_n$ ebenfalls keine aussagenlogischen Folgerungsbeziehungen. Warum »im Normalfall«? Ein Blick auf die Theorem-Einführungsregel und die Regel Ex falso quodlibet sollte genügen, um diese Frage zu beantworten: Wenn nämlich B ein Theorem ist, dann folgt B aus jedem beliebigen Satz, und wenn aus der Satzmenge $A_1 \ldots A_n$ ein Widerspruch folgt, dann folgt aus dieser Menge – gemäß Ex falso quodlibet – jeder beliebige Satz. Wenn nun aber weder B ein Theorem ist noch die Satzmenge $A_1 \ldots A_n$ einen Widerspruch abzuleiten erlaubt, dann werden, solange B und $A_1 \ldots A_n$ keine Teilsätze gemein haben, keinerlei aussagenlogische Folgerungsbeziehungen zwischen B und $A_1 \ldots A_n$ bestehen. Wenn sich Logik auf Aussagenlogik beschränkte, dann bestünde zwischen solchen Sätzen demnach gar keine logische Beziehung.

Zwei Beispiele mögen verdeutlichen, dass dies ein unbefriedigendes Ergebnis wäre. Die beiden nachfolgenden Argumente sind intuitiv gesprochen gültig, ob-

S. Rosenkranz, *Einführung in die Logik*

wohl sie sich mit aussagenlogischen Mitteln nicht als logisch gültig erweisen lassen:

1	(1)	Kein Kollege kommt zur Konferenz.	Annahme
2	(2)	Otto ist ein Kollege.	Annahme
1,2	(3)	Otto kommt nicht zur Konferenz.	[...]

4	(4)	Jeder Sünder wird vom Blitz getroffen.	Annahme
5	(5)	Kein Blitz trifft George W. Bush.	Annahme
4,5	(6)	George W. Bush ist kein Sünder.	[...]

Wenn die Prämissen dieser Argumente allesamt wahr sind, dann ist – ganz gleich, was sonst noch der Fall oder nicht der Fall sein mag – ihre jeweilige Konklusion ebenfalls wahr. Nach unserem allgemeinen Begriff der Folge folgt also die jeweilige Konklusion aus den jeweiligen Prämissen. Nun sind zugegebenermaßen nicht alle Folgebeziehungen immer auch *logische* Folgebeziehungen. Aber man kann sich des Eindrucks nur schwer erwehren, dass die intuitive Gültigkeit der Argumente etwas mit der *internen Struktur* der Sätze zu tun hat, die als ihre Prämissen bzw. Konklusionen fungieren. Dies zeigt sich daran, dass sich nach demselben Strickmuster unendlich viele andere, ebenso intuitiv gültige Argumente konstruieren lassen. Hier sind einige Beispiele dafür:

1	(1)	Keine Hummel brummt in der Brunftzeit.	Annahme
2	(2)	Dieses Tier ist eine Hummel.	Annahme
1,2	(3)	Dieses Tier brummt nicht zur Brunftzeit.	[...]

1	(1)	Kein Schwein ruft mich an.	Annahme
2	(2)	Chanchito ist ein Schwein.	Annahme
1,2	(3)	Chanchito ruft mich nicht an.	[...]

4	(4)	Jedes Mensa-Essen wird von Spitzenköchen gekocht.	Annahme
5	(5)	Kein Spitzenkoch kocht Grünkohl-Nudelauflauf mit Zigeunersauce.	Annahme
4,5	(6)	Grünkohl-Nudelauflauf mit Zigeunersauce ist kein Mensa-Essen.	[...]

4	(4)	Jedes Kind wird von einem Elternteil verhätschelt.	Annahme
5	(5)	Kein Elternteil verhätschelt César.	Annahme
4,5	(6)	César ist kein Kind.	[...]

Allerdings kann keines dieser Argumente allein mit aussagenlogischen Mitteln als logisch gültig erwiesen werden. Um dies einzusehen, versuche man zunächst, die aussagenlogische Form der Prämissen und Konklusionen anzugeben. Dabei wird man feststellen, dass es keinen Teilsatz gibt, der sowohl in der jeweiligen Konklusion vorkommt (bzw. mit ihr identisch ist) als auch in irgendeiner der Prämissen vorkommt (bzw. mit einer dieser Prämissen identisch ist). Wir wollen dies anhand des ersten der beiden eingangs genannten Beispiele veranschaulichen. Die Vermutung liegt nahe, dass sowohl die Prämisse (1) als auch die Konklusion (3) die aussagenlogische Form einer Negation hat. Nehmen wir ruhig an, diese Vermutung bestätige sich und es verhielte sich tatsächlich so. Eine Formalisierung des ersten Arguments sähe dann in etwa so aus:

1	(1)	~A	Annahme
2	(2)	B	Annahme
1,2	(3)	~C	[…]

Man sieht sofort, dass dieses Argumentschema nicht bloß logisch gültige Argumente zu generieren erlaubt, sondern unendlich viele ungültige. Hier ist ein Beispiel für ein solches ungültiges Argument:

Kein Mensch hat Ahnung.
Die Wahl ist nochmal gut ausgegangen.
Also werde ich morgen nicht kommen.

Offensichtlich gibt es keine aussagenlogischen Regeln, die dieses Argument legitimierten. Da aussagenlogische Regeln aber allgemeiner Natur sind, werden die eingangs genannten, intuitiv gültigen (1)-(2)-(3)-Argumente ebensowenig allein durch aussagenlogische Regeln legitimiert. Wie kann man nun aber erklären, dass die eingangs genannten (1)-(2)-(3)-Argumente allesamt gültig sind, wenn sie denn nicht aussagenlogisch gültig sind, wie das letzte Beispiel zeigt? Offensichtlich sind die Struktureigenschaften, die die aussagenlogische Form eines Satzes bestimmen, nicht die einzigen seiner logisch relevanten Struktureigenschaften. Die Sätze (1), (2) und (3) haben eine interne Struktur, aufgrund derer sie logisch aufeinander bezogen sind. Aber die Elemente dieser Struktur sind keine Teilsätze, sondern Prädikate, Namen und logische Zeichen. Die Prädikatenlogik hat es mit genau solchen logischen Strukturen zu tun, die sich erst unterhalb der Satzebene dingfest machen lassen. Darum spricht man auch von der **prädikatenlogischen Form** von Sätzen.

Um die prädikatenlogische Form eines Satzes erkennen zu können, müssen wir mehr unterscheiden können als bloß Teilsätze und Operatoren, die sie verknüpfen oder sie – wie im Fall der Negation – modifizieren. Bevor wir uns der Frage zuwenden, worin die prädikatenlogische Struktur von Sätzen besteht und wie wir sie erkennen können, müssen wir uns zunächst mit einigen der Typen von Teilausdrücken vertraut machen, die die Elemente solcher Strukturen bilden.

15.2 Singuläre und generelle Terme

Zwei dieser Typen von Teilausdrücken sind bereits genannt worden: (1.) **Namen** und (2.) **Prädikate**.

1. Unter **Namen** wollen wir alle Individualausdrücke verstehen, also alle Ausdrücke, die, sofern sie etwas bezeichnen, einen individuellen Gegenstand bezeichnen. Individualausdrücke werden manchmal auch **singuläre Terme** genannt.

Innerhalb der Gruppe der singulären Terme (also Namen) unterscheiden wir noch einmal zwischen **Eigennamen** und sogenannten **definiten Kennzeichnungen**. Eigennamen sind – grob gesagt – Individualausdrücke, die keinen beschreibenden Charakter haben. Das heißt: Ausgehend von unserer Kenntnis des Namens eines Gegenstandes können wir noch keine Angaben über die Eigenschaften machen, die dieser Gegenstand hat. Zum Beispiel verrät uns der Name »Citlaltépetl« nichts über den Gegenstand, den er benennt. Demgegenüber sind definite Kennzeichnungen Individualausdrücke, die einen beschreibenden Charakter haben. Wenn wir wissen, dass eine bestimmte Kennzeichnung tatsächlich einen Gegenstand bezeichnet, dann wissen wir, dass dieser Gegenstand bestimmte Eigenschaften hat. Zum Beispiel wissen wir, dass der durch die Kennzeichnung »der höchste Berg Mexikos« benannte Gegenstand jedenfalls ein Berg ist. Dieser beschreibende Charakter wird durch das Wort »Kennzeichnung« angezeigt. Das Wort »definit« soll klarstellen, dass es sich um einen und nur einen Gegenstand handelt, auf den die jeweilige Beschreibung zutrifft. (Nur ein einziger Berg kann **der** höchste Berg Mexikos sein.) Die Definitheit einer Kennzeichnung kommt dadurch zum Ausdruck, dass sie einen **bestimmten Artikel** enthält (»der«, »die« oder »das«).

Um den Unterschied zwischen Eigennamen und definiten Kennzeichnungen zu verdeutlichen, sei hier eine Liste von singulären Termen beider Arten angegeben:

Singuläre Terme (Individualausdrücke, Namen)	
Eigennamen	**definite Kennzeichnungen**
»Penélope«	»Césars beste Freundin«
»Joschka Fischer«	»der gegenwärtige Bundesaußenminister«
»China«	»der gegenwärtige Kaiser von China«
»Citlaltépetl«	»der höchste Berg Mexikos«
»St. Andrews«	»die älteste Universitätsstadt Schottlands«
»Paul«	»die Hauptstadt von Dänemark«
»Otto«	»die kleinste natürliche Zahl«
»Berta«	»die größte natürliche Zahl«
»Olga«	»die Mutter von Olga«

2. **Prädikate** sind demgegenüber allgemeine Ausdrücke oder, wie man auch sagt, **generelle Terme**. Prädikate können dabei grob als Ausdrücke verstanden werden, die, wenn man sie gezielt mit einem oder mehreren, beliebig gewählten singulären Termen kombiniert, vollständige wahrheitswertfähige Sätze ergeben. Dass die singulären Terme dabei beliebig gewählt werden können, signalisiert die Allgemeinheit von Prädikaten. Offensichtlich sind Namen keine Prädikate: Wenn man Namen mit Namen kombiniert, bekommt man allenfalls eine Liste, aber keinen wahrheitswertfähigen Satz.

Neben den Prädikaten gibt es noch eine andere Kategorie von generellen Termen, die **Funktoren**. Funktoren sind allgemeine Ausdrücke, die, wenn man sie gezielt mit einem oder mehreren Namen kombiniert, definite Kennzeichnungen ergeben.

Generelle Terme

Prädikate	**Funktoren**
»... tanzt«	»der gegenwärtige Kaiser von ...«
»... ist grün«	»der höchste Berg von ...«
»... ist positiv«	»die Universität von ...«
»... ist ein Berg«	»der Hauptmann aus ...«
»... ist eine Zahl«	»die Hauptstadt von ...«
»... und — sind ein Paar«	»die Mutter von ...«
»... singt lauter als —«	»der älteste Sohn von ... und —«
»... liegt zwischen — und –––«	»der heißeste Ort zwischen ... und —«
»... , — , ––– und –·–·– sind die Seiten eines Quadrats«	»der Freund von ... nach — und vor –––«

Sowohl Prädikate als auch Funktoren führen, wie man sieht, Leerstellen mit sich. Generelle Terme sind also in gewissem Sinn **unvollständige Ausdrücke**. Die Leerstellen zeigen an, wo Individualausdrücke eingesetzt werden müssen, um aus einem Prädikat einen Satz bzw. aus einem Funktor eine definite Kennzeichnung zu machen. Je nachdem, wieviele Leerstellen ein Prädikat mit sich führt, spricht man von einstelligen, zweistelligen, dreistelligen … oder schlicht von mehrstelligen Prädikaten. Entsprechendes gilt für Funktoren. Wenn in einem Satz ein Prädikat mit n Leerstellen vorkommt, von denen mindestens eine durch einen singulären Term gefüllt ist, so lässt sich dieses Prädikat immer auch als $n–1$-stelliges Prädikat analysieren, indem man nämlich den betreffenden singulären Term mit zum Prädikatsausdruck rechnet. Zum Beispiel kann man den Satz »Otto geht auf die Konferenz« wahlweise in das zweistellige Prädikat »... geht auf —« und die beiden singulären Terme »Otto« und »die Konferenz« oder in das einstellige Prädikat »... geht auf die Konferenz« und den singulären Term »Otto« zerlegen. (Wie weit man die Analyse treiben sollte, wird davon abhängen, welche Analyse für den Nachweis welcher prädikatenlogischen Folgebeziehungen vonnöten ist. Doch dazu später mehr.)

Wie man an den Beispielen sieht, bezeichnen Funktoren offenbar Funktionen, deren Input in der Regel individuelle Gegenstände und deren Output in der Regel wieder individuelle Gegenstände sind. Manchmal kommt es allerdings vor, dass es für einen Gegenstand als Input keinen Gegenstand als Output gibt. Zum Beispiel bezeichnet die definite Kennzeichnung, die man erhält, wenn man in den Funktor »der gegenwärtige Kaiser von —« den Eigennamen »Deutschland« einsetzt, glücklicherweise gar nichts.

Prädikate können entsprechend als Ausdrücke verstanden werden, die Funktionen bezeichnen, deren Input Gegenstände und deren Output Wahrheitswerte sind. Dies hat man sich so vorzustellen: Vervollständigt man ein n-stelliges Prädikat durch n Individualausdrücke, dann erhält man einen wahrheitswertfähigen Satz; der Wahrheitswert dieses Satzes ist dann der Wert, den die von dem Prädikat bezeichnete Funktion ausspuckt, wenn man sie mit den Gegenständen füttert, die die Individualausdrücke bezeichnen.

Wir werden später noch sehen, dass sich Sätze, in denen Funktoren vorkommen, systematisch in Sätze übersetzen lassen, die keine Funktoren mehr enthalten und stattdessen komplexe mehrstellige Prädikate. Funktoren als eigenständige Kategorie von Ausdrücken sind also für die Belange der logischen Analyse verzichtbar. Ebenso lassen sich auch Sätze, die definite Kennzeichnungen enthalten, in Sätze übersetzen, die keine definiten Kennzeichnungen mehr enthalten (siehe Kapitel 19). Diese Möglichkeit ist besonders dann sehr willkommen, wenn man es mit definiten Kennzeichnungen zu tun hat, die nichts bezeichnen. An dieser Stelle mag uns allerdings gestattet sein, bis auf weiteres definite Kennzeichnungen als nicht weiter zerlegt zu denken, sondern – ganz so wie Eigennamen auch – als nicht weiter analysierbare Namen zu behandeln. Funktoren werden demnach bis auf weiteres keine Rolle mehr spielen, definite Kennzeichnungen hingegen schon.

Im weiteren Verlauf wird es nützlich sein, sowohl Prädikate als auch Namen (Eigennamen und definite Kennzeichnungen) zu formalisieren. Analog den aus der Aussagenlogik bereits hinlänglich bekannten schematischen Satzbuchstaben werden demnach schematische Buchstaben gebraucht, die jeweils Platzhalter für Prädikate oder Namen sind. Wir wollen für diese Zwecke die folgende Festsetzung treffen: Die Großbuchstaben »F«, »G«, »H«, …, »L« werden wir als Prädikatbuchstaben gebrauchen; hingegen werden die (kursiv gesetzten) Kleinbuchstaben »*m*«, »*n*«, und »*o*« künftig als Platzhalter für singuläre Terme dienen. Dabei gehen wir künftig stets davon aus, dass »*m*«, »*n*«, und »*o*« tatsächlich etwas bezeichnen. Sollte der Fall eintreten, dass wir im Rahmen unserer logischen Rekonstruktionsbemühungen mehr schematische Buchstaben für Prädikate bzw. singuläre Terme benötigen, dann ist es uns hiermit erlaubt, die bereits genannten Buchstaben mit fortlaufenden Indizes zu versehen und auf diese Weise unbegrenzt viele Platzhalter zu generieren (»F_1«, »F_2«, »F_3«, … bzw. »m_1«, »m_2«, »m_3«, …). Die (2)er Prämissen

Otto ist ein Kollege.
Dieses Tier ist eine Hummel.
Chanchito ist ein Schwein.

können also durch die prädikatenlogische Formel

$\mathrm{F}m$

repräsentiert werden. Entsprechend können die (3)er Konklusionen

Otto kommt nicht zur Konferenz.
Dieses Tier brummt nicht zur Brunftzeit.
Chanchito ruft mich nicht an.

formalsprachlich durch

$\sim\mathrm{G}m$

repräsentiert werden.

Für die prädikatenlogische Form von Sätzen ist nun aber nicht nur entscheidend, dass sie aus singulären und generellen Termen bestehen. In den Prämissen aller (1)-(2)-(3)-Argumente und den Prämissen aller (4)-(5)-(6)-Argumente kommen neben Prädikaten, Eigennamen und Kennzeichnungen beispielsweise auch Ausdrücke wie »kein« und »jeder« vor. Und es ist unter anderem das

Vorkommen dieser Ausdrücke, das für die logische Gültigkeit all dieser Argumente gleichermaßen verantwortlich zu sein scheint. Denn während in den jeweiligen (1)-(2)-(3)-Argumenten ganz unterschiedliche Prädikate, Eigennamen und Kennzeichnungen vorkommen, enthalten die (1)er-Prämissen allesamt in derselben Position das Wort »kein« bzw. »keine«. Entsprechendes gilt für die (4)-(5)-(6)-Argumente: In den (4)er-Prämissen kommt ausnahmslos an derselben Stelle das Wort »jeder« bzw. »jedes« vor, und in den (5)er-Prämissen kommt ausnahmslos an derselben Stelle das Wort »kein« bzw. »keine« vor. Was die restlichen Satzbestandteile betrifft, so unterscheiden sich diese Prämissen jedoch voneinander. Es liegt also nahe, dass sich die unterschiedslose Gültigkeit aller (4)-(5)-(6)-Argumente im Rückgriff darauf erklären lässt, dass in ihnen der Ausdruck »jeder« bzw. »jedes« in einheitlicher Weise vorkommt.
→ **Übung G**

15.3 Allquantifizierte und existenzquantifizierte Sätze

Wörter wie »kein« und »jede« erfüllen in der Tat wichtige prädikatenlogische Funktionen, die wir noch klären müssen. Aber diese Wörter sind nicht die einzigen Wörter, die sich von Prädikaten, Eigennamen und Kennzeichnungen unterscheiden und über deren prädikatenlogische Rolle wir uns erst noch klarwerden müssen. Um sich dies vor Augen zu führen und zugleich unsere Liste zu erweitern, betrachten wir die folgenden Argumente:

1	(1)	Der letzte Gast möchte Kaffee.	Annahme
1	(2)	Mindestens einer möchte Kaffee.	[…]
1	(1)	Alle werden langsam dicker.	Annahme
1	(2)	Sven wird langsam dicker.	[…]
1	(1)	Alle Frösche sind Amphibien.	Annahme
2	(2)	Einige Frösche haben gelbe Hälse.	Annahme
1,2	(3)	Einige Amphibien haben gelbe Hälse.	[…]
1	(1)	Alle Frösche sind Amphibien.	Annahme
2	(2)	Alle Amphibien schlüpfen aus Eiern.	Annahme
1,2	(3)	Alle Frösche schlüpfen aus Eiern.	[…]
1	(1)	Niemand liebt mich.	Annahme
1	(2)	Ich liebe mich nicht.	[…]
1	(1)	Nichts funktioniert.	Annahme
1	(2)	Mein Gehirn funktioniert nicht.	[…]
1	(1)	Jemand fängt an zu singen.	Annahme
2	(2)	Jeder, der anfängt zu singen, hört irgendwann zu singen auf.	Annahme
1,2	(3)	Jemand hört irgendwann zu singen auf.	[…]

Wichtige Wörter, die uns neben »kein« und »jeder« etwas über die prädikatenlogische Form von Prämissen und Konklusionen verraten, sind »alle«, »mindestens einer«, »einige«, »jemand«, »niemand« und »nichts«. Zu welcher Kategorie von Ausdrücken gehören diese Wörter? Zu den aussagenlogischen Operatoren gehören sie offensichtlich nicht. Das Kriterium für Prädikate erfüllen sie ebensowenig: Wie immer man beispielsweise die Ausdrücke »jemand«, »niemand« oder »jeder« mit Eigennamen kombiniert, ein wahrheitswertfähiger Satz kommt dabei jedenfalls nicht heraus. Dass diese Ausdrücke ebensowenig wie Individualausdrücke funktionieren, zeigt die folgende Überlegung: Wenn »jemand« und »niemand« wie Individualausdrücke funktionierten, dann müssten die beiden nachstehenden Sätze dasselbe besagen – vorausgesetzt nur, dass, wenn einer mit einem anderen tanzt, beide miteinander tanzen:

Jemand tanzt mit niemandem.

und

Niemand tanzt mit jemandem.

Offensichtlich besagen diese Sätze aber etwas Grundverschiedenes. Ein Fest, auf dem getanzt wird, überlebt zwar Gäste, die mit niemandem tanzen, aber wenn niemand tanzt, dann ist der Ofen aus. Nun mag man geneigt sein zuzugeben, dass »niemand« zwar kein singulärer Term ist, sondern soviel besagt wie »es ist nicht der Fall, dass jemand«, aber trotzdem weiterhin steif und fest behaupten, zumindest der Ausdruck »jemand« funktioniere wie ein Name. Auch dies ist jedoch falsch, wie man sich leicht klarmacht. Funktionierte der Ausdruck »jemand« wie ein Name, dann müsste nämlich folgender Schluss erlaubt sein:

Jemand lenkt, und jemand schiebt an.
Also: Jemand lenkt und schiebt an.

Dieser Schluss ist aber ungültig. Nicht nur jemand, der einmal mit dem Auto liegen geblieben ist, weiß, weshalb das so ist.

Wörter wie »jemand«, »niemand«, »nichts«, »jeder«, »keine«, »alle« und »einige« gehören offenkundig in keine der bislang genannten Kategorien. Sofern sie überhaupt zusammengehören, bilden sie eine eigenständige Gruppe. Um die Funktion dieser Ausdrücke zu erklären, beginnen wir mit der Betrachtung der folgenden aussagenlogischen Verknüpfung:

Wenn Paul bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist Paul Allergiker.

Diese aussagenlogische Verknüpfung besteht aus zwei konditional verknüpften Teilsätzen. In diesen Teilsätzen kommen jeweils ein Name und ein Prädikat vor. Obwohl in den beiden Teilsätzen verschiedene Prädikate vorkommen, kommt in ihnen derselbe Name vor. Wir ersetzen nun in dieser Verknüpfung alle Vorkommnisse dieses Namens durch Vorkommnisse einer **Variablen**. In diesem Fall wählen wir dafür den (kursiv gesetzten) Buchstaben »*x*«. Wir erhalten dann:

Wenn x bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist x Allergiker.

Wir nennen die Ergebnisse solcher Ersetzungen **offene Sätze**. Wir verwandeln den offenen Satz in einen abgeschlossenen, d. h. vollständigen Satz, indem wir beispielsweise schreiben:

Für jedes *x* gilt: Wenn *x* bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist *x* Allergiker.

Dieser Satz entspricht den umgangssprachlichen Sätzen:

Jeder, dem bei Pollenflug die Augen jucken, ist Allergiker.

und

Alle, denen bei Pollenflug die Augen jucken, sind Allergiker.

Die Wendung »Für jedes *x* gilt« ist ebenso wie die Wendung »Für alle *x* gilt« das, was Logiker einen **Allquantor** nennen. Allquantoren »binden« die Variablen, die in offenen Sätzen »ungebunden« vorkommen. Um zu verstehen, was das heißt bzw. worauf es hinausläuft, müssen wir uns erst klarmachen, was offene Sätze eigentlich sind. Wir hatten den offenen Satz

Wenn *x* bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist *x* Allergiker.

dadurch aus dem ursprünglichen Satz

Wenn Paul bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist Paul Allergiker.

gewonnen, dass wir den Namen »Paul« eliminierten und durch die Variable »*x*« ersetzten. Dort, wo zunächst der Name »Paul« vorkam, kam daraufhin die Variable »*x*« vor. Die Variable »*x*« markierte daraufhin also die Leerstellen, die die Tilgung des Namens »Paul« hinterlassen hatte. Wenn wir diesen Prozess nun umkehren und die Leerstellen wieder mit dem Namen »Paul« ausfüllen, dann erhalten wir einen wahrheitswertfähigen Satz. Und wir erhalten ebenfalls einen wahrheitswertfähigen Satz, wenn wir die Leerstellen statt mit dem Namen »Paul« mit einem beliebigen anderen Namen ausfüllen. Zum Beispiel sind die nachstehenden Ausdrücke allesamt wahrheitswertfähige Sätze:

Wenn Paul bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist Paul Allergiker.
Wenn Olga bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist Olga Allergikerin.
Wenn Otto bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist Otto Allergiker.
Wenn Edmund bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist Edmund Allergiker.

Offene Sätze verhalten sich diesbezüglich genauso wie Prädikate. In der Tat hätten wir in unserer Liste mit Prädikaten die Leerstellen statt mit Punkten und Strichen auch mit Variablen markieren können. Zum Beispiel so:

»*x* tanzt«
»*x* ist grün«
»*x* ist positiv«
»*x* ist ein Berg«
»*x* ist eine Zahl«
»*x* und *y* sind ein Paar«
»*x* singt lauter als *y*«
»*x* liegt zwischen *y* und *z*«
»x_1 , x_2 , x_3 und x_4 sind die Seiten eines Quadrats«

Sobald wir uns erst einmal mit dem Gedanken angefreundet haben, dass Prädikate logisch komplex sein können, steht unserer Einsicht nichts mehr im Wege, dass Prädikate nichts anderes als offene Sätze sind und offene Sätze nichts anderes sind als Prädikate.

Wir können nun in aller Deutlichkeit sagen, welche Funktion der Allquantor »Für alle *x* gilt« (oder »Für jedes *x* gilt«) erfüllt, wenn er die Variablen eines offenen Satzes »bindet«: Der Satz, der daraus resultiert, sagt von einem Prädikat die Eigenschaft aus, durch jeden Gegenstand erfüllt zu werden. Zum Beispiel besagt der Satz

Für jedes *x* gilt: Wenn *x* bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist *x* Allergiker,

dass jeder Gegenstand die Bedingung erfüllt, Allergiker zu sein, *wenn* ihm bei Pollenflug die Augen jucken. Entsprechend besagen die Sätze

Für jedes *x* gilt: *x* ist gottgewollt.
Für alle *x* und *y* gilt: Wenn *x* die Ursache von *y* ist, dann geht *x* *y* zeitlich voraus.

einerseits, dass jeder Gegenstand (einschließlich Gott selbst) die Bedingung erfüllt, gottgewollt zu sein, und andererseits, dass jedes Paar von Gegenständen die Bedingung erfüllt, dass, wenn einer der beiden Gegenstände den jeweils anderen Gegenstand verursacht, er dem anderen Gegenstand zeitlich vorausgeht.

Man sieht hier schon, dass der Ausdruck »Gegenstand« jedes Ding gleich welcher Art einfängt – d. h. jedes Ding, ob es sich dabei nun um eine Person, ein Ereignis, einen Zustand, eine Zahl, ein Loch im Käse oder eine Billardkugel handelt. Die umgangssprachlichen Entsprechungen der genannten Sätze kommen zwar ohne einen solch allgemeinen Ausdruck aus, aber das heißt natürlich noch nicht, dass man diese Entsprechungen verstehen kann, ohne eine Vorstellung von Gegenständen als Dingen gleich welcher Art zu haben:

Alles ist gottgewollt.
Jede Ursache geht dem, was sie verursacht, zeitlich voraus.

Ein Verständnis des ersten Satzes kommt ohne eine solche Vorstellung kaum aus. Beim zweiten Satz scheint das anders zu sein. Es scheint nur um Dinge zu gehen, die etwas verursachen können. Ebenso scheint die umgangssprachliche Version unseres Allergiker-Satzes nur von Personen zu handeln. Allerdings ist dies bloß ein oberflächlicher Eindruck. Denn wie wir noch sehen werden, sagt der Allergiker-Satz auch etwas über Dinge aus, die keine Allergiker sind, zum Beispiel über Zahlen oder Hühnersuppen (nämlich, dass ihnen keinesfalls bei Pollenflug die Augen jucken). Und der Satz über Kausalität sagt ebenso etwas über Dinge aus, die einander zeitlich nicht vorausgehen, zum Beispiel über zwei Primzahlen oder zwei Tonhöhen (nämlich, dass sie einander keinesfalls verursachen).

Sofern sich alle Sätze, in denen die umgangssprachlichen Wörter »alle« und »jeder« vorkommen, in Sätze übersetzen lassen, in denen an ihrer Stelle Allquantoren wie »Für alle *x* gilt« oder »Für jedes *y* gilt« vorkommen, haben wir damit zugleich erklärt, welche Rolle diese umgangssprachlichen Wörter spielen. Wir können nun bei unseren Bemühungen, umgangssprachliche Sätze prädikatenlogisch zu analysieren, noch ein bisschen weitergehen und den Satz

Für jedes x gilt: Wenn x bei Pollenflug die Augen jucken, dann ist x Allergiker.

schrittweise formalisieren. Zunächst ersetzen wir »wenn …, dann —« durch das Materiale Konditional. Dies hätten wir schon gleich zu Beginn tun können, noch bevor wir den Namen »Paul« durch »x« ersetzten. Wir erhalten also:

Für jedes x gilt: x jucken bei Pollenflug die Augen $\rightarrow$ x ist Allergiker.

Anschließend ersetzen wir den Allquantor »Für jedes x gilt« durch sein **formalsprachliches Äquivalent** »$\forall x$« und schließen den Rest wie folgt in Klammern ein:

$\forall x$(x jucken bei Pollenflug die Augen $\rightarrow$ x ist Allergiker).

Wir hatten ja bereits in Bezug auf die in Kapitel 15.1 genannten (1)-(2)-(3)-Argumente und (4)-(5)-(6)-Argumente festgestellt, dass die spezifische Bedeutung der in ihren Prämissen und Konklusionen jeweils vorkommenden Prädikate für die Frage ihrer Gültigkeit unerheblich ist. Darum können wir zum Zweck der Rekonstruktion prädikatenlogisch gültiger Argumente umgangssprachliche Prädikate getrost durch Prädikatbuchstaben ersetzen. Wie bereits gesagt, wählen wir zu diesem Zweck die Buchstaben »F«, »G«, »H«, etc. So wie bei der Formalisierung aussagenlogischer Verknüpfungen auch kommt es dabei entscheidend darauf an, *verschiedene Prädikate* durch *verschiedene Prädikatbuchstaben* zu ersetzen. Ansonsten verfälschte man die logische Struktur, die die fraglichen Prämissen und Konklusionen tatsächlich aufweisen. Um im Zuge der Formalisierung keine relevanten Strukturmerkmale unter den Tisch fallen zu lassen, sollte man umgekehrt *dieselben Prädikate* durch *dieselben Prädikatbuchstaben* ersetzen.

Wir ersetzen nun »x jucken bei Pollenflug die Augen« durch »Fx« und »x ist Allergiker« durch »Gx«. Demnach ergibt sich:

$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$

Dieser formalsprachliche Ausdruck gibt die prädikatenlogische Form unseres Allergiker-Satzes an. Die vollständigen Formalisierungen der umgangssprachlichen Sätze

Alles ist gottgewollt.
Jede Ursache geht dem, was sie verursacht, zeitlich voraus.

sehen dementsprechend wie folgt aus. Sei »Fx« die Formalisierung von »x ist gottgewollt«, dann kann man die prädikatenlogische Form des ersten dieser beiden Sätze mit Hilfe des formalsprachlichen Satzes

$\forall x\mathrm{F}x$

angeben. Ersetzen wir »x verursacht y« durch »Gxy« und »x geht y zeitlich voraus« durch »Hxy«, dann erhalten wir die folgende Formalisierung, die die logische Form des Kausalitätssatzes anzeigt:

$\forall x\forall y(\mathrm{G}xy \rightarrow \mathrm{H}xy)$

Hintereinandergeschaltete Allquantoren liest man so: »Für alle x und für alle y gilt« bzw. »Für jedes x und für jedes y gilt«.

Wenn zur Vervollständigung eines offenen Satzes mehrere Quantoren erforderlich sind, werden wir – wie hier geschehen – *pro Quantor stets eine jeweils verschiedene Variable* wählen. Den Nutzen dieser Vorgehensweise macht man sich leicht klar, wenn man sich den folgenden Formalisierungsvorschlag ansieht: »$\forall x \forall x(\mathrm{G}xx \rightarrow \mathrm{H}xx)$«.

Sätze, die mit einem Allquantor beginnen oder durch Sätze übersetzt werden, die mit einem Allquantor beginnen, heißen allquantifizierte Sätze oder **Allsätze**. Manchmal werden sie auch universelle Sätze, Allaussagen, Verallgemeinerungen oder Generalisierungen genannt.

Auf unserer Liste mit klärungsbedürftigen prädikatenlogisch relevanten Ausdrücken stehen noch die Ausdrücke »niemand«, »nichts« und »kein« sowie die Ausdrücke »jemand«, »mindestens eine« und »einige«. Betrachten wir zunächst die ersten drei Ausdrücke und fragen uns, was ein Satz besagt, der wie der folgende das Wort »nichts« enthält:

Nichts funktioniert.

Der Ausdruck »nichts« ist ebensowenig ein Name wie »niemand«. Wenn »nichts« nämlich ein Name für etwas wäre – ein Name für das Nichts – dann müsste es ja intuitiv korrekt sein, aus der Tatsache, dass ich nichts zum Geburtstag bekomme, zu folgern, dass ich etwas zum Geburtstag bekomme. Aber diese Folgerung ist im Gegenteil völlig absurd. Welchen Beitrag das Wort »nichts« leistet, lässt sich wie im Fall von »jeder« und »alle« nur festmachen, wenn wir sein Vorkommen im Satzzusammenhang betrachten. Der Satz »Nichts funktioniert« besagt nun dasselbe wie der Satz:

Für alle x gilt: Es ist nicht der Fall, dass x funktioniert.

Dieser Satz geht aus dem offenen Satz

Es ist nicht der Fall, dass x funktioniert.

hervor, wenn man die in ihm vorkommende ungebundene Variable durch den Allquantor »Für alle x gilt« bindet. Was immer also das Wort »nichts« zur Bedeutung von Sätzen beiträgt, in denen es vorkommt, wir können diese Sätze in bedeutungsgleiche Sätze übersetzen, in denen das Wort »nichts« nicht mehr vorkommt. Die prädikatenlogische Form des Satzes »Nichts funktioniert« wird also durch die folgende prädikatenlogische Formel zum Ausdruck gebracht:

$\forall x{\sim}\mathrm{F}x$

Ganz entsprechend analysieren wir den Satz

Niemand liebt mich.

zunächst als

Für alle x gilt: Es ist nicht der Fall, dass x mich liebt.

und geben dann seine prädikatenlogische Form so an:

$\forall x{\sim}\mathrm{F}xm$

Hier ist »m« ein Name für den Sprecher. Betrachten wir als nächstes die beiden Sätze

Kein Kollege kommt zur Konferenz.
Kein Mensch ist eine Insel.

Diese Sätze können jeweils wie folgt analysiert werden:

Für alle x gilt: Wenn x ein Kollege ist, dann ist es nicht der Fall, dass x zur Konferenz kommt.
Für alle x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist es nicht der Fall, dass x eine Insel ist.

Ihre prädikatenlogische Form wird demnach durch die nachstehende Formel zum Ausdruck gebracht:

$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \sim \mathrm{G}x)$

Während also ein Satz wie

Niemand kommt zur Konferenz.

besagt, dass alle Gegenstände die Eigenschaft haben, nicht zur Konferenz zu kommen, besagt der Satz

Kein Kollege kommt zur Konferenz.

nur soviel, dass alle Gegenstände die Eigenschaft haben, dass sie dann nicht zur Konferenz kommen, *wenn* sie Kollegen sind. Kurz: Dieser Satz besagt, dass alle Kollegen – und nicht etwa, dass alle Gegenstände – die Eigenschaft haben, nicht zur Konferenz zu kommen. Die Wahrheit von

Kein Kollege kommt zur Konferenz.

ist ja durchaus damit verträglich, dass einige Leute – zum Beispiel Studenten – zur Konferenz kommen. Es kommen eben bloß keine Kollegen. Demgegenüber schließt die Wahrheit von

Niemand kommt zur Konferenz.

aus, dass irgendjemand zur Konferenz kommt. Dieser Unterschied spiegelt sich in der prädikatenlogischen Form beider Sätze wider:

Kein Kollege kommt zur Konferenz.	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \sim \mathrm{G}x)$
Niemand kommt zur Konferenz.	$\forall x \sim \mathrm{G}x$

Auch die Wörter »niemand«, »kein« und »keine« sind also – wie das Wort »nichts« – strenggenommen entbehrlich: Was wir mit ihrer Hilfe ausdrücken können, können wir ebensogut ohne ihre Hilfe, dafür aber mit Hilfe allquantifizierter Sätze ausdrücken. Trotzdem sind diese Ausdrücke natürlich prädikatenlogisch relevant, insofern sie, wenn sie vorkommen, eine wichtige logische Funktion erfüllen.

Auf unserer Liste prädikatenlogisch relevanter Ausdrücke stehen noch die Wörter »einige«, »mindestens einer« und »jemand«. Wie können wir die Funktionsweise dieser Wörter im Satzzusammenhang erklären? Betrachten wir zu diesem Zweck die beiden Beispielsätze

Mindestens einer möchte Kaffee.
Jemand fängt an zu singen.

Diese Sätze kann man sich aus offenen Sätzen konstruiert denken. Die einschlägigen offenen Sätze sind:

x möchte Kaffee.
x fängt an zu singen.

Was unsere Beispielsätze besagen, kann man nun so reformulieren:

Es gibt mindestens ein x, so dass gilt: x möchte Kaffee.
Es gibt mindestens ein x, so dass gilt: x fängt an zu singen.

Hier wird die Variable des betreffenden offenen Satzes jeweils durch den Quantor »Es gibt mindestens ein x, so dass gilt« gebunden. Dieser Quantor heißt **Existenzquantor**. (Warum dieser Quantor so heißt, macht man sich leicht klar, wenn man bedenkt, dass »es gibt ein x« und »es existiert ein x« austauschbare Formulierungen sind.) Der Existenzquantor wird in der logischen Formalsprache durch sein **formalsprachliches Äquivalent** »$\exists x$« ausgedrückt. Demnach haben unsere beiden Beispielsätze die folgende prädikatenlogische Form:

$\exists x \mathrm{F}x$

Hier muss man sich wieder den Buchstaben als Platzhalter für die jeweiligen Prädikate denken – in unserem Fall also jeweils für »möchte Kaffee« und »fängt an zu singen«.

Sätze, die mit einem Existenzquantor beginnen oder durch Sätze übersetzt werden, die mit einem Existenzquantor beginnen, heißen existenzquantifizierte Sätze oder schlicht **Existenzsätze**. Sätze, die mit einem Existenzquantor beginnen, kann man in zwei Teile zerlegen, in den Existenzquantor und einen offenen Satz, dessen Variablen durch den Existenzquantor gebunden werden. Umgekehrt kann man solche Sätze konstruieren, indem man die bis dahin ungebundenen Variablen eines offenen Satzes durch Vorschalten des Existenzquantors bindet. Der Existenzquantor erfüllt dabei die folgende Funktion: Der Satz, der entsteht, wenn man die Variablen eines offenen Satzes mit Hilfe eines Existenzquantors bindet, besagt, dass es mindestens einen Gegenstand gibt, der den offenen Satz erfüllt.

Im Vergleich zu den beiden eben behandelten Sätzen hat der Satz

Einige Frösche haben gelbe Hälse.

eine komplexere prädikatenlogische Struktur – und das, obwohl auch dieser Satz ein Existenzsatz ist. Er besagt nämlich soviel wie der Satz

Es gibt mindestens ein x, so dass gilt: x ist ein Frosch, und x hat einen gelben Hals.

Seine prädikatenlogische Form wird demzufolge durch die nachstehende prädikatenlogische Formel wiedergegeben:

$\exists x(\mathrm{F}x \ \& \ \mathrm{G}x)$

Dieselbe Form weisen auch Sätze auf, in denen an prominenter Stelle ein *unbestimmter Artikel* vorkommt, z. B.:

Ein Auto fährt vorbei.
Eine Frau überquert die Straße.
Ein Obdachloser singt.

An dieser Stelle soll noch kurz auf eine kleine Schwierigkeit eingegangen werden, die mit der Übersetzung umgangssprachlicher Sätze zu tun hat, in denen das Wort »jemand« vorkommt, und die uns dazu nötigt, das bisher Gesagte mit Vorsicht zu genießen. Nicht immer wird die Bedeutung solcher Vorkommnisse nämlich mit Hilfe existenzquantifizierter Sätze angemessen zum Ausdruck gebracht. Oft sagen wir Dinge wie:

Wenn jemand betrunken Auto fährt, dann riskiert er sein Leben.

Was wir hiermit meinen, wird in der Formalsprache am besten durch einen Allsatz wiedergegeben:

$\forall x(x$ fährt betrunken Auto $\rightarrow x$ riskiert sein Leben).

Demgegenüber bringt der formalsprachliche Satz

$\exists x(x$ fährt betrunken Auto) $\rightarrow \exists y(y$ riskiert sein Leben).

etwas ganz anderes zum Ausdruck, nämlich:

Wenn jemand betrunken Auto fährt, dann riskiert jemand sein Leben.

Einen Grund, diesen Satz für wahr zu halten und den erstgenannten für falsch, könnte beispielsweise die folgende Überlegung liefern: »Ein Besoffener, der angeschnallt und in einem Auto mit Überrollbügel durch die Straßen kreuzt, mag keinen Grund haben, um sein Leben zu fürchten. Anders sieht es da schon mit den Fußgängern aus, die seinen Weg kreuzen.«

Der Unterschied zwischen den beiden genannten umgangssprachlichen »wenn–dann«-Konstruktionen wird dadurch markiert, dass im Nachsatz des ersten Satzes das Pronomen »er« steht, wo im Nachsatz des zweiten Satzes ein weiteres Mal das Wort »jemand« vorkommt. Schon deshalb kommt das genannte Konditional nicht als angemessene Übersetzung unseres ursprünglichen Satzes in Frage. Das Pronomen bezieht sich nämlich auf eine Person, von der bereits die Rede war. Aber auch der Existenzsatz

$\exists x(x$ fährt betrunken Auto $\rightarrow x$ riskiert sein Leben).

drückt nicht das aus, was wir sagen wollten, als wir sagten, wenn jemand betrunken Auto fahre, riskiere er sein Leben. Denn die Wahrheit des eben angeführten Existenzsatzes ist ja durchaus damit verträglich, dass es auch noch eine andere Person gibt, die, obwohl sie betrunken Auto fährt, ihr Leben nicht riskiert. (In der Tat ist der eben angeführte Existenzsatz bereits dann wahr, wenn es niemanden gibt, der Auto fährt!) Was wir im Unterschied dazu behaupten wollten, war ein allgemeiner Zusammenhang zwischen Trunkenheit am Steuer und Lebensgefahr – ein Zusammenhang, der durch einen Allsatz ausgedrückt wird. Nicht alle Vorkommnisse von »jemand« verlangen also nach der Übersetzung durch Existenzsätze. Dasselbe gilt auch für Substantive mit unbestimmtem Artikel (»Wenn ein Baby schreit, hat es Hunger oder Schmerzen«).

Trotz dieser einschränkenden Überlegungen haben wir in diesem Kapitel ein Instrumentarium an die Hand bekommen, das es uns erlaubt, wenigstens die prädikatenlogische Struktur der in den Kapiteln 15.1 und 15.3 genannten Argumente anzugeben:

Kein Kollege kommt zur Konferenz.	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$
Otto ist ein Kollege.	Fm
Otto kommt nicht zur Konferenz.	${\sim}Gm$
Jeder Sünder wird vom Blitz getroffen.	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$
Kein Blitz trifft George W. Bush.	${\sim}Gm$
George W. Bush ist kein Sünder.	${\sim}Fm$
Der letzte Gast möchte Kaffee.	Fm
Mindestens einer möchte Kaffee.	$\exists xFx$
Alle werden langsam dicker.	$\forall xFx$
Sven wird langsam dicker.	Fm
Nichts funktioniert.	$\forall x{\sim}Fx$
Mein Gehirn funktioniert nicht.	${\sim}Fm$
Niemand liebt mich.	$\forall x{\sim}Fxm$
Ich liebe mich nicht.	${\sim}Fmm$
Alle Frösche sind Amphibien.	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$
Einige Frösche haben gelbe Hälse.	$\exists x(Fx \,\&\, Hx)$
Einige Amphibien haben gelbe Hälse.	$\exists x(Gx \,\&\, Hx)$
Alle Frösche sind Amphibien.	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$
Alle Amphibien schlüpfen aus Eiern.	$\forall x(Gx \rightarrow Hx)$
Alle Frösche schlüpfen aus Eiern.	$\forall x(Fx \rightarrow Hx)$
Jemand fängt an zu singen.	$\exists xFx$
Jeder, der singt, hört damit irgendwann auf.	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$
Jemand hört irgendwann zu singen auf.	$\exists xGx$

Um die prädikatenlogische Gültigkeit dieser Argumente zu demonstrieren, benötigen wir dementsprechend prädikatenlogische Regeln, die es uns unter anderem erlauben, die nachstehenden Folgebeziehungen zu beweisen:

$\forall x(Fx \rightarrow Gx), Fm \vdash Gm$
$\forall x(Fx \rightarrow Gx), {\sim}Gm \vdash {\sim}Fm$
$Fm \vdash \exists xFx$
$\forall xFx \vdash Fm$
$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \,\&\, Hx) \vdash \exists x(Gx \,\&\, Hx)$
$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow Hx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Hx)$
$\exists xFx, \forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists xGx$

In den Kapiteln 17 und 18 werden wir vier solcher prädikatenlogischen Regeln kennenlernen. Diese Regeln sind die einzigen, die wir neben den aussagenlogischen Regeln für die Prädikatenlogik brauchen. Mit ihrer Hilfe lassen sich weitere Folgebeziehungen beweisen. Es steht uns dann frei, manche dieser bewiesenen Folgebeziehungen in (abgeleitete) Schlussregeln umzumünzen, die zusammen mit den vier Grundregeln ein praktikables prädikatenlogisches Regelwerk ergeben. Bevor wir uns den vier Grundregeln zuwenden, müssen wir allerdings noch ein paar Überlegungen zur Rede über Gegenstände anstellen. Wie sich nämlich später zeigt, sind diese Überlegungen für ein angemessenes Verständnis der Grundregeln unabdingbar.

→ Übung H

16. Die Rede von beliebigen, besonderen und typischen Gegenständen

Stellen wir uns einen Sack mit Kartoffeln vor, aus dem wir eine Kartoffel herausgreifen und auf den Küchentisch legen. Was wir uns da gerade vorgestellt haben, ist, dass wir aus einem Sack mit Kartoffeln *irgendeine beliebige* Kartoffel herausgreifen und auf den Küchentisch legen. Dieses Szenario ist von solchen gedachten Fällen zu unterscheiden, in denen wir *jede* Kartoffel herausgreifen und auf den Küchentisch legen. Aber unser Szenario unterscheidet sich ebenfalls von gedachten Fällen, in denen wir eine *besondere* Kartoffel herausgreifen und auf den Küchentisch legen. Wenn wir uns von der dicksten Kartoffel Brandenburgs vorstellten, wir griffen sie aus dem Sack, dann stellten wir uns nicht länger vor, wir griffen irgendeine beliebige Kartoffel aus dem Sack. Von der dicksten Kartoffel Brandenburgs zu reden, heißt nicht, von irgendeiner beliebigen Kartoffel zu reden, sondern von einer besonderen.

Wenn wir uns vorstellen, wir griffen irgendeine beliebige Kartoffel aus dem Sack, dann lässt sich die Frage, ob die Kartoffel, die wir herausgreifen, die dickste Kartoffel Brandenburgs ist, ebensowenig beantworten wie die Frage, ob diese Kartoffel nun einen grünlichen Schimmer hat, oder die Frage, ob sie von einer Bäuerin oder einem Bauern aufgelesen wurde. Diese Fragen lassen sich nicht bloß deshalb nicht beantworten, weil wir zu wenig wissen, sondern weil unser Szenario überhaupt gar keine Annahmen enthält, die eine eindeutige Antwort auf diese Fragen festlegten. In dem entworfenen Szenario, in dem wir irgendeine beliebige Kartoffel aus dem Sack herausgreifen, ist bezüglich des Gegenstands, den wir herausgreifen, bislang nicht mehr und nicht weniger festgelegt, als dass es sich jedenfalls um eine Kartoffel aus dem Sack handelt. Was aus unserem Szenario über den Gegenstand, den wir herausgreifen, folgt, geht also nicht über das hinaus, was aus seiner Eigenschaft, eine Kartoffel aus dem Sack zu sein, folgt – abgesehen natürlich davon, dass wir diesen Gegenstand auch noch herausgreifen und auf den Küchentisch legen.

Wenn wir uns hier und jetzt vorstellen, wir griffen eine beliebige Kartoffel aus dem Sack, und nachher tatsächlich in die Küche gehen und aus dem dort befindlichen Sack eine mittelgroße Kartoffel herausgreifen, werden wir nicht sagen: »Jetzt ist ein Fall eingetreten, der zwar so ähnlich ist wie der, den wir uns vorhin vorgestellt haben, der sich aber dennoch aufgrund der Größe der Kartoffel von ihm unterscheidet«. Im Gegenteil: Der Fall, den wir uns hier und jetzt vorstellen, tritt ein, wenn wir irgendeine beliebige Kartoffel aus dem Sack herausgreifen, gleichgültig von welcher Größe sie tatsächlich ist.

Natürlich können wir das Szenario schrittweise mit mehr Details füllen, indem wir weitere Annahmen über die Kartoffel machen, die wir herausgreifen. So können wir uns vorstellen, wir griffen eine beliebige Kartoffel aus dem Sack, und uns dann noch weitergehend vorstellen, diese Kartoffel wöge zweieinhalb Kilo und habe die Eigenschaft, die dickste Kartoffel Brandenburgs zu sein. Das ist immer noch etwas anderes, als sich *von der Kartoffel, die diese Eigenschaft tatsächlich hat* – d. h. von der dicksten Kartoffel Brandenburgs – vorzustellen, wir griffen sie aus dem Sack. Wenn wir uns die dickste Kartoffel Brandenburgs vorstellen, dann stellen wir uns eine besondere Kartoffel vor und keine x-beliebige. In demselben Sinne bedeutet, mir vorzustellen, ich träfe irgendeinen beliebigen Kollegen, etwas anderes als mir von einem Kollegen – zum Beispiel Eduardo – vorzustellen, ich träfe ihn.

So weit zunächst zur Unterscheidung zwischen der Rede von beliebigen oder, wie man auch sagen kann, **beliebig gewählten Gegenständen** und der Rede von **besonderen Gegenständen**. Gehen wir wieder an den Anfang zurück. Wir stellen uns vor, wir griffen eine beliebige Kartoffel aus dem Sack und legten sie auf den Küchentisch. Um unser Szenario mit mehr Details zu füllen, stellen wir uns weitergehend vor, wir griffen zwar irgendeine beliebige, jedenfalls aber eine grünlich schimmernde Kartoffel aus dem Sack heraus. Dass sich eine solche grünlich schimmernde Kartoffel in dem Sack befindet, haben wir in unserem Szenario nicht ausdrücklich ausgeschlossen; und insoweit sind derlei Zusatzannahmen auch ganz in Ordnung und untergraben noch nicht bereits die Vorstellung, die Kartoffel sei ansonsten beliebig gewählt. Aber was wir nicht länger voraussetzen dürfen, ist, dass der durch solche Zusatzannahmen näher charakterisierte Gegenstand eine *typische* Kartoffel aus dem Sack ist. Natürlich ist irgendeine beliebige, jedenfalls aber grünlich schimmernde Kartoffel ein typisches Exemplar grünlich schimmernder Kartoffeln. Aber so ist freilich auch irgendeine beliebig gewählte, jedenfalls aber tropfenförmige, mit Silberfarbe bemalte und von einem Neunjährigen aufgelesene Kartoffel ein typisches Exemplar tropfenförmiger, mit Silberfarbe bemalter und von Neunjährigen aufgelesener Kartoffeln. Was hier als typisches Exemplar gilt, ist eben relativ zu der charakterisierten Art von Gegenstand. Als wir unser ursprüngliches Szenario entwarfen, stellten wir uns eben einen Sack mit Kartoffeln vor, und nicht etwa einen Sack mit grünlich schimmernden Kartoffeln oder einen Sack mit tropfenförmigen, silbern bemalten und von Neunjährigen aufgelesenen Kartoffeln.

Wenn wir uns also eine Art von Gegenständen vorstellen und uns dabei irgendein beliebiges Exemplar dieser Art denken – nennen wir es a – dann gilt a als **ein für diese Art typisches Exemplar**, solange wir keine Zusatzannahmen über a machen – also keine Annahmen, die über die Annahme, dass a Gegenstand der betreffenden Art ist, und deren logische Folgen hinausgehen. Nicht jede Eigenschaft eines beliebig gewählten Exemplars einer Art ist nämlich auch eine für Exemplare dieser Art typische Eigenschaft.

Nachdem wir uns klar gemacht haben, dass zwischen der Rede von beliebig gewählten Gegenständen im Allgemeinen und der Rede von typischen Gegenständen (oder Exemplaren) im Speziellen zu unterscheiden ist, soll jetzt noch etwas genauer illustriert werden, wie wir über beliebig gewählte Gegenstände reden.

Sich irgendeine beliebige Kartoffel vorzustellen, die über ihr Kartoffelsein hinaus auch noch andere Eigenschaften hat (z. B. die Eigenschaft, grün zu schimmern), bedeutet aufgrund dieser zusätzlichen Eigenschaften allein noch nicht bereits, sich eine besondere Kartoffel vorzustellen (z. B. die Kartoffel, die mir mein Nachbar gestern gezeigt hat, oder die tatsächlich dickste Kartoffel Brandenburgs). Wir können uns also irgendeine beliebige Kartoffel denken und anschließend weitere Annahmen über die in dieser Weise beliebig gewählte Kartoffel machen. Wir denken uns dann immer noch eine beliebige, keine besondere Kartoffel. Sobald wir dies tun, müssen wir freilich sicherstellen, dass wir uns fortan auf just diejenige Kartoffel beziehen, die wir ursprünglich beliebig gewählt haben – also auf *dieselbe* beliebig gewählte Kartoffel. Wenn wir zusätzlich annehmen, dass die beliebige Kartoffel, die wir aus dem Sack herausgreifen und auf den Küchentisch legen, von uns geschält wird, dann darf diese Zusatzannahme nun nicht lauten: »Und dann wird irgendeine beliebige Kartoffel von uns geschält«. Denn diese Annahme verriete gar nichts darüber, ob die Kartoffel, die wir herausgreifen und auf den Küchentisch legen, *dieselbe* ist wie die, die dann von uns geschält wird. Wir wollten ja aber zusätzlich annehmen, dass es dieselbe beliebig gewählte Kartoffel ist, die von uns auch noch geschält wird, und nicht etwa irgendeine beliebige andere. Diese Annahme betrifft einen **fest, aber beliebig gewählten Gegenstand**. (Diese Rede von »fest« hat offensichtlich Anklänge an unser Reden davon, jemand hielte etwas gedanklich fest.)

Um von denselben beliebig gewählten Gegenständen zu sprechen – zum Beispiel von irgendeiner beliebigen, aber doch derselben Kartoffel oder von irgendeinem, aber doch demselben Kollegen – werden wir von **besonderen Individualausdrücken** Gebrauch machen müssen. Eigennamen oder definite Kennzeichnungen im üblichen Sinn taugen für diese Zwecke nämlich nicht. Denn so, wie Eigennamen oder definite Kennzeichnungen gebraucht werden, bezeichnen sie immer besondere Gegenstände, nicht beliebige. So bezeichnet »Eduardo« einen besonderen und nicht etwa einen beliebigen Kollegen. Ebenso bezeichnet die Kennzeichnung »die (tatsächlich) dickste Kartoffel Brandenburgs« eine besondere und nicht etwa eine beliebige Kartoffel (nicht einmal eine beliebige, jedenfalls aber mehr als zwei Kilo schwere Kartoffel).

Bevor wir die spezielle Art von Individualausdrücken einführen, die wir benötigen, um uns erfolgreich auf fest, aber beliebig gewählte Gegenstände zu beziehen, stellen wir folgende Überlegung an:

> Eine beliebige Kartoffel ist ein beliebiger Gegenstand des gesamten Redebereichs, der jedenfalls eine Kartoffel ist.

Was hier für Kartoffeln gilt, gilt entsprechend für jede Art von Gegenstand. Der gesamte Redebereich ist hierbei als der Bereich all derjenigen Gegenstände zu verstehen, die den offenen Satz »x ist mit x identisch« erfüllen. (Da der Satz »$\forall x$(x ist mit x identisch)« wahr ist, sind also alle Gegenstände Gegenstände des gesamten Redebereichs.) Die Rede von irgendeiner beliebigen Kartoffel lässt sich dieser Überlegung zufolge durch die Rede von irgendeinem beliebigen Gegenstand des gesamten Redebereichs, der jedenfalls eine Kartoffel ist, systematisch ersetzen. Um anzuzeigen, dass wir über dieselben beliebigen Gegenstände bestimmter Art sprechen, bedürfen wir also singulärer Terme, die es uns erlauben, uns auf fest, aber beliebig gewählte Gegenstände des gesamten Redebereichs zu beziehen. Wir reservieren für diese Zwecke die (kursiv gesetzten) Kleinbuchstaben »*a*«, »*b*«, »*c*« und »*d*«. Sei »F« das Prädikat »ist eine Kartoffel« und »G« das Prädikat »ist ein Kollege«, dann kürzen »F*a*« und »G*b*« jeweils einen der folgenden beiden Sätze ab:

Der beliebig gewählte Gegenstand *a* ist eine Kartoffel.
Der beliebig gewählte Gegenstand *b* ist ein Kollege.

Individualausdrücke wie »*a*« und »*b*« sind also von den gewöhnlichen Namen »*m*«, »*n*« und »*o*« zu unterscheiden. Denn »*m*«, »*n*« und »*o*« sind stets Namen für besondere Gegenstände. Auf welche Gegenstände sie sich beziehen – ihre Referenz – steht bereits fest und ist keine Frage der Wahl mehr. Die Wahrheit der Sätze »F*m*« und »G*n*« hängt demnach allein davon ab, ob Gegenstand *m* tatsächlich eine Kartoffel und Gegenstand *n* tatsächlich ein Kollege ist. Anders als die Wahrheit der Sätze »F*a*« und »G*b*« lässt sich die Wahrheit der Sätze »F*m*« und »G*n*« nicht durch geschickte Wahl der Gegenstände, von denen in diesen Sätzen die Rede ist, herstellen.

Wählen wir zur Veranschaulichung des Gesagten noch ein anderes Beispiel – weg von Kartoffeln, hin zur Politik. Wir schreiben das Jahr 2003. Auf dem unten stehenden Foto sind neben dem Bundespräsidenten die einzelnen Mitglieder der Bundesregierung zu sehen:

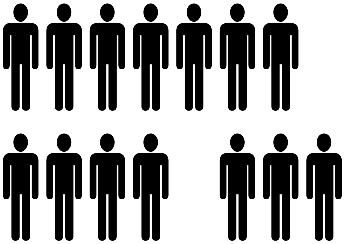
Wir können bestimmte Politiker erkennen, zum Beispiel Joschka Fischer (erste Reihe, vierter von links), Renate Künast (erste Reihe, zweite von rechts) oder Gerhard Schröder (erste Reihe, dritter von rechts).

Wenn wir nun über Joschka Fischer reden oder auf ihn zeigen, dann haben wir einen besonderen Gegenstand (Politiker) im Sinn. An besondere Gegenstände denken wir unter anderem dann, wenn es uns auf ihre individuell verschiedenen Eigenheiten ankommt. Wenn wir diese Gedanken mitteilen, dann verwenden wir

(Quelle: Presse- und Informationsamt der Bundesregierung, Berlin).

Eigennamen (»Joschka Fischer«) oder definite Kennzeichnungen (»der deutsche Außenminister«, »der Herr im grauen Anzug«).

Es kann aber genauso gut sein, dass wir über ein beliebiges Regierungsmitglied reden wollen, gleichgültig, um wen es sich im Einzelfall handelt. Zu diesem Zweck wäre uns auch mit der folgenden Abbildung gedient, in der – bis auf die Position – alle individuellen Unterschiede verloren gehen:



Ein Fotograf, der sich vorab Gedanken darüber macht, welche Aufstellung für das offizielle Foto der Bundesregierung die günstigste ist, mag zum Beispiel wie folgt überlegen:

> Die Regierungsmitglieder stellen sich am besten in zwei Reihen hintereinander auf. In der ersten Reihe stehen sieben Regierungsmitglieder. Zwischen dem vierten von links und dem dritten von rechts bleibt eine Lücke für den Bundespräsidenten. In der zweiten Reihe stehen ebenfalls sieben Regierungsmitglieder, und zwar so, dass mit Ausnahme des Regierungsmitglieds ganz rechts in der ersten Reihe hinter jedem Regierungsmitglied in der ersten Reihe und der Lücke je ein Regierungsmitglied steht.

Hierbei ist die Rede von demjenigen Regierungsmitglied, das ganz rechts in der ersten Reihe steht, die Rede von einem beliebigen Mitglied der Bundesregierung, das jedenfalls als einziges Regierungsmitglied ganz rechts in der ersten Reihe steht. In diesem Zusammenhang spielt es gar keine Rolle, ob dieses Regierungsmitglied nun die Bundesministerin für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung ist oder der Bundesaußenminister.

Wenn das obige Schaubild hingegen in einem Text zur politischen Bildung auftaucht, ist die Positionierung der Regierungsmitglieder vollkommen unerheblich. In einem solchen Text mag demgegenüber folgende Überlegung angestellt werden:

> Das Regierungsmitglied *a* ist wie alle anderen Regierungsmitglieder auch durch eine Wahl legitimiert. Sofern *a* durch eine Wahl legitimiert ist, ist *a* seinen Wählern Rechenschaft schuldig. […] Sofern *a* ein Ministeramt bekleidet, kann sich *a* durch einen seiner beiden Staatssekretäre, *b* oder *c*, vertreten lassen. Fällt *b* wegen Krankheit aus, dann übernimmt *c* die Aufgaben von *b*.

Hier wird an Stelle einer definiten Kennzeichnung (»das Regierungsmitglied in der ersten Reihe ganz rechts«) mit Hilfe des Namens »*a*« auf ein beliebiges Regierungsmitglied Bezug genommen. Unter der Annahme, dass *a* ein Ministeramt bekleidet, werden die Namen »*b*« und »*c*« als Namen für zwei beliebige Staatssekretäre ein und desselben Bundesministeriums, dem *a* als Bundesminister vorsteht, eingeführt. Die Staatssekretäre *b* und *c* vertreten nicht irgendein beliebiges Regierungsmitglied, das ein Ministeramt bekleidet – *b* und *c* sind keine Tausendsassa mit variablem Arbeitsgebiet – vielmehr vertreten *b* und *c* jedenfalls Minister *a*. Wir sehen hier, wie wichtig es ist, über Namen für beliebige Gegenstände zu verfügen, die es einem erlauben, sich auf dieselben beliebig gewählten Gegenstände des Redebereichs zu beziehen.

Wir werden auf die beweistheoretische Relevanz der in diesem Kapitel angestellten Überlegungen in Kürze zurückkommen. Hier ging es vorwiegend darum, uns mit der Rede von fest, aber beliebig gewählten Gegenständen vertraut zu machen und die Funktionsweise von Namen für beliebig gewählte Gegenstände zu erklären. Trotzdem sei an dieser Stelle bereits so viel verraten: Wenn man annimmt, dass ein beliebiger Gegenstand *a* eine bestimmte Eigenschaft hat – sagen wir, die Eigenschaft, grün zu sein – dann hat man bis dahin etwas Wahres angenommen, solange es nur im gesamten Redebereich irgendeinen grünen Gegenstand gibt. Dazu muss man *a* ja nur geschickt so wählen, dass *a* diese Eigenschaft jedenfalls hat. Wenn man hingegen *folgernd zeigt*, dass ein beliebiger Gegenstand *a* eine bestimmte Eigenschaft hat, *ohne* dies zu diesem Zweck bereits von *a* eigens anzunehmen – d.h. ohne *a* extra so zu wählen, dass *a* jedenfalls die betreffende Eigenschaft hat – dann hat man damit etwas geleistet, was nicht schon dadurch gesichert ist, dass es irgendeinen Gegenstand gibt, der die betreffende Eigenschaft hat. Man hat dann nämlich etwas Allgemeines gezeigt, sofern nämlich *a* dann als typischer Gegenstand des Redebereichs gelten kann. Was man in einem solchen Fall gezeigt hat, ist dies: Welchen Gegenstand des Redebereichs man auch immer wählt, er hat die relevante Eigenschaft. Und daraus kann man schließen, dass für jeden Gegenstand des Redebereichs gilt, dass er diese Eigenschaft hat. Dass dies ein legitimer Schluss ist, bezeugt die Gültigkeit prädikatenlogischer Regeln, denen wir uns jetzt zuwenden.

17. Regeln für den Allquantor

In diesem Kapitel werden wir zunächst die Beseitigungsregel für den Allquantor und dann erst die entsprechende Einführungsregel kennenlernen. Im darauffolgenden Kapitel wird es dann um die Einführungs- und Beseitigungsregeln für den Existenzquantor gehen.

Die Beseitigungsregel für den Allquantor »$\forall x$« – die **$\forall$-Beseitigungsregel** – besagt: Wenn man aus einer gegebenen Annahmenmenge logisch folgern kann, dass alle Gegenstände des gesamten Redebereichs die Eigenschaft F besitzen, dann gilt für jeden beliebigen Gegenstand des gesamten Redebereichs, dass man aus derselben Annahmenmenge logisch folgern kann, dass dieser Gegenstand die

Eigenschaft F besitzt. Was für beliebige Gegenstände gilt, gilt dabei freilich auch für besondere Gegenstände. In Kurzform erhalten wir demnach:

∀-Beseitigung	
$\dfrac{\mathbf{X} \vdash \forall x \mathrm{F}x}{\mathbf{X} \vdash \mathrm{F}m}$	$\dfrac{\mathbf{X} \vdash \forall x \mathrm{F}x}{\mathbf{X} \vdash \mathrm{F}a}$

Bei Anwendung dieser Regel wird *jedes* Vorkommnis der vom Allquantor gebundenen Variablen »x« systematisch durch den Term »m« bzw. »a« ersetzt. Für »F« kann hier jedes Prädikat eingesetzt werden, gleichgültig wie komplex es ist. Wir können also festhalten, dass bei Anwendung der ∀-Beseitigungsregel *alle und nur diejenigen* Vorkommnisse von »x« ersetzt werden, die tatsächlich durch den Allquantor gebunden sind.

(Sollte in dem relevanten Prädikat dieselbe Variable – also »x« – noch einmal durch einen anderen Quantor gebunden vorkommen, dann werden diese Vorkommnisse von »x« *nicht* ersetzt. Sonst gibt es nämlich ein Durcheinander, und solch ein Durcheinander gebiert Widersprüche. Setzte man für »F« beispielsweise das komplexe Prädikat »$(x = x)$ & $\exists x$(x ist dick & $x \neq$ Sven)« ein, dann erlaubte einem die obige Regel andernfalls, aus dem zweifellos wahren Satz »$\forall x((x = x)$ & $\exists x$(x ist dick & $x \neq$ Sven))« den offensichtlich falschen Satz »Sven = Sven & $\exists x$(x ist dick & Sven ≠ Sven)« zu folgern. Sofern es Sven gibt, ist Sven mit Sven identisch. Also kann es dann nichts und niemanden Dickes geben, so dass ferner gilt, dass Sven nicht mit Sven identisch ist. Da wir uns ja ohnehin die Praxis zu Eigen gemacht haben, *pro Quantor* (und damit pro Variablenbindung) *je verschiedene Variablen* zu benutzen, sollte es nicht weiter schwierig sein, zu erkennen, welche Vorkommnisse einer Variablen durch welchen Quantor gebunden werden.)

Die Regel der ∀-Beseitigung legitimiert beispielsweise den Schluss von

$\forall x$(x ist ein Mensch → (x ist verliebt v x ist verheiratet)).

auf

Eduardo ist ein Mensch → (Eduardo ist verliebt v Eduardo ist verheiratet).

Wir illustrieren die Art und Weise, in der die Regel der ∀-Beseitigung in unserer Formatvorlage dokumentiert wird, zunächst anhand zweier simpler Argumentschemata:

1	(1)	$\forall x \mathrm{F}x$	Annahme
1	(2)	$\mathrm{F}m$	1, ∀-Beseitigung

1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \to \mathrm{G}x)$	Annahme
1	(2)	$\mathrm{F}m \to \mathrm{G}m$	1, ∀-Beseitigung

Beispiele für Einsetzungsinstanzen dieser Schemata sind:

1	(1)	$\forall x$(x ist eine Zahl v x ist dreidimensional).	Annahme
1	(2)	Eduardo ist eine Zahl v Eduardo ist dreidimensional.	1, $\forall$-Beseitigung

1	(1)	$\forall x$(x ist ein Vulkan $\rightarrow$ x ist gefährlich).	Annahme
1	(2)	Citlaltépetl ist ein Vulkan $\rightarrow$ Citlaltépetl ist gefährlich.	1, $\forall$-Beseitigung

In welchen Kontexten es entscheidend ist, die $\forall$-Beseitigungsregel anzuwenden, um zu Aussagen über einen **beliebig gewählten Gegenstand** zu gelangen, werden wir einsehen, sobald erst einmal die $\forall$-Einführungsregel im Spiel ist. Dieser Regel wenden wir uns nun zu.

Die Einführungsregel für den Allquantor »$\forall x$« – die **$\forall$-Einführungsregel** – besagt: Wenn aus einer gegebenen Annahmenmenge logisch folgt, dass ein aus dem gesamten Redebereich beliebig gewählter Gegenstand die Eigenschaft F hat, dann folgt aus derselben Annahmenmenge ebenfalls logisch, dass *jeder* Gegenstand aus dem gesamten Redebereich diese Eigenschaft hat.

$\forall$-Einführung

$$\frac{\mathbf{X} \vdash \mathbf{F}a}{\mathbf{X} \vdash \forall x\mathbf{F}x}\;*$$

Hier kann für »F« wieder jedes Prädikat eingesetzt werden, ganz gleich wie prädikatenlogisch komplex es auch sein mag. Wieder gilt: *Pro Quantor benutze man je verschiedene Variablen!* Solange man dies im Hinterkopf behält, können wir es jedoch bei der obigen Formulierung der $\forall$-Einführungsregel belassen.

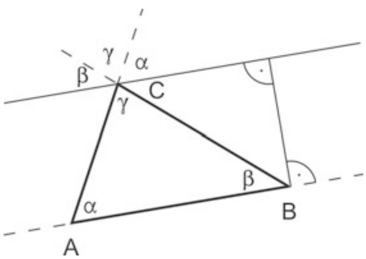
(Sollte in diesem Prädikat die Variable »x« bereits gebunden vorkommen, müssen wir bei Anwendung der $\forall$-Einführungsregel – wie schon bei der Konstruktion von Allsätzen – den Term »m« bzw. »a« systematisch durch eine von »x« verschiedene Variable ersetzen. Sonst gibt es ein heilloses Durcheinander, und zwar eines, das Widersprüche generiert. Wäre »Fa« der wahre Satz »a ist ein Mensch $\rightarrow \exists x$(x ist die Mutter von a)«, dann erlaubte uns die Regel andernfalls, daraus den Satz »$\forall x$(x ist ein Mensch $\rightarrow \exists x$(x ist die Mutter von x)« zu folgern. Aber natürlich mag es Menschen geben, ohne dass irgendjemand die Mutter ihrer selbst ist.)

Die $\forall$-Einführungsregel unterliegt allerdings, wie das Sternchen andeutet, einer wichtigen Einschränkung. Diese Einschränkung lautet:

* Die $\forall$-Einführungsregel ist nur unter der Bedingung anwendbar, dass in der Menge X von Annahmen, von denen Fa abhängt, keine Annahme zu finden ist, in der »a« vorkommt.

Diese Einschränkung wird verständlich, wenn wir uns in Erinnerung rufen, dass ein beliebig gewählter Gegenstand *a* nicht länger als typisches Exemplar des Redebereichs gelten kann, solange in Bezug auf diesen Gegenstand *a* Annahmen gemacht werden, die über die Annahme, dass *a* ein Gegenstand des Redebereichs ist, hinausgehen. Die Einschränkung besagt also, dass die Regel der ∀-Einführung nur anwendbar ist, solange der beliebig gewählte Gegenstand *a* als typisches Exemplar des Redebereichs gelten kann. Mit anderen Worten: Wenn die Wahrheit von »F*a*« gezeigt werden kann, ohne bereits bestimmte Annahmen über *a* zu machen, dann kann damit gezeigt werden, dass auch jeder andere Gegenstand des Redebereichs die Eigenschaft F hat, und die ∀-Einführungsregel greift. Muss man hingegen, um die Wahrheit von »F*a*« zu zeigen, spezifische Annahmen über *a* machen, so ist nicht länger gewährleistet, dass, wenn »F*a*« wahr ist, dann auch jeder andere Gegenstand des Redebereichs die Eigenschaft F hat, und man darf die ∀-Einführungsregel nicht anwenden.

Ein Beispiel: Wenn Euklid beweist, dass alle Dreiecke die Eigenschaft haben, dass die Summe ihrer Winkel 180° beträgt, dann beweist er dies, indem er zeigt, dass ein beliebiges Dreieck ABC diese Eigenschaft hat:



Die Zeichnung, die wir hier zu diesem Zweck verwenden, hätte ebensogut ein gleichseitiges Dreieck oder ein Dreieck mit einem spitzeren γ-Winkel zeigen können. Auf diese Unterschiede kommt es nämlich gar nicht an. Das Dreieck ABC ist ein beliebig gewähltes Dreieck. Solange es nur ein Dreieck ist, sind alle weiteren Eigenschaften dieses Dreiecks für die Zwecke des euklidischen Beweises unerheblich. Und nur weil ABC ein beliebig gewähltes Dreieck ist, über das keine weitergehenden Annahmen gemacht werden müssen – ABC in diesem Maße also ein *typisches* Dreieck ist – kann der Nachweis, dass die Summe seiner Winkel 180° beträgt, als Beweis dafür dienen, dass dies für *jedes* Dreieck gilt.

Im Unterschied hierzu kann der Nachweis, dass die Strecke AB größer ist als die Strecke BC und die Strecke BC größer ist als die Strecke AC, keinesfalls als Beweis dafür dienen, dass alle Dreiecke die Eigenschaft haben, drei unterschiedlich große Seiten zu besitzen. (Gleichseitige Dreiecke besitzen diese Eigenschaft gerade nicht.) Denn der Nachweis, dass das Dreieck ABC unterschiedlich große Seiten hat, geht von Besonderheiten dieses Dreiecks aus, so dass es unter der Annahme dieser Besonderheiten nicht länger als typisches Dreieck gilt (wenngleich es immer noch ein typisches Exemplar der Menge von Dreiecken mit unterschiedlich großen Seiten ist).

In welche Schwierigkeiten uns die Regel der ∀-Einführung bringen würde, wenn man die genannte Einschränkung nicht machte, verdeutlicht das folgende Beispiel:

1	(1)	$\forall x$(x ist ein Junggeselle $\rightarrow$ x ist männlich).	Annahme
1	(2)	a ist ein Junggeselle $\rightarrow$ a ist männlich.	1, ∀-Beseitigung
3	(3)	a ist ein Junggeselle.	Annahme
1,3	(4)	a ist männlich.	2, 3, MPP
* **1,3**	**(5)**	**$\forall x$(x ist männlich).**	**4, ∀-Einführung** *

Wenn dieses Argument gültig wäre, dann könnte man aus der Annahme, dass alle Junggesellen männlich sind – Zeile (1) – und der Annahme, dass der beliebig gewählte Gegenstand *a* Junggeselle und also männlich ist – Zeile (3) – folgern, dass alle Objekte männlich sind. Das Argument ist aber nicht gültig, weil die Anwendung der ∀-Einführungsregel im Übergang von Zeile (4) zu Zeile (5) gegen die Einschränkung verstößt, der diese Regel unterliegt. Denn die Annahmenmenge, von der Zeile (4) abhängt, enthält eine Annahme – die Annahme aus Zeile (3) – in der »*a*« vorkommt. Diese Zusatzannahme untergräbt die Vorstellung, bei dem beliebig gewählten Gegenstand *a* handele es sich um ein typisches Exemplar des Redebereichs. Ein aus der Menge aller Hunde beliebig gewählter Hund, von dem wir des Weiteren annehmen, er sei dreibeinig, ist kein typischer Hund. Genauso ist ein aus dem gesamten Redebereich beliebig gewählter Gegenstand, von dem wir des Weiteren annehmen, er sei Junggeselle und also männlich, kein typischer Gegenstand des gesamten Redebereichs.

Im Gegensatz zu dem eben genannten ist das folgende Argument prädikatenlogisch gültig:

1	(1)	$\forall x$(x ist ein Philosoph $\rightarrow$ x ist ein Mensch).	Annahme
2	(2)	$\forall x$(x ist ein Mensch $\rightarrow$ x ist sterblich).	Annahme
1	(3)	a ist ein Philosoph $\rightarrow$ a ist ein Mensch.	1, ∀-Beseitigung
2	(4)	a ist ein Mensch $\rightarrow$ a ist sterblich.	2, ∀-Beseitigung
1,2	(5)	a ist ein Philosoph $\rightarrow$ a ist sterblich.	3, 4, Transitivität
1,2	(6)	$\forall x$(x ist ein Philosoph $\rightarrow$ x ist sterblich).	5, ∀-Einführung

Neben den allgemeinen Annahmen in den Zeilen (1) und (2), in denen der Name »*a*« gar nicht vorkommt, wird in Bezug auf den Gegenstand *a* keine Zusatzannahme gemacht, von der die Konklusion in Zeile (6) abhinge. Der beliebig gewählte Gegenstand *a* kann ohne weiteres als typisches Exemplar des gesamten Redebereichs gelten. (Man bedenke, dass die Prämissen in den Zeilen (3) und (4) bereits wahr sind, wenn *a* weder ein Philosoph noch ein Mensch, sondern beispielsweise ein Fisch ist.)

An dem soeben angeführten Beispielargument kann man besonders gut sehen, inwieweit Prädikatenlogik und Aussagenlogik ineinander greifen. Die ∀-Beseitigungsregel gestattet den Übergang von Allsätzen der Form »$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$« zu materialen Konditionalen über beliebige Gegenstände. Diese materialen Konditionale unterliegen wie andere Konditionale auch den Regeln der Aussagenlogik. Unser mit Hilfe aussagenlogischer Regeln geführter Beweis **4** (siehe Kapitel 9.2) erwies, dass materiale Konditionale dem Gesetz der Transitivität unterliegen, dass also gilt:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

Der Beweisschritt, der uns von den Zeilen (3) und (4) zu Zeile (5) führt, ist also aussagenlogisch gültig. Die Anwendung der ∀-Einführungsregel auf Zeile (5) liefert uns dann wieder einen Allsatz, nämlich die Konklusion aus Zeile (6). Indem wir also von Allsätzen zu Sätzen über beliebige Gegenstände hinabsteigen und von Sätzen über beliebige Gegenstände wieder zu Allsätzen hinaufsteigen, können wir uns in der Prädikatenlogik das gesamte aussagenlogische Regelwerk zunutze machen.

Dass es bei diesem Ab- und Aufsteigen mit rechten Dingen zugeht, wird durch die Gültigkeit der ∀-Einführungs- und der ∀-Beseitigungsregel garantiert. Diese Regeln gelten – so wie die Regeln der Aussagenlogik auch – *per definitionem*. Mit anderen Worten: Der Allquantor ist so zu verstehen, dass diese Regeln von ihm gelten; und wer die Gültigkeit dieser Regeln bezweifelt, der ist nur unzulänglich oder gar nicht mit der Bedeutung des Allquantors vertraut. Allerdings können wir nun zum Zwecke der Erläuterung nicht einfach Wahrheitstafeln für Allsätze angeben, wie wir von der Erläuterung aussagenlogischer Regeln gewohnt sind. Es lässt sich also nicht in der gewohnten Weise die Wahrheitsfunktion angeben, die der Allquantor bezeichnet. Dies liegt nicht allein daran, dass Allsätze keine vollwertigen Sätze als Satzteile enthalten. Es liegt vor allem daran, dass es unendlich viele Gegenstände gibt, die den offenen Satz »*x* ist mit *x* identisch« erfüllen und demnach zu dem gehören, was wir den gesamten Redebereich genannt haben. Diese Bemerkungen sind selbst erläuterungsbedürftig.

Stellen wir uns vor, wir schränkten kurzzeitig unseren Redebereich auf drei Gegenstände ein – sagen wir, auf drei Personen. Wir geben diesen drei Personen Namen, nämlich »o_1«, »o_2« und »o_3«. Wir können also sagen, dass im angenommenen Fall o_1, o_2 und o_3 zusammen alle Gegenstände unseres Redebereichs sind. Vergleichen wir nun unter dieser Voraussetzung die beiden folgenden Aussagen

$\forall x$(x ist weiblich)
o_1 ist weiblich & o_2 ist weiblich & o_3 ist weiblich

Unter der gemachten Voraussetzung folgte aus der Wahrheit des Allsatzes logisch nicht mehr als das, was bereits aus der Wahrheit der Konjunktion logisch folgt. Denn dass alle Gegenstände weiblich sind, erfordert laut Voraussetzung nicht mehr, als dass o_1 und o_2 und o_3 weiblich sind. Und umgekehrt folgte alles, was aus der Wahrheit der Konjunktion folgt, auch aus der Wahrheit des Allsatzes. Denn die Wahrheit der Konjunktion folgt jedenfalls aus der Wahrheit des Allsatzes. Die ∀-Beseitigungsregel entspricht demnach ganz der &-Beseitigungsregel, wonach aus der Wahrheit einer Konjunktion die Wahrheit jedes ihrer Konjunkte logisch folgt. Und die ∀-Einführungsregel entspräche unter der besonderen Voraussetzung, die wir hier gemacht haben, ebenfalls der &-Einführungsregel, wonach die Wahrheit einer Konjunktion aus der Wahrheit all ihrer Konjunkte logisch folgt.

Bei einem auf drei Gegenstände beschränkten Redebereich funktionieren Allsätze also wie Konjunktionen mit drei Konjunkten. Entsprechend funktionieren

Allsätze bei einem auf 35 Gegenstände beschränkten Redebereich wie Konjunktionen mit 35 Konjunkten. Und Entsprechendes gilt für jede endliche Anzahl von Gegenständen, auf die der Redebereich eingeschränkt wird. Mit anderen Worten: Solange der Redebereich nur endlich viele Gegenstände umfasst, ließen sich die Wahrheitsbedingungen von Allsätzen im Prinzip als Wahrheitsbedingungen von Konjunktionen auffassen. Im gedachten Fall sähe eine Wahrheitstafel für den Allquantor so aus:

Fo_1	Fo_2	Fo_3	$\forall xFx$	$(Fo_1 \ \& \ Fo_2) \ \& \ Fo_3)$
W	W	W	W	W
W	W	F	F	F
W	F	W	F	F
W	F	F	F	F
F	W	W	F	F
F	W	F	F	F
F	F	W	F	F
F	F	F	F	F

Wenn wir über alle Gegenstände unseres gesamten Redebereichs etwas sagen wollen, können wir nun aber nicht davon ausgehen, dass sich die Wahrheitsbedingungen der Allsätze, die wir hierfür gebrauchen, auf analoge Weise angeben lassen. Denn unser gesamter Redebereich enthält **unendlich viele Gegenstände** – wie man sich leicht klarmacht, wenn man bedenkt, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, über die wir sprechen, wenn wir Mathematik betreiben. Vor diesem Hintergrund sind Allsätze also eher wie unendlich lange Konjunktionen zu verstehen – nämlich wie Konjunktionen mit unendlich vielen Konjunkten. Für solche Konjunktionen lassen sich nun aber keine Wahrheitstafeln angeben – wenigstens nicht von endlichen Wesen, wie wir es sind. Trotzdem können wir natürlich die Wahrheitsbedingungen von Sätzen der prädikatenlogischen Form »$\forall x\mathrm{F}x$« angeben: Ein Satz der Form »$\forall x\mathrm{F}x$« ist wahr, wenn jeder Gegenstand des gesamten Redebereichs den offenen Satz »Fx« erfüllt, und andernfalls falsch.

An dieser Stelle wenden wir uns einigen der Argumente zu, die bereits in Kapitel 15 zur Sprache kamen, deren logische Gültigkeit wir bis dahin aber nicht unter Beweis stellen konnten. Mit Hilfe der ∀-Beseitigungsregel und der ∀-Einführungsregel können wir nun die prädikatenlogische Gültigkeit dieser Argumente demonstrieren:

Kein Kollege kommt zur Konferenz.	1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \sim\mathrm{G}x)$	Annahme
Otto ist ein Kollege.	2	(2)	$\mathrm{F}m$	Annahme
Otto kommt nicht zur Konferenz.	1	(3)	$\mathrm{F}m \rightarrow \sim\mathrm{G}m$	1, ∀-Beseitigung
	1,2	(4)	$\sim\mathrm{G}m$	2, 3, MPP

Jeder Sünder wird vom Blitz getroffen.	1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$	Annahme
Kein Blitz trifft George W. Bush.	2	(2)	$\sim\mathrm{G}m$	Annahme
George W. Bush ist kein Sünder.	1	(3)	$\mathrm{F}m \rightarrow \mathrm{G}m$	1, ∀-Beseitigung
	1,2	(4)	$\sim\mathrm{F}m$	2, 3, MTT

Alle werden langsam dicker.	1	(1)	$\forall x \mathrm{F}x$	Annahme
Sven wird langsam dicker.	1	(2)	$\mathrm{F}m$	1, ∀-Beseitigung
Nichts funktioniert.	1	(1)	$\forall x {\sim} \mathrm{F}x$	Annahme
Mein Gehirn funktioniert nicht.	1	(2)	${\sim}\mathrm{F}m$	1, ∀-Beseitigung
Niemand liebt mich.	1	(1)	$\forall x {\sim} \mathrm{F}xm$	Annahme
Ich liebe mich nicht.	1	(2)	${\sim}\mathrm{F}mm$	1, ∀-Beseitigung
Alle Frösche sind Amphibien.	1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$	Annahme
Alle Amphibien schlüpfen aus Eiern.	2	(2)	$\forall x(\mathrm{G}x \rightarrow \mathrm{H}x)$	Annahme
Alle Frösche schlüpfen aus Eiern.	1	(3)	$\mathrm{F}a \rightarrow \mathrm{G}a$	1, ∀-Beseitigung
	2	(4)	$\mathrm{G}a \rightarrow \mathrm{H}a$	2, ∀-Beseitigung
	1,2	(5)	$\mathrm{F}a \rightarrow \mathrm{H}a$	3, 4, Transitivität
	1,2	(6)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{H}x)$	5, ∀-Einführung

Um die verbleibenden Argumente als gültig zu erweisen, bedürfen wir prädikatenlogischer Regeln für den Existenzquantor. Diese Regeln werden wir im nächsten Kapitel kennenlernen. Bevor wir dies jedoch tun, wollen wir uns einige der bereits bewiesenen Folgebeziehungen, auf die wir mittels der Folge-Einführungsregel künftig zurückgreifen können, noch einmal kurz vergegenwärtigen und sie – der Einfachheit halber – in Form abgeleiteter Regeln darstellen. Um diesen abgeleiteten Regeln Namen zu geben, die wir uns leichter merken können, beziehen wir sie auf die aussagenlogischen Regeln, die wir bei ihrer Ableitung nach Anwendung der ∀-Beseitigungsregel – also nach Abstieg vom Level des Allgemeinen – gebrauchen. Betrachten wir den folgenden Beweis:

Beweis 24: $\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x), \mathrm{F}m \vdash \mathrm{G}m$

1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$	Annahme
2	(2)	$\mathrm{F}m$	Annahme
1	(3)	$\mathrm{F}m \rightarrow \mathrm{G}m$	1, ∀-Beseitigung
1,2	(4)	$\mathrm{G}m$	2, 3, MPP

Bei diesem Beweis gebrauchen wir beispielsweise die aussagenlogischen Regel Modus ponendo ponens:

Modus ponendo ponens

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B}$$

Darum nennen wir die abgeleitete prädikatenlogische Regel **allspezialisierender Modus ponendo ponens**. Der Zusatz »allspezialisierend« erklärt sich daraus, dass bei Anwendung dieser Regel aus den jeweils gemachten Annahmen folgen muss, dass die Antezedensbedingung eines Satzes der Form »$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$« – d. h. also der offene Satz »$\mathrm{F}x$« – von einem speziellen Gegenstand erfüllt ist. Der Kürze halber können wir den Zusatz »allspezialisierend« jedoch künftig auch weglassen und uns auf diese Regel schlicht mit dem Namen »**Modus ponendo ponens**« beziehen, denn es handelt sich dabei ja sozusagen um eine Version des Modus ponendo ponens:

(allspezialisierender) **Modus ponendo ponens**
$\mathbf{X \vdash \forall \mathit{x}(F\mathit{x} \rightarrow G\mathit{x}) \quad Y \vdash F\mathit{m}}$
$\dfrac{}{\mathbf{X, Y \vdash G\mathit{m}}}$

Was hier für Sätze mit gewöhnlichen singulären Termen gilt, gilt natürlich entsprechend auch für Sätze, die Namen für beliebige Gegenstände enthalten. Es gibt also auch eine »*a*«-Version dieser Regel.

Betrachten wir nun den folgenden Beweis:

Beweis 25: $\mathbf{\forall \mathit{x}(F\mathit{x} \rightarrow G\mathit{x}), \sim G\mathit{m} \vdash \sim F\mathit{m}}$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\sim Gm$	Annahme
1	(3)	$Fm \rightarrow Gm$	1, ∀-Beseitigung
1,2	(4)	$\sim Fm$	2, 3, Modus tollendo tollens

Hier machen wir von der aussagenlogischen Regel Modus tollendo tollens Gebrauch:

Modus tollendo tollens
$\mathbf{X \vdash A \rightarrow B \quad Y \vdash \sim B}$
$\dfrac{}{\mathbf{X, Y \vdash \sim A}}$

Entsprechend nennen wir die abgeleitete prädikatenlogische Regel **allspezialisierender Modus tollendo tollens –** oder der Kürze halber schlicht **Modus tollendo tollens**:

(allspezialisierender) **Modus tollendo tollens**
$\mathbf{X \vdash \forall \mathit{x}(F\mathit{x} \rightarrow G\mathit{x}) \quad Y \vdash \sim G\mathit{m}}$
$\dfrac{}{\mathbf{X, Y \vdash \sim F\mathit{m}}}$

(Wieder gibt es hierzu eine Version für die Rede über beliebige Gegenstände.) Es ist eine gute Übung, unter Zuhilfenahme der ∀-Beseitigungsregel und jeweils einer der beiden aussagenlogischen Regeln Modus ponendo tollens und Modus tollendo ponens zunächst die Folgebeziehungen

$\forall x{\sim}(\mathrm{F}x \,\&\, \mathrm{G}x), \mathrm{F}m \vdash {\sim}\mathrm{G}m$
$\forall x(\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}x), {\sim}\mathrm{F}m \vdash \mathrm{G}m$

zu beweisen, um anschließend allspezialisierende prädikatenlogische Versionen der beiden aussagenlogischen Regeln zu formulieren (siehe Beweise **26** und **27** in Kapitel 22). Hier sei nur noch eine **prädikatenlogische Transitivitätsregel** ausdrücklich genannt, die wir in entsprechender Weise erhalten, indem wir von dem folgenden Beweis ausgehen:

Beweis 28: $\forall x(\mathrm{F}x \to \mathrm{G}x), \forall x(\mathrm{G}x \to \mathrm{H}x) \vdash \forall x(\mathrm{F}x \to \mathrm{H}x)$

1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \to \mathrm{G}x)$	Annahme
2	(2)	$\forall x(\mathrm{G}x \to \mathrm{H}x)$	Annahme
1	(3)	$\mathrm{F}a \to \mathrm{G}a$	1, $\forall$-Beseitigung
2	(4)	$\mathrm{G}a \to \mathrm{H}a$	2, $\forall$-Beseitigung
1,2	(5)	$\mathrm{F}a \to \mathrm{H}a$	3, 4, Transitivität
1,2	(6)	$\forall x(\mathrm{F}x \to \mathrm{H}x)$	5, $\forall$-Einführung

Wir können nun das Ergebnis unseres prädikatenlogischen Beweises ebenfalls in die Form einer abgeleiteten Regel gießen, die wir die Regel der **allquantifizierten Transitivität** nennen:

(allquantifizierte) **Transitivität**

$$\frac{\mathrm{X} \vdash \forall x(\mathrm{F}x \to \mathrm{G}x) \qquad \mathrm{Y} \vdash \forall x(\mathrm{G}x \to \mathrm{H}x)}{\mathrm{X}, \mathrm{Y} \vdash \forall x(\mathrm{F}x \to \mathrm{H}x)}$$

Den Zusatz »allquantifiziert« können wir der Kürze halber künftig auch weglassen.

18. Regeln für den Existenzquantor

Im letzten Kapitel haben wir zuerst die ∀-Beseitigungsregel und anschließend die ∀-Einführungsregel kennen gelernt. Dies hatte damit zu tun, dass die ∀-Beseitigungsregel wesentlich einfacher zu verstehen ist als die ∀-Einführungsregel. In diesem Kapitel, in dem wir die Grundregeln für den Existenzquantor kennen lernen, werden wir in umgekehrter Reihenfolge verfahren. Zunächst machen wir uns mit der ∃-Einführungsregel vertraut und erst im Anschluß daran mit der ∃-Beseitigungsregel.

Die **∃-Einführungsregel** besagt: Wenn für einen beliebig gewählten Gegenstand und eine gegebene Annahmenmenge gilt, dass aus diesen Annahmen logisch folgt, dass dieser Gegenstand die Eigenschaft F besitzt, dann folgt aus derselben Annahmenmenge logisch, dass es mindestens einen Gegenstand des gesamten Redebereichs gibt, der die betreffende Eigenschaft F hat. Was für beliebige Gegenstände gilt, gilt ebenso für besondere Gegenstände. Wenn also aus einer gegebenen Annahmenmenge logisch folgt, dass ein besonderer Gegenstand die Eigenschaft F besitzt, dann folgt aus derselben Annahmenmenge ebenfalls logisch, dass es mindestens einen Gegenstand des gesamten Redebereichs gibt, der die Eigenschaft F hat. In Kurzform erhalten wir demnach:

∃-Einführung	
$\dfrac{\mathbf{X} \vdash \mathbf{F}\boldsymbol{m}}{\mathbf{X} \vdash \exists \boldsymbol{x}\mathbf{F}\boldsymbol{x}}$	$\dfrac{\mathbf{X} \vdash \mathbf{F}\boldsymbol{a}}{\mathbf{X} \vdash \exists \boldsymbol{x}\mathbf{F}\boldsymbol{x}}$

Hier gilt wie bisher auch, dass man für »F« jedes beliebige und beliebig komplexe Prädikat einsetzen kann. (Sollte in diesem Prädikat die Variable »*x*« jedoch bereits gebunden vorkommen, müssen wir bei Anwendung der ∃-Einführungsregel den Term »*m*« bzw. »*a*« systematisch durch eine von »*x*« verschiedene Variable ersetzen.)

Die Regel der ∃-Einführung legitimiert beispielsweise den Schluss von

(Alfonso hat Zeit & Alfonso hat Geld) v (~(Alfonso hat Zeit) & Alfonso arbeitet).

auf

∃*x*((*x* hat Zeit & *x* hat Geld) v (~(*x* hat Zeit) & *x* arbeitet))

Wir veranschaulichen die Art und Weise, wie Anwendungen dieser Regel in unserer Formatvorlage dokumentiert werden, anhand eines simplen Schemas, in dem die Prämisse, aus der mittels dieser Regel gefolgert wird, als Annahme fungiert:

1	(1)	F*m*	Annahme
1	(2)	∃*x*F*x*	1, ∃-Einführung

Beispiele für Einsetzungsinstanzen dieses Schemas sind:

1	(1)	Der Fuchs hat die Gans gestohlen.	Annahme
1	(2)	∃*x*(*x* hat die Gans gestohlen).	1, ∃-Einführung

1	(1)	Der Fuchs hat die Gans gestohlen.	Annahme
1	(2)	∃*x*(der Fuchs hat *x* gestohlen).	1, ∃-Einführung

An diesem Beispiel wird deutlich, dass auch die Einsetzungsinstanzen des folgenden Schemas stets prädikatenlogisch gültige Argumente sind:

1	(1)	F*mn*	Annahme
1	(2)	∃*x*F*xn*	1, ∃-Einführung
1	(3)	∃*y*∃*x*F*xy*	2, ∃-Einführung

Eine Einsetzungsinstanz dieses Schemas ist das folgende Argument:

1	(1)	Der Fuchs hat die Gans gestohlen.	Annahme
1	(2)	∃*x*(*x* hat die Gans gestohlen).	1, ∃-Einführung
1	(3)	∃*y*∃*x*(*x* hat *y* gestohlen).	2, ∃-Einführung

Man kann also die ∃-Einführungsregel wiederholt anwenden, bis man alle Namen des Ausgangssatzes durch Variablen ersetzt hat, die jeweils durch Existenzquantoren gebunden werden. Man gelangt so zu Existenzsätzen mit mehreren Existenzquantoren.

In welchen Kontexten es entscheidend sein kann, die ∃-Einführungsregel auf Sätze über beliebig gewählte Gegenstände – also Sätze der Form »F*a*« – anzuwenden, wird vor dem Hintergrund der ∃-Beseitigungsregel noch einsichtig werden. Das folgende Schema, das ausnahmslos prädikatenlogisch gültige Einsetzungsinstanzen besitzt, illustriert eine derartige Anwendung der ∃-Einführungsregel:

1	(1)	$\forall x Fx$	Annahme
1	(2)	Fa	1, ∀-Beseitigung
1	(3)	$\exists x Fx$	2, ∃-Einführung

Das folgende Argument ist ein Beispiel für eine solche prädikatenlogisch gültige Einsetzungsinstanz:

1	(1)	∀*x*(*x* ist abstrakt v ~(*x* ist eine Zahl)).	Annahme
1	(2)	*a* ist abstrakt v ~(*a* ist eine Zahl).	1, ∀-Beseitigung
1	(3)	∃*x*(*x* ist abstrakt v ~(*x* ist eine Zahl)).	2, ∃-Einführung

Im Vergleich zur ∃-Einführungsregel ist die ∃-Beseitigungsregel etwas schwieriger nachzuvollziehen. Und dies liegt nicht zuletzt daran, dass ihre Gültigkeit – wie schon die der ∀-Einführungsregel – einer wichtigen Einschränkung unterliegt.

Die **∃-Beseitigungsregel** besagt: Wenn es wahr ist, dass es mindestens einen Gegenstand des gesamten Redebereichs gibt, der die Eigenschaft F hat, und wenn aus der Annahme, irgendein beliebiger Gegenstand dieses Bereichs habe F, der Satz C logisch folgt, dann ist Satz C jedenfalls auch wahr. Mit anderen Worten: Wenn daraus, dass irgendein Gegenstand *a* F hat, C folgt – gleichgültig welcher Gegenstand *a* auch ist – dann folgt C bereits aus der Annahme, dass es überhaupt einen Gegenstand gibt, der F hat. Etwas präziser schreiben wir diese Regel so:

∃-Beseitigung

$$\frac{X \vdash \exists x Fx \qquad Y, Fa \vdash C}{X, Y \vdash C}\,*$$

Hier ist »F« wieder ein Platzhalter für beliebige und beliebig komplexe Prädikate, in denen die Variable »*x*« nur ungebunden vorkommt. Und das Sternchen markiert wieder, dass die Gültigkeit der Regel systematisch eingeschränkt werden muss. Die **Einschränkung** lautet:

* Die ∃-Beseitigungsregel ist nur unter der Bedingung anwendbar, dass »*a*« weder in der Konklusion C noch in der Annahmenmenge Y, mit deren Hilfe C aus F*a* gefolgert wird, vorkommt.

Diese Einschränkung wird verständlich, sobald man sich vor Augen führt, welche Konsequenzen Anwendungen der ∃-Beseitigungsregel hätten, und zwar in Fällen, in denen die in der Einschränkung genannten Bedingungen nicht erfüllt sind. Zu diesem Zweck nehmen wir die beiden Teilbedingungen nacheinander in den Blick. Wir beginnen mit der Frage, was passieren könnte, wollte man die ∃-Beseitigungsregel auch dann anwenden, wenn in Y von dem beliebigen Gegenstand *a* bereits die Rede ist.

Wenn weitere Annahmen über den Gegenstand *a* gemacht werden müssten, um aus seinem F-Sein auf C schließen zu können – »*a*« also in Y vorkäme – dann wäre es eben nicht länger richtig zu sagen, C folge aus dem F-Sein eines beliebigen Gegenstandes, gleichgültig, um welchen Gegenstand es sich dabei auch handele. Der beliebige Gegenstand müsste ja darüber hinaus auch noch die in Y enthaltenen Zusatzannahmen erfüllen. Wenn es aber nicht länger richtig ist zu sagen, C folge aus dem F-Sein eines beliebigen Gegenstandes, gleichgültig, um welchen Gegenstand es sich dabei handelt, dann wäre es vermessen, die Wahrheit von C bereits aus dem Umstand ableiten zu wollen, dass es unter den Gegenständen des gesamten Redebereichs einige gibt, die die Eigenschaft F besitzen. Denn unter diesen Voraussetzungen könnte es sich ja so treffen, dass die Gegenstände, die tatsächlich die Eigenschaft F besitzen und deren F-Sein die Existenzaussage wahr macht, nicht diejenigen durch Y näher charakterisierten Gegenstände sind, deren F-Sein für die Wahrheit von C hinreichend wäre. Betrachten wir folgendes Beispiel:

> Beinhalte X die Annahme, dass Leos Lieblingsspielzeug ein Ball ist und alle Bälle rund sind.
> Sei »∃*x*F*x*« die Prämisse, dass es mindestens einen runden Gegenstand gibt.
> Sei *a* ein beliebiger Gegenstand.
> Beinhalte Y die Annahme, dass *a* ein Würfel ist und kein Würfel rund ist.
> Sei »F*a*« die Annahme, dass *a* rund ist.
> Sei C die These, dass im Himmel Jahrmarkt ist.

Mit Hilfe der &-Beseitigungsregel, Modus ponendo ponens und der ∃-Einführungsregel leiten wir zunächst »∃*x*F*x*« aus X ab:

1	(1)	Leos Lieblingsspielzeug ist ein Ball & ∀*x*(*x* ist ein Ball → *x* ist rund).	Annahme (X)
1	(2)	∀*x*(*x* ist ein Ball → *x* ist rund).	1, &-Bes.
1	(3)	Leos Lieblingsspielzeug ist ein Ball.	1, &-Bes.
1	(4)	Leos Lieblingsspielzeug ist rund.	2, 3, MPP
1	(5)	∃*x*(*x* ist rund).	4, ∃-Einf. (=∃*x*F*x*)

Aus Y und »F*a*« können wir mit Hilfe der &-Beseitigungsregel, Modus ponendo ponens und Ex falso quodlibet die These C folgern:

6	(6)	*a* ist rund.	Annahme (=F*a*)
7	(7)	*a* ist ein Würfel & ∀*x*(*x* ist ein Würfel → ~(*x* ist rund)).	Annahme aus Y
7	(8)	∀*x*(*x* ist ein Würfel → ~(*x* ist rund)).	7, &-Bes.
7	(9)	*a* ist ein Würfel.	7, &-Bes.

7	(10)	~(a ist rund).	8, 9, MPP
6,7	(11)	Im Himmel ist Jahrmarkt.	6, 10, EFQ

Könnten wir an dieser Stelle nun die ∃-Beseitigungsregel anwenden, dann könnten wir aus den Annahmen in den Zeilen (1) und (7) – d.h. aus unseren Annahmen(mengen) X und Y – auf unsere These C schließen, nämlich die These, dass im Himmel Jahrmarkt ist. Da man einen beliebigen Gegenstand problemlos so wählen kann, dass Zeile (7) wahr wird, und Zeile (1) tatsächlich wahr ist, würden wir also darauf schließen müssen, dass im Himmel Jahrmarkt ist. Das ist natürlich absurd. Darum ist die Anwendung der ∃-Beseitigungsregel in diesem Fall nicht gestattet:

*** 1,7**	**(12)**	**Im Himmel ist Jahrmarkt**	**5, 6, 11, ∃-Beseitigung ***

Dass die Anwendung der ∃-Beseitigungsregel in diesem Fall nicht gestattet ist, erklärt sich wie folgt. So wie a nämlich durch Y charakterisiert ist, kann es sich bei diesem ansonsten beliebig gewählten Gegenstand unmöglich um ein typisches Exemplar der Menge runder Dinge handeln. Die Einschränkung der ∃-Beseitigungsregel bezweckt also zu gewährleisten, dass der jeweils beliebig gewählte Gegenstand, insofern er ein F-Ding ist, als ein **typisches Exemplar** der Menge von F-Dingen angesehen werden kann.

Was passierte nun, wenn zwar nicht in Y, wohl aber in C von dem beliebigen Gegenstand a bereits die Rede wäre und wir die ∃-Beseitigungsregel anwendeten? Wir nähern uns einer Antwort auf diese Frage in vier Schritten.

1. Erinnern wir uns daran, dass die Konklusion eines Arguments als Prämisse eines anderen Arguments fungieren kann. Wir können also Argumente hintereinander schalten und erhalten dann ein längeres Argument mit mehreren Beweisschritten. Wenn also die Anwendung der ∃-Beseitigungsregel auch dann erlaubt wäre, wenn in der Konklusion C von dem beliebigen Gegenstand a die Rede wäre, dann könnte diese Konklusion als Prämisse eines weiteren Arguments dienen, das aus Annahmen über a etwas beweist.
2. Im letzten Kapitel haben wir solche Argumente bereits kennen gelernt – Argumente nämlich, im Zuge derer die ∀-Einführungsregel zum Einsatz kommt. Wie wir dort ebenfalls gesehen haben, unterliegt die Anwendung der ∀-Einführungsregel einer Beschränkung: Man darf sie nur anwenden, wenn gewährleistet ist, dass in den Annahmen, von denen die Herleitung der relevanten Prämisse »Fa« abhängt, von dem Gegenstand a noch nicht bereits die Rede ist. Könnten wir diese Prämisse tatsächlich mit Hilfe der ∃-Beseitigungsregel herleiten, dann bedeutete dies, dass weder in X noch in Y von dem Gegenstand a die Rede sein dürfte.
3. Diese Bedingung lässt sich allerdings kinderleicht erfüllen, indem man X mit dem Existenzsatz »∃xFx« gleichsetzt und Y als leer annimmt. Denn die erforderlichen Folgebeziehungen bestehen dann trivialerweise, insofern gilt:

   A ⊢ A
4. Ist nun aber erst einmal sichergestellt, dass der Anwendung der ∀-Einführungsregel nichts mehr im Wege steht, dann könnten wir nun ausgehend von

einem Existenzsatz via ∃-Beseitigung und anschließender ∀-Einführung auf einen Allsatz schließen. Also zum Beispiel könnten wir dann ausgehend von der Tatsache, dass jemand Bundesaußenminister ist, darauf schließen, dass jeder Bundesaußenminister ist. Das wäre natürlich ein absolut hirnrissiger Schluss, und tatsächlich ist er ungültig, weil die ∃-Beseitigungsregel hier nicht anwendbar ist:

1	(1)	∃*x*(*x* ist Bundesaußenminister)	Annahme
2	(2)	*a* ist Bundesaußenminister	Annahme
* **1**	**(3)**	***a* ist Bundesaußenminister**	**1, 2, 2, ∃-Beseitigung** *
1	(4)	∀*x*(*x* ist Bundesaußenminister)	3, ∀-Einführung

Die Einschränkung der Anwendungsbedingungen für die ∃-Beseitigungsregel erklärt sich also auch hier wieder daraus, dass wir ohne sie etwas, was wir eigens bezüglich des Gegenstandes *a* annehmen, später als etwas deklarieren könnten, das nicht länger den Status einer Extra-Annahme hat, und sogar für alle Gegenstände des Redebereichs typisch ist. Wie man nämlich anhand des – wohlgemerkt, ungültigen – Arguments leicht sieht, würde uns die uneingeschränkte Anwendbarkeit der ∃-Beseitigungsregel erlauben, eine mittels der Annahme-Einführungsregel allererst ins Spiel gebrachte und entsprechend gekennzeichnete Prämisse zunächst als Annahme aufzugeben, nur um sie anschließend folgernd wieder einzuführen, wobei sie ihren Status als Extra-Annahme jedoch einbüßte. So könnte man dann also genausogut auch aus den beiden – sicherlich wahren – Annahmen »∃*x*(*x* ist rund)« und »∃*x*~(*x* ist rund)« folgern, dass der beliebig gewählte Gegenstand *a* sowohl rund als auch nicht rund ist. Reductio ad absurdum würde uns dann zu dem Schluss nötigen, dass es, sofern es etwas Rundes gibt, nicht einen Gegenstand gibt, der nicht rund ist, bzw. dass es, sofern es etwas gibt, was nicht rund ist, nicht einen runden Gegenstand gibt. Und dies wäre freilich ein vollkommen inakzeptables Ergebnis.

Ferner ist zu beobachten: Wäre die ∃-Beseitigungsregel uneingeschränkt anwendbar, dann würde damit auch die Einschränkung der ∀-Einführungsregel systematisch unterlaufen. Denn diese Einschränkung sollte ja ausschließen, dass wir einen Allsatz einfach aus einer Annahme folgern können, deren Wahrheit wir schon dadurch herstellen können, dass wir den Gegenstand *a*, von dem sie handelt, geschickt wählen. Um dies zu verhindern, wurde verlangt, dass der Satz über *a*, auf den die ∀-Einführungsregel »zugreift«, weder selbst eine bloße Annahme noch eine Folgerung aus Annahmen sein dürfe, die spezielle Annahmen über *a* sind. In dem soeben gezeigten – und ungültigen – Argument würde Prämisse (3) diesen Anforderungen zweifellos genügen, und der Anwendung der ∀-Einführungsregel stünde dann nichts mehr im Wege. Aber wie schon gesagt, gelangten wir zu Zeile (3) ja nur aufgrund eines Etikettenschwindels: Die – freilich illegitime – Anwendung der ∃-Beseitigungsregel im Übergang von Zeile (2) zu Zeile (3) münzt die explizite Annahme aus Zeile (2) in etwas um, was in Zeile (3) nicht länger als eine solche Annahme erscheint.

Bislang haben wir uns nur mit Beispielen für unerlaubte Anwendungen der ∃-Beseitigungsregel beschäftigt. Und dabei haben wir uns ebensowenig darum geschert zu erläutern, wie Anwendungen der ∃-Beseitigungsregel in unserer Formatvorlage dokumentiert werden. All dies soll jetzt nachgeholt werden. Zu diesem Zweck betrachten wir das folgende Beweisschema:

Beweis 29: $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists xFx \vdash \exists xGx$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\exists xFx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
1	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	1, $\forall$-Beseitigung
1,3	(5)	Ga	3, 4, Modus ponendo ponens
1,3	(6)	$\exists xGx$	5, $\exists$-Einführung
1,2	(7)	$\exists xGx$	2, 3, 6, $\exists$-Beseitigung

Bevor wir zur Veranschaulichung eine Einsetzungsinstanz dieses Schemas angeben, sollten wir uns klarmachen, was hier eigentlich vor sich geht. In den Zeilen (1) und (2) machen wir zwei allgemeine Annahmen über den gesamten Redebereich, in Zeile (1), dass alle Gegenstände dieses Bereichs den offenen Satz »$Fx \rightarrow Gx$« erfüllen, und in Zeile (2), dass es mindestens einen Gegenstand dieses Bereichs gibt, der den offenen Satz »Fx« erfüllt. In Zeile (3) machen wir dann eine zusätzliche Annahme, nämlich dass der beliebig gewählte Gegenstand *a* jedenfalls die Eigenschaft aufweist, den offenen Satz »Fx« zu erfüllen. Ausgehend von diesen drei Annahmen stellen wir nun den folgenden Gedankengang an. Was für alle Gegenstände des gesamten Redebereichs gilt, gilt freilich auch für *a*. Sofern die Annahme aus Zeile (1) wahr ist, erfüllt also auch *a* den offenen Satz »$Fx \rightarrow Gx$«. Mit Hilfe der $\forall$-Beseitigungsregel gelangen wir also zu Zeile (4). Auf Zeile (3) und (4) können wir nun in vertrauter Weise die aussagenlogische Regel Modus ponendo ponens anwenden und gelangen so zu Zeile (5). Zeile (5) besagt, dass der beliebig gewählte Gegenstand *a* den offenen Satz »Gx« erfüllt. Wenn nun aber der beliebig gewählte Gegenstand *a* den offenen Satz »Gx« erfüllt, dann gibt es also im gesamten Redebereich mindestens einen Gegenstand, der den offenen Satz »Gx« erfüllt. Aus Zeile (5) können wir also mit Hilfe der $\exists$-Einführungsregel die Zeile (6) ableiten.

So weit, so gut. Aber was passiert denn nun beim letzten Schritt, der uns zur Zeile (7) führt? Inwiefern ist es eine Anwendung der $\exists$-Beseitigungsregel, die uns Zeile (7) abzuleiten erlaubt? Kommt in Zeile (7) nicht wieder ein Existenzsatz vor? Und warum machen wir eigentlich nicht einfach in Zeile (6) Schluss?

Zunächst einmal fällt auf, dass in der linken Spalte der Zeilen (6) und (7) verschiedene Annahmen genannt sind. Zeile (6) ist von der Annahme aus Zeile (2) vollkommen unabhängig. Ja, wie die Eintragungen in der rechten Spalte dokumentieren, spielt Zeile (2) nirgends bei der schrittweisen Ableitung von Zeile (6) eine Rolle. Stattdessen hängt aber, wie man links sehen kann, Zeile (6) von der Annahme aus Zeile (3) ab. Bei Zeile (7) verhält es sich umgekehrt. Zeile (7) hängt von der Annahme aus Zeile (2) ab, nicht aber von der Annahme aus Zeile (3). Die Ableitung von Zeile (6) beweist, dass die nachstehende logische Folgebeziehung besteht:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx), Fa \vdash \exists xGx$$

Wenn in Zeile (7) in der Tat alles mit rechten Dingen zugeht und unsere Eintragungen stimmen, dann haben wir im Zuge der Ableitung dieser Zeile (7) bewiesen, dass die nachstehende Folgebeziehung gilt:

$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x), \exists x\mathrm{F}x \;\vdash\; \exists x\mathrm{G}x$

Wie wir uns bereits an anderer Stelle klargemacht haben, gilt für jedweden Satz A:

$\mathrm{A} \vdash \mathrm{A}$

Insbesondere gilt dann auch:

$\exists x\mathrm{F}x \vdash \exists x\mathrm{F}x$

Vor diesem Hintergrund ist nun leicht zu sehen, inwiefern der Übergang zu Zeile (7) gerechtfertigt ist. Denn es gilt ja die ∃-Beseitigungsregel:

∃-Beseitigung
$$\frac{\mathbf{X} \vdash \exists x\mathbf{F}x \qquad \mathbf{Y}, \mathbf{F}a \vdash \mathbf{C}}{\mathbf{X}, \mathbf{Y} \vdash \mathbf{C}}\,*$$ * sofern »*a*« weder in Y noch in C vorkommt

Wir müssen uns nun bloß »X« durch »∃*x*F*x*« und »Y« durch »∀*x*(F*x* → G*x*)« ersetzt denken und feststellen, dass weder in »∃*x*F*x*« noch in »∀*x*(F*x* → G*x*)« von dem beliebigen Gegenstand *a* die Rede ist.

Wir können jetzt zu einer Beantwortung unserer Fragen kommen. Die Folgerung von Zeile (7) ist in der Tat legitim. Obwohl nun der Satz aus Zeile (7) derselbe ist wie der, der bereits in Zeile (6) steht, zeigt erst der Übergang zu Zeile (7), dass die Wahrheit dieses Satzes nur von allgemeinen Annahmen abhängt. Er hängt von dem Allsatz aus Zeile (1) und von dem Existenzsatz aus Zeile (2) ab. So wie ein Allsatz drückt auch ein Existenzsatz eine allgemeine Annahme aus und nicht etwa eine Annahme über einen individuellen Gegenstand.

Der Zwischenbeweis, der zur Zeile (6) führte, gestattete die Anwendung aussagenlogischer Regeln, der eine Anwendung der ∀-Beseitigungsregel vorausging und eine Anwendung der ∃-Einführungsregel folgte. Die Anwendung aussagenlogischer Regeln war dabei unproblematisch, insofern sie nämlich auf *quantorenfreie* Sätze »zugriffen«, nämlich auf Sätze über den beliebig gewählten Gegenstand *a*. Die Ableitbarkeit der Zeile (7) verdeutlicht somit einmal mehr, dass wir uns aussagenlogische Folgebeziehungen prädikatenlogisch zunutze machen können. Denn sie zeigt, dass der Satz aus Zeile (7) auch aus quantifizierten Sätzen folgt.

Bleibt noch die Frage, inwiefern hier von einer ∃-Beseitigung die Rede sein kann, wenn uns doch die Anwendung der genannten Regel einen Existenzsatz folgern lässt – nämlich den Satz aus Zeile (7), d.h. »∃*x*G*x*«. Die Antwort lautet: Der Existenzsatz, der hier im Zuge der Anwendung der ∃-Beseitigungsregel »beseitigt« wird, ist der Satz aus Zeile (2), d.h. »∃*x*F*x*«.

In diesem Zusammenhang ist eine Warnung angebracht: Das **Beseitigen**, von dem hier die Rede ist, darf nicht mit dem **Aufgeben** von Annahmen verwechselt werden! Zeile (7) hängt immer noch von der Annahme aus Zeile (2) ab, d.h. von »$\exists x Fx$«. Trotzdem haben wir beim Übergang zu Zeile (7) auf einen Satz geschlossen, der den Satz »$\exists x Fx$« nicht mehr enthält. In diesem Sinne haben wir den Satz »$\exists x Fx$« bzw. den darin vorkommenden Existenzquantor beseitigt. Auf unsere Darstellungsweise logischer Regeln gemünzt lässt sich dieser Unterschied kurz und knapp so markieren: Ein Satz S bzw. ein in S vorkommendes logisches Zeichen wird im Zuge einer Regelanwendung beseitigt, wenn S vor Anwendung der Regel *rechts* des Folgezeichens »$\vdash$« vorkommt, nach Anwendung der Regel aber *nicht mehr rechts* des Folgezeichens »$\vdash$« vorkommt. Eine Annahme wird im Zuge einer Regelanwendung aufgegeben, wenn sie vor Anwendung der Regel *links* des Folgezeichens »$\vdash$« vorkommt, nach Anwendung der Regel aber *nicht mehr links* des Folgezeichens »$\vdash$« vorkommt. In diesem Sinne haben wir also die Annahme aus Zeile (3), d.h. »Fa«, aufgegeben.

Kehren wir zu unserem Beweisschema zurück und vergegenwärtigen wir uns, welche Eintragungen uns die Formatvorlage abverlangt, sobald wir die $\exists$-Beseitigungsregel anwenden.

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\exists x Fx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
1	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	1, $\forall$-Beseitigung
1,3	(5)	Ga	3, 4, MPP
1,3	(6)	$\exists x Gx$	5, $\exists$-Einführung
1,2	(7)	$\exists x Gx$	2, 3, 6, $\exists$-Beseitigung

Was in Zeile (7) in der linken Spalte steht, ergibt sich unmittelbar aus der $\exists$-Beseitigungsregel: Zunächst werden dort diejenigen Annahmen angeführt, von denen der beseitigte Existenzsatz abhängt. Da wir den Existenzsatz, der abschließend beseitigt wird, mittels der Annahmeregel eingeführt haben, ist dies die Annahme des Existenzsatzes selbst, d.h. die Annahme aus Zeile (2). Des Weiteren müssen die Zusatzannahmen genannt werden, die wir benötigen, um unsere Konklusion aus dem Satz über den beliebig gewählten Gegenstand *a* abzuleiten – abgesehen natürlich von diesem Satz selbst, dessen Annahme wir ja wieder aufgeben. In unserem Falle ist die einzig relevante Zusatzannahme die aus Zeile (1). In der rechten Spalte von Zeile (7) tragen wir nun die folgenden drei Nummern ein:

- Die Nummer der Zeile, in welcher der zu beseitigende Existenzsatz steht,
- die Nummer der Zeile, in welcher der relevante Satz über den beliebigen Gegenstand steht,
- die Nummer der Zeile, in welcher die Konklusion aus dem relevanten Satz über den beliebigen Gegenstand gefolgert wird.

In unserem Schema ist der zu beseitigende Existenzsatz der Satz »$\exists x Fx$«. Er steht in Zeile (2). Der relevante Satz über den beliebigen Gegenstand ist bei uns der Satz »Fa«. Er steht in Zeile (3). Die Konklusion ist der Satz »$\exists x Gx$«. Er wird (vor dem

Hintergrund einer weiteren Annahme) in Zeile (6) aus »F*a*« gefolgert. Demnach tragen wir in die rechte Spalte von Zeile (7) die Nummern »2«, »3« und »6« ein.

Das nachstehende Beispielargument ist eine Einsetzungsinstanz des bislang betrachteten Schemas:

1	(1)	$\forall x$(x ist korrupt $\rightarrow$ x ist erfolgreich).	Annahme
2	(2)	$\exists x$(x ist korrupt).	Annahme
3	(3)	a ist korrupt.	Annahme
1	(4)	a ist korrupt $\rightarrow$ a ist erfolgreich.	1, $\forall$-Beseitigung
1,3	(5)	a ist erfolgreich.	3, 4, MPP
1,3	(6)	$\exists x$(x ist erfolgreich).	5, $\exists$-Einführung
1,2	(7)	$\exists x$(x ist erfolgreich).	2, 3, 6, $\exists$-Beseitigung

Ein weiteres, allerdings etwas komplizierteres Beweisschema ist das nachfolgende:

Beweis 30: $\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x), \exists x(\mathrm{F}x \;\&\; \mathrm{H}x) \vdash \exists x(\mathrm{G}x \;\&\; \mathrm{H}x)$

1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$	Annahme
2	(2)	$\exists x(\mathrm{F}x \;\&\; \mathrm{H}x)$	Annahme
3	(3)	$\mathrm{F}a \;\&\; \mathrm{H}a$	Annahme
1	(4)	$\mathrm{F}a \rightarrow \mathrm{G}a$	1, $\forall$-Beseitigung
3	(5)	$\mathrm{F}a$	3, &-Beseitigung
1,3	(6)	$\mathrm{G}a$	4, 5, MPP
3	(7)	$\mathrm{H}a$	3, &-Beseitigung
1,3	(8)	$\mathrm{G}a \;\&\; \mathrm{H}a$	6, 7, &-Einführung
1,3	(9)	$\exists x(\mathrm{G}x \;\&\; \mathrm{H}x)$	8, $\exists$-Einführung
1,2	(10)	$\exists x(\mathrm{G}x \;\&\; \mathrm{H}x)$	2, 3, 9, $\exists$-Beseitigung

Auch hier erklären sich die Eintragungen in der letzten Zeile nach dem bereits bekannten Muster. In der linken Spalte sind die Annahmen aufgeführt, von denen der beseitigte Existenzsatz abhängt – hier Annahme 2 – sowie die Zusatzannahmen, die nötig sind, um aus der Annahme über den beliebig gewählten Gegenstand auf die Konklusion zu schließen – hier Annahme 1. In der rechten Spalte sind die Prämissen aufgeführt, auf die die $\exists$-Beseitigungsregel »zugreift«: Prämisse 2 (der zu beseitigende Existenzsatz), Prämisse 3 (die Annahme über den beliebigen Gegenstand), Prämisse 9 (die aus dieser Annahme gefolgerte Konklusion).

Eine Einsetzungsinstanz des zweitgenannten Beweisschemas ist das nachstehende Argument:

1	(1)	$\forall x$(x ist ein Vanillepudding $\rightarrow$ x ist eine Süßspeise).	Annahme
2	(2)	$\exists x$(x ist ein Vanillepudding & x ist im Kühlschrank).	Annahme
3	(3)	a ist ein Vanillepudding & a ist im Kühlschrank.	Annahme
1	(4)	a ist ein Vanillepudding $\rightarrow$ a ist eine Süßspeise.	1, $\forall$-Beseitigung
3	(5)	a ist ein Vanillepudding.	3, &-Beseitigung
1,3	(6)	a ist eine Süßspeise.	4, 5, MPP

3	(7)	*a* ist im Kühlschrank.	3, &-Beseitigung
1,3	(8)	*a* ist eine Süßspeise & *a* ist im Kühlschrank.	6, 7, &-Einführung
1,3	(9)	$\exists x$(*x* ist eine Süßspeise & *x* ist im Kühlschrank).	8, $\exists$-Einführung
1,2	(10)	$\exists x$(*x* ist eine Süßspeise & *x* ist im Kühlschrank).	2, 3, 9, $\exists$-Beseitigung

Auch hier wird wieder deutlich, welchen beweistheoretischen Nutzen die prädikatenlogischen Grundregeln haben. Ganz so wie die Regeln für den Allquantor erlauben auch die Regeln für den Existenzquantor den Abstieg vom Allgemeinen zum Individuellen und den Aufstieg vom Individuellen zum Allgemeinen. Dank dieser Erlaubnis, ab- und wiederzuaufsteigen, können wir nun prädikatenlogische Folgebeziehungen unter Zuhilfenahme aussagenlogischer Mittel beweisen. Zwei solche prädikatenlogischen Folgebeziehungen haben wir in der Tat soeben bewiesen:

$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x), \exists x\mathrm{F}x \vdash \exists x\mathrm{G}x$
$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x), \exists x(\mathrm{F}x \,\&\, \mathrm{H}x) \vdash \exists x(\mathrm{G}x \,\&\, \mathrm{H}x)$

Und damit sind auch die aus Kapitel 15 noch verbliebenen Argumente allesamt als gültig erwiesen:

Der letzte Gast möchte Kaffee.	1	(1)	$\mathrm{F}m$	Annahme
Mindestens einer möchte Kaffee.	1	(2)	$\exists x\mathrm{F}x$	1, $\exists$-Einführung

Alle Frösche sind Amphibien.	1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$	Annahme
Einige Frösche haben gelbe Hälse.	2	(2)	$\exists x(\mathrm{F}x \,\&\, \mathrm{H}x)$	Annahme
Einige Amphibien haben gelbe Hälse.	1	(3)	$\mathrm{F}a \rightarrow \mathrm{G}a$	1, $\forall$-Beseitigung
	4	(4)	$\mathrm{F}a \,\&\, \mathrm{H}a$	Annahme
	4	(5)	$\mathrm{F}a$	4, &-Beseitigung
	4	(6)	$\mathrm{H}a$	4, &-Beseitigung
	1,4	(7)	$\mathrm{G}a$	3, 5, MPP
	1,4	(8)	$\mathrm{G}a \,\&\, \mathrm{H}a$	6, 7, &-Einf.
	1,4	(9)	$\exists x(\mathrm{G}x \,\&\, \mathrm{H}x)$	8, $\exists$-Einführung
	1,2	(10)	$\exists x(\mathrm{G}x \,\&\, \mathrm{H}x)$	2, 4, 9, $\exists$-Beseit.

Jemand fängt an zu singen.	1	(1)	$\exists x\mathrm{F}x$	Annahme
Jeder, der singt, hört irgendwann zu singen auf.	2	(2)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$	Annahme
	2	(3)	$\mathrm{F}a \rightarrow \mathrm{G}a$	2, $\forall$-Beseitigung
Jemand hört irgendwann zu singen auf.	4	(4)	$\mathrm{F}a$	Annahme
	2,4	(5)	$\mathrm{G}a$	3, 4, MPP
	2,4	(6)	$\exists x\mathrm{G}x$	5, $\exists$-Einführung
	1,2	(7)	$\exists x\mathrm{G}x$	1, 4, 6, $\exists$-Beseit.

Diese Argumente sind logisch gültig, insofern neben den beiden Grundregeln für den Allquantor auch die beiden Grundregeln für den Existenzquantor logische Regeln sind. Tatsächlich gelten die Grundregeln für den Existenzquantor ebenfalls *per definitionem*: Der Existenzquantor ist so zu verstehen, dass von Sätzen, in denen er vorkommt, diese Regeln gelten.

Allerdings können wir auch in diesem Fall die Bedeutung des Existenzquantors nicht mit Hilfe einer Wahrheitstafel angeben. Stattdessen müssen wir uns darauf beschränken, die Wahrheitsbedingungen wie folgt zu spezifizieren: Ein Satz der Form »$\exists x$Fx« ist wahr, wenn mindestens ein Gegenstand des gesamten Redebereichs den offenen Satz »Fx« erfüllt, und ansonsten ist ein Satz der Form »$\exists x$Fx« falsch. (Auch hier sei wieder daran erinnert, dass der Prädikatbuchstabe »F« ein Platzhalter für beliebig komplexe Prädikate ist.)

Diese Beschränkung hat wieder etwas damit zu tun, dass unendlich viele Gegenstände in unseren Redebereich gehören. Gäbe es hingegen nur endlich viele Gegenstände – sagen wir, allein die drei Objekte o_1, o_2 und o_3 – dann fielen die Wahrheitsbedingungen des Existenzsatzes »$\exists x$Fx« mit den Wahrheitsbedingungen der Disjunktion »(Fo_1 v Fo_2) v Fo_3« zusammen, und wir könnten sie demnach mit Hilfe der folgenden Wahrheitstafel darstellen:

Fo_1	**Fo_2**	**Fo_3**	**$\exists x$Fx**	**(Fo_1 v Fo_2) v Fo_3)**
W	W	W	W	W
W	W	F	W	W
W	F	W	W	W
W	F	F	W	W
F	W	W	W	W
F	W	F	W	W
F	F	W	W	W
F	F	F	F	F

Denn laut Voraussetzung erfordert die Wahrheit von »$\exists x$Fx« nicht mehr und nicht weniger, als dass mindestens eines der Objekte o_1, o_2 und o_3 die Eigenschaft F hat. Und dass mindestens eines dieser drei Objekte die Eigenschaft F hat, erfordert laut Voraussetzung nicht mehr und nicht weniger, als dass es im Redebereich mindestens einen Gegenstand gibt, der diese Eigenschaft aufweist. Denn laut Voraussetzung umfasst der Redebereich nur die Objekte o_1, o_2 und o_3 und keinen anderen Gegenstand.

Bei einem auf drei Gegenstände beschränkten Redebereich funktionieren Existenzsätze also wie Disjunktionen mit drei Disjunkten. Ebenso funktionieren Existenzsätze bei einem auf 35 Gegenstände beschränkten Redebereich wie Disjunktionen mit 35 Disjunkten. Und Entsprechendes gilt für jede endliche Anzahl von Gegenständen, auf die der Redebereich eingeschränkt wird. Bei einem Redebereich mit unendlich vielen Gegenständen funktionieren Existenzsätze entsprechend wie unendlich lange Disjunktionen – nämlich wie Disjunktionen mit unendlich vielen Disjunkten. Es lassen sich aber keine Wahrheitstafeln für Disjunktionen mit unendlich vielen Disjunkten angeben.

Genauso wäre es ein Trugschluss zu glauben, alles, was sich mit Hilfe prädikatenlogischer Mittel ausdrücken lässt, ließe sich auch ohne Hilfe dieser Mittel ausdrücken. Die Äußerung einer Disjunktion mit unendlich vielen Disjunkten kommt nie zu einem Ende. Wir erreichen also nie einen Punkt, an dem wir diese

Disjunktion geäußert haben. Aber solange wir einen solchen Punkt nicht erreichen, haben wir auch noch nichts Bestimmtes gesagt, das auf seinen Wahrheitswert hin zu untersuchen wäre. Entsprechendes gilt für Konjunktionen mit unendlich vielen Konjunkten. Existenzsätze und Allsätze sind sprachliche Mittel, die es uns gestatten, in endlicher Zeit über unendlich Vieles zu sprechen.

In diesem Kapitel haben wir die zwei Grundregeln für den Existenzquantor kennen gelernt, ihre Anwendungsbedingungen erläutert sowie die Dokumentation ihrer Anwendung in der Formatvorlage geklärt. Wir haben gesehen, wie sich mit ihrer Hilfe prädikatenlogische Folgebeziehungen beweisen lassen. Bevor wir im nächsten Kapitel zur Betrachtung von Sätzen übergehen, in denen mehrere Quantoren – Allquantoren und Existenzquantoren – vorkommen, wollen wir hier den bereits bewiesenen Folgebeziehungen noch weitere an die Seite stellen. Die Ergebnisse dieser Bemühungen werden später durch die Beweise in Kapitel 22 komplettiert. Zunächst beweisen wir die nachstehenden Folgebeziehungen:

$\exists x\mathrm{F}x \vdash \sim\forall x\sim\mathrm{F}x$
$\sim\forall x\sim\mathrm{F}x \vdash \exists x\mathrm{F}x$

$\exists x\sim\mathrm{F}x \vdash \sim\forall x\mathrm{F}x$
$\sim\forall x\mathrm{F}x \vdash \exists x\sim\mathrm{F}x$

$\forall x\mathrm{F}x \vdash \sim\exists x\sim\mathrm{F}x$
$\sim\exists x\sim\mathrm{F}x \vdash \forall x\mathrm{F}x$

$\forall x\sim\mathrm{F}x \vdash \sim\exists x\mathrm{F}x.$
$\sim\exists x\mathrm{F}x \vdash \forall x\sim\mathrm{F}x$

Diese Folgebeziehungen sind paarweise geordnet. Das hat seinen Grund darin, dass sie jeweils zusammengenommen ergeben, dass zwei Sätze auseinander logisch folgen, diese Sätze also **logisch äquivalent** sind. Alle Folgebeziehungen zusammen zeigen, dass man alles, was man mit Hilfe des Existenzquantors ausdrücken kann, stattdessen auch mit Hilfe des Allquantors ausdrücken kann und dass man umgekehrt alles, was man mit Hilfe des Allquantors ausdrücken kann, genauso gut auch ausdrücken kann, indem man stattdessen den Existenzquantor gebraucht. Die beiden Quantoren sind also wechselseitig definierbar.

Wir listen hier die Beweise der Folgebeziehungen kurzerhand auf. Diese Beweise sind nicht ganz einfach, aber es lohnt sich, sie einmal nachzuvollziehen – unter anderem, um sich zu vergegenwärtigen, wieviel man mittels weniger Regeln erreichen kann. In der Tat brauchen wir nämlich zu diesem Zweck neben den vier prädikatenlogischen Grundregeln nur noch drei weitere, die &-Einführungsregel, Reductio ad absurdum und Doppelte-Negations-Beseitigung. Nachdem wir diese Beweise hier einmal nachvollzogen haben, wird es künftig in erster Linie darauf ankommen zu wissen, dass die Folgebeziehungen, die sie beweisen, tatsächlich gelten, und nicht so sehr darauf, diese Beweise selbst zu erinnern. Wir können in Zukunft einfach die Folge-Einführungsregel gebrauchen, wenn wir beim Argumentieren auf die fraglichen Folgebeziehungen zurückgreifen.

Beweis 31a: $\exists xFx \vdash {\sim}\forall x{\sim}Fx$

1	(1)	$\forall x{\sim}Fx$	Annahme
2	(2)	$\exists xFx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
1	(4)	${\sim}Fa$	1, $\forall$-Bes.
1,3	(5)	$Fa \,\&\, {\sim}Fa$	3, 4, &-Einf.
3	(6)	${\sim}\forall x{\sim}Fx$	1, 5, RAA
2	(7)	${\sim}\forall x{\sim}Fx$	2, 3, 6, $\exists$-Bes.

Beweis 31b: ${\sim}\forall x{\sim}Fx \vdash \exists xFx$

1	(1)	${\sim}\forall x{\sim}Fx$	Annahme
2	(2)	${\sim}\exists xFx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
3	(4)	$\exists xFx$	3, $\exists$-Einf.
2,3	(5)	$\exists xFx \,\&\, {\sim}\exists xFx$	2, 4, &-Einf.
2	(6)	${\sim}Fa$	3, 5, RAA
2	(7)	$\forall x{\sim}Fx$	6, $\forall$-Einf.
1,2	(8)	$\forall x{\sim}Fx \,\&\, {\sim}\forall x{\sim}Fx$	1, 7, &-Einf.
1	(9)	${\sim}{\sim}\exists xFx$	2, 8, RAA
1	(10)	$\exists xFx$	9, DN-Bes.

Beweis 32a: $\exists x{\sim}Fx \vdash {\sim}\forall xFx$

1	(1)	$\forall xFx$	Annahme
2	(2)	$\exists x{\sim}Fx$	Annahme
3	(3)	${\sim}Fa$	Annahme
1	(4)	Fa	1, $\forall$-Bes.
1,3	(5)	$Fa \,\&\, {\sim}Fa$	3, 4, &-Einf.
3	(6)	${\sim}\forall xFx$	1, 5, RAA
2	(7)	${\sim}\forall xFx$	2, 3, 6, $\exists$-Bes.

Beweis 32b: ${\sim}\forall xFx \vdash \exists x{\sim}Fx$

1	(1)	${\sim}\forall xFx$	Annahme
2	(2)	${\sim}\exists x{\sim}Fx$	Annahme
3	(3)	${\sim}Fa$	Annahme
3	(4)	$\exists x{\sim}Fx$	3, $\exists$-Einf.
2,3	(5)	$\exists x{\sim}Fx \,\&\, {\sim}\exists x{\sim}Fx$	2, 4, &-Einf.
2	(6)	${\sim}{\sim}Fa$	3, 5, RAA
2	(7)	Fa	6, DN-Bes.
2	(8)	$\forall xFx$	7, $\forall$-Einf.
1,2	(9)	$\forall xFx \,\&\, {\sim}\forall xFx$	1, 8, &-Einf.
1	(10)	${\sim}{\sim}\exists x{\sim}Fx$	2, 9, RAA
1	(11)	$\exists x{\sim}Fx$	10, DN-Bes.

Beweis 33a: $\forall x Fx \vdash \sim\exists x \sim Fx$

1	(1)	$\forall x Fx$	Annahme
2	(2)	$\exists x \sim Fx$	Annahme
3	(3)	$\sim Fa$	Annahme
1	(4)	Fa	1, ∀-Bes.
1,3	(5)	$Fa \;\&\; \sim Fa$	3, 4, &-Einf.
3	(6)	$\sim\forall x Fx$	1, 5, RAA
2	(7)	$\sim\forall x Fx$	2, 3, 6, ∃-Bes.
1,2	(8)	$\forall x Fx \;\&\; \sim\forall x Fx$	1,7, &-Einf.
1	(9)	$\sim\exists x \sim Fx$	2, 8, RAA.

Beweis 33b: $\sim\exists x \sim Fx \vdash \forall x Fx$

1	(1)	$\sim\exists x \sim Fx$	Annahme
2	(2)	$\sim Fa$	Annahme
2	(3)	$\exists x \sim Fx$	2, ∃-Einf.
1,2	(4)	$\exists x \sim Fx \;\&\; \sim\exists x \sim Fx$	1, 3, &-Einf.
1	(5)	$\sim\sim Fa$	2, 4, RAA
1	(6)	Fa	5, DN-Bes.
1	(7)	$\forall x Fx$	6, ∀-Einf.

Beweis 34a: $\forall x \sim Fx \vdash \sim\exists x Fx$

1	(1)	$\forall x \sim Fx$	Annahme
2	(2)	$\exists x Fx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
1	(4)	$\sim Fa$	1, ∀-Bes.
1,3	(5)	$Fa \;\&\; \sim Fa$	3, 4, &-Einf.
3	(6)	$\sim\forall x \sim Fx$	1, 5, RAA
2	(7)	$\sim\forall x \sim Fx$	2, 3, 6, ∃-Bes.
1,2	(8)	$\forall x \sim Fx \;\&\; \sim\forall x \sim Fx$	1, 7, &-Einf.
1	(9)	$\sim\exists x Fx$	2, 8, RAA.

Beweis 34b: $\sim\exists x Fx \vdash \forall x \sim Fx$

1	(1)	$\sim\exists x Fx$	Annahme
2	(2)	Fa	Annahme
2	(3)	$\exists x Fx$	2, ∃-Einf.
1,2	(4)	$\exists x Fx \;\&\; \sim\exists x Fx$	1, 3, &-Einf.
1	(5)	$\sim Fa$	2, 4, RAA
1	(6)	$\forall x \sim Fx$	5, ∀-Einf.

Wie man sehen kann, ist der in **31b** von Zeile (2) bis (7) geführte Unterbeweis mit **34b** identisch, und der in **32b** von Zeile (2) bis (8) geführte Unterbeweis ist mit **33b** identisch. Ebenso ist der in **33a** von Zeile (1) bis (7) geführte Unterbeweis mit **32a** identisch und der in **34a** von Zeile (1) bis (7) geführte Unterbeweis ist mit **31a** identisch. Wir hätten die ganze Angelegenheit also durch geschicktes Anwenden der Folge-Einführungsregel abkürzen können.

Diese wechselseitige Definierbarkeit der beiden Quantoren hat zur Konsequenz, dass auch die folgenden zu Gruppen geordneten Sätze der Umgangssprache jeweils in Hinsicht auf ihre logische Formalisierung äquivalent sind:

»**Alle** sind beleidigt«
»**Jeder** ist beleidigt«
»Es gibt **nicht einen**, der **nicht** beleidigt ist«
»Es gibt **keinen**, der **nicht** beleidigt ist«

»**Alle** sind damit **nicht** einverstanden«
»**Jeder** ist damit **nicht** einverstanden«
»Es gibt **nicht einen**, der damit einverstanden ist«
»**Keiner** ist damit einverstanden«

»**Nicht alle** sind beleidigt«
»**Nicht jeder** ist beleidigt«
»Es gibt **einige**, die **nicht** beleidigt sind«
»**Manche** sind **nicht** beleidigt«

»**Nicht alle** sind damit **nicht** einverstanden«
»**Nicht jeder** ist damit **nicht** einverstanden«
»Es gibt **einige**, die damit einverstanden sind«
»**Manche** sind damit einverstanden«

Diese bereits in der Umgangssprache möglichen **Äquivalenzumformungen** lassen sich verallgemeinern. Allerdings sparen wir uns hier eine allgemeine Formulierung, weil man dabei nämlich auf zu viele syntaktische Feinheiten der Umgangssprache achten muss. Man sieht auch so schon, wie der Hase läuft.

Dass diese Äquivalenzumformungen erlaubt sind, ist bei der logischen Rekonstruktion umgangssprachlicher Argumente sehr hilfreich. Denn es entscheidet sich schon bei der Formalisierung der Prämissen und der Konklusion, welche prädikatenlogischen Regeln zuerst zum Einsatz kommen müssen, wenn es darum geht, die Gültigkeit des betreffenden Arguments nachzuweisen. Nun kann man natürlich jederzeit auf die Beweise **31a** bis **34b** zurückgreifen; und in diesem Sinne ist es ganz gleich, welchen Quantor man bei der Formalisierung gebraucht. Aber je nachdem, welche prädikatenlogischen Regeln zuerst greifen, fällt der Nachweis, dass das Argument gültig ist, kürzer oder umständlicher aus.

Darum empfiehlt es sich, schon bei der Formalisierung vorauszudenken und die umgangssprachlichen Sätze noch in der Umgangssprache entsprechend zu paraphrasieren.

→ **Übungen I und J**

19. Sätze mit mehreren Quantoren

In diesem Kapitel werden wir Sätze, in denen mehrere Quantoren vorkommen, einer genaueren Betrachtung unterziehen. Insbesondere werden wir unser Augenmerk dabei auf Sätze richten, die jeweils eine Kombination aus Existenz- und Allquantor enthalten. Mit diesen Betrachtungen sind zwei Ziele verbunden: Einerseits wird es darum gehen, einen subtilen Bedeutungsunterschied herauszupräparieren, dessen Missachtung desaströse Konsequenzen haben kann und der etwas mit der Reihenfolge zu tun hat, in der Existenz- und Allquantoren hintereinandergeschaltet werden. Andererseits wird es darum gehen, die geniale Auflösung eines Problems vorzustellen und zu erläutern, das unsere bisherigen Bemühungen um einen Kanon logisch gültiger Regeln auf den ersten Blick zu untergraben droht. Doch bevor wir uns diesem Problem und seiner erfolgreichen Auflösung zuwenden, wollen wir uns zunächst der erstgenannten Aufgabe widmen und herausarbeiten, was sich Instruktives über die Bedeutung von Sätzen sagen lässt, in denen mehrere Quantoren vorkommen.

Wir haben bereits Sätze mit mehreren Allquantoren und Sätze mit mehreren Existenzquantoren kennen gelernt. Unsere Beispiele waren:

$\forall x \forall y$(x verursacht $y \rightarrow x$ geht y zeitlich voraus).
$\exists x \exists y$(x hat y gestohlen).

Betrachten wir den zweiten Satz. Diesen Satz gewinnen wir, indem wir zunächst sukzessive alle Vorkommnisse singulärer Terme in dem folgenden Satz der Form »G*mn*« durch Variablen ersetzen:

Der Fuchs hat die Gans gestohlen.

Wir erhalten so den offenen Satz:

x hat y gestohlen.

Die ungebundenen Variablen werden nun durch jeweils einen Existenzquantor gebunden, und wir erhalten schließlich den fraglichen Existenzsatz:

$\exists x \exists y$(x hat y gestohlen).

Nichts hält uns jedoch davon ab, ausgehend von dem gerade angeführten offenen Satz stattdessen die folgenden Sätze zu bilden:

(i) $\exists x \forall y$(x hat y gestohlen).
(ii) $\forall x \exists y$(x hat y gestohlen).

Diese Sätze gehen aus dem genannten offenen Satz hervor, indem man dessen ungebundene Variablen durch je verschiedene Quantoren bindet. Stattdessen können wir den genannten offenen Satz aber auch wie folgt vervollständigen:

(iii) $\exists x \exists y$(x hat y gestohlen).
(iv) $\forall x \forall y$(x hat y gestohlen).

Die Sätze (i) bis (iv) unterscheiden sich in ihrer Bedeutung voneinander. Was diese vier Sätze jeweils besagen, lässt sich umgangssprachlich etwa so fassen:

(i)	$\exists x \forall y$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Es gibt jemanden, der alles gestohlen hat.
(ii)	$\forall x \exists y$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Jeder hat etwas gestohlen.
(iii)	$\exists x \exists y$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Es gibt jemanden, der etwas gestohlen hat.
(iv)	$\forall x \forall y$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Alle haben alles gestohlen.

Die Bedeutungsunterschiede zwischen diesen Sätzen sind eine unmittelbare Konsequenz der Tatsache, dass in ihnen verschiedene Kombinationen von Quantoren vorkommen, die die zwei Variablen ein und desselben offenen Satzes binden:

x hat y gestohlen.

Daran ist nichts Bemerkenswertes. Im Gegenteil: Dass sich aus dem Gebrauch unterschiedlicher Quantoren Bedeutungsunterschiede ergeben, ist gerade zu erwarten. Allerdings gibt es noch ein Paar von Sätzen, die sich in ihrer Bedeutung sowohl voneinander als auch von allen bereits genannten Sätzen unterscheiden, *obwohl* in ihnen dieselben Quantoren jeweils dieselben Variablen binden wie in den beiden erstgenannten Sätzen, (i) und (ii). Sie unterscheiden sich von diesen Sätzen allein in der *Reihenfolge* der dem offenen Satz vorgeschalteten Quantoren. Die beiden fraglichen Sätze und ihre jeweiligen umgangssprachlichen Paraphrasen sind:

(v)	$\forall y \exists x$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Alles ist von jemanden gestohlen worden.
(vi)	$\exists y \forall x$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Es gibt etwas, das alle gestohlen haben.

Satz (v) unterscheidet sich von Satz (i) allein in der Reihenfolge der Quantoren. In beiden Fällen wird die x-Variable durch einen Existenzquantor und die y-Variable durch einen Allquantor gebunden. Ebenso unterscheidet sich Satz (vi) von Satz (ii) allein in der Reihenfolge der Quantoren. Bei beiden Sätzen wird die x-Variable durch einen Allquantor und die y-Variable durch einen Existenzquantor gebunden. Vor diesem Hintergrund können wir die vier Sätze (i), (ii), (v) und (vi) neu gruppieren, indem wir sie jeweils zu Paaren zusammenfassen:

(i)	$\exists x \forall y$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Es gibt jemanden, der alles gestohlen hat.
(v)	$\forall y \exists x$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Alles ist von jemanden gestohlen worden.

und

(ii)	$\forall x \exists y$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Jeder hat etwas gestohlen.
(vi)	$\exists y \forall x$(x hat y gestohlen).	$\Leftrightarrow$	Es gibt etwas, das alle gestohlen haben.

Welche logischen Beziehungen bestehen jeweils zwischen den Sätzen dieser Paare? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zunächst die folgenden umgangssprachlichen Argumente, die jeweils unterschiedliche Folgebeziehungen zwischen den Sätzen (ii) und (vi) unterstellen:

Es gibt da etwas, das wir alle gestohlen haben.
Also hat jeder von uns etwas gestohlen.

Jeder von uns hat etwas gestohlen.
Also gibt es da etwas, das wir alle gestohlen haben.

Das erste dieser Argumente ist sicher intuitiv gültig. Wenn es da etwas gibt, das wir alle gestohlen haben – z. B. wenn wir alle an ein und demselben Raub der Kronjuwelen beteiligt gewesen sind – dann hat jeder von uns etwas gestohlen –

nämlich z. B. die Kronjuwelen. Wie verhält es sich nun aber mit dem zweiten Argument? Ist es intuitiv gültig? Wenn jeder von uns etwas gestohlen hat – z. B. Du die Kronjuwelen und ich einen Kugelschreiber – dann folgt daraus noch lange nicht, dass es da etwas gibt, was jeder von uns gestohlen hat. Du magst eine lange Diebeskarriere hinter Dir haben, bevor Du Dich an die Kronjuwelen wagst – eine Karriere, in deren Verlauf Du so manchen Gegenstand gestohlen hast – und trotzdem magst Du nie mit dem Kugelschreiber, meiner ersten und einzigen Diebesbeute, in Berührung gekommen sein. Kurz und gut: Das zweitgenannte Argument ist intuitiv ungültig.

Unsere prädikatenlogischen Regeln geben unseren Intuitionen hier Recht. In der Tat nämlich lässt sich mit den bereits bekannten Regeln zeigen, dass zwar die nachstehende Folgebeziehung jedenfalls gilt:

$\exists y \forall x \mathrm{F}xy \vdash \forall x \exists y \mathrm{F}xy$

Demgegenüber ist die Behauptung, es bestünde umgekehrt ebenfalls eine Folgebeziehung, falsch.

Der Nachweis, dass die erstgenannte Folgebeziehung tatsächlich besteht, wird durch das folgende Argument erbracht (siehe Kapitel 22, Beweis **49**):

1	(1)	$\exists y \forall x \mathrm{F}xy$	Annahme
2	(2)	$\forall x \mathrm{F}xa$	Annahme
2	(3)	$\mathrm{F}ba$	2, $\forall$-Beseitigung
2	(4)	$\exists y \mathrm{F}by$	3, $\exists$-Einführung
2	(5)	$\forall x \exists y \mathrm{F}xy$	4, $\forall$-Einführung
1	(6)	$\forall x \exists y \mathrm{F}xy$	1, 2, 5, $\exists$-Beseitigung

Der Übergang zu Zeile (5) ist legitim, weil in (2) der Term »*b*« nicht vorkommt. Im Gegensatz dazu verstößt der Versuch, zu zeigen, dass umgekehrt (1) auch aus (6) logisch folgt, gegen die Beschränkungen, denen die prädikatenlogischen Regeln unterliegen:

1	(1)	$\forall x \exists y \mathrm{F}xy$	Annahme
1	(2)	$\exists y \mathrm{F}ay$	1, $\forall$-Beseitigung
3	(3)	$\mathrm{F}ab$	Annahme
* **3**	**(4)**	$\boldsymbol{\forall x \mathrm{F}xb}$	**3, $\forall$-Einführung** *
3	(5)	$\exists y \forall x \mathrm{F}xy$	4, $\exists$-Einführung
1	(6)	$\exists y \forall x \mathrm{F}xy$	2, 3, 5, $\exists$-Beseitigung

Hier verstößt der Schritt von Zeile (3) zu Zeile (4) gegen die Vorschrift, die Regel der $\forall$-Einführung dürfe nur dann zur Anwendung kommen, wenn die Prämisse, auf die sie zugreift, von keinerlei Annahmen abhängt, in denen bereits explizit von dem beliebig gewählten Gegenstand die Rede ist, von dem diese Prämisse handelt. Prämisse (3), die den beliebig gewählten Gegenstand *a* betrifft, hängt nun aber gerade von Annahmen ab, in denen ausdrücklich von *a* die Rede ist, nämlich von sich selbst. Denn Prämisse (3) ist mit Hilfe der Annahme-Einführungsregel eigens eingeführt worden.

Wie zu Beginn dieses Kapitels angekündigt, wenden wir uns nun einem Problem zu, das unsere Bemühungen um einen Kanon logisch gültiger Regeln zu untergraben droht. Die Formulierung dieses Problems nimmt ihren Ausgang von der Beobachtung, dass es Namen gibt, die zwar in wahrheitswertfähigen Sätzen vorkommen – d.h. in Sätzen, die prinzipiell wahr oder falsch sein können – aber tatsächlich gar nichts bezeichnen. Ein Beispiel hierfür ist die Kennzeichnung »der gegenwärtige Kaiser von Deutschland«, die in dem Satz »Der gegenwärtige Kaiser von Deutschland säuft« vorkommt. Ein anderes Beispiel ist der Name »Odysseus«, der in dem Satz »Odysseus hat Hunger« vorkommt. Das Problem kann nun kurz und knapp wie folgt formuliert werden:

> Es gibt singuläre Terme, die keinen Gegenstand bezeichnen. Deshalb scheinen Sätze, in denen diese singulären Terme vorkommen, weder wahr noch falsch zu sein. Sätze, die zwar wahrheitswertfähig, aber tatsächlich weder wahr noch falsch sind, erzwingen jedoch eine Logik, in der »A v ~A« kein logisches Theorem ist. Aber wie Beweis **19** zeigt, ist »A v ~A« in der von uns entwickelten Logik ein logisches Theorem.

Die Sorge ist also, dass Sätze, in denen derartige **leere Namen** vorkommen, sich als **weder wahr noch falsch** herausstellen. Denn, so scheint es auf den ersten Blick jedenfalls, solchen Sätzen gelingt es weder, etwas Wahres über einen Gegenstand zu sagen, noch, etwas Falsches über einen Gegenstand zu sagen. Im angenommenen Fall gibt es nämlich gar keinen Gegenstand, von dem sie etwas Wahres oder Falsches aussagen könnten. Nehmen wir an, »*k*« sei ein leerer Name und »F*k*« in der Tat ein Satz, der weder wahr noch falsch ist. Aus der Wahrheitstafel für die Negation ergibt sich nun, dass im angenommenen Fall »~F*k*« ebensowenig wahr ist:

A	~A
W	F
F	W

Wenn nun aber weder »F*k*« noch »~F*k*« wahr sind, dann ergibt sich aus der Wahrheitstafel für die Disjunktion, dass »F*k* v ~F*k*« ebensowenig wahr ist, denn die Wahrheit einer Disjunktion erfordert die Wahrheit mindestens eines ihrer Disjunkte:

A	B	A v B
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Nun hatten wir aber bereits mit Hilfe aussagenlogischer Regeln bewiesen, dass alle Sätze der aussagenlogischen Form »A v ~A« logisch wahre Sätze, nämlich logische Theoreme sind:

Beweis 19: ⊢ **A v ~A**

1	(1)	~(A v ~A)	Annahme
2	(2)	A	Annahme
2	(3)	A v ~A	2, v-Einführung
1,2	(4)	(A v ~A) & ~(A v ~A)	1, 3, &-Einführung
1	(5)	~A	2, 4, Reductio ad absurdum
1	(6)	A v ~A	5, v-Einführung
1	(7)	(A v ~A) & ~(A v ~A)	1, 6, &-Einführung
	(8)	~~(A v ~A)	1, 7, Reductio ad absurdum
	(9)	A v ~A	8, Doppelte-Negations-Beseitigung

Es hat also den Anschein, als lieferten unsere aussagenlogischen Regeln ein falsches Ergebnis. Denn obwohl der Satz »F*k* v ~F*k*« die aussagenlogische Form »A v ~A« aufweist, ist er laut Voraussetzung weder wahr noch falsch, also jedenfalls nicht logisch wahr. Wenn dies jedoch so ist, dann können nicht alle aussagenlogischen Regeln, die im Beweis **19** zur Anwendung kommen, logisch gültig sein. Was nun?

Es liegt auf der Hand, was jemand sagen muss, der an der logischen Gültigkeit der fraglichen Regeln festhält: Er muss entweder behaupten, logische Regeln seien auf Sätze mit leeren Namen nicht anwendbar, oder andernfalls bestreiten, dass Sätze wie »Der gegenwärtige Kaiser von Deutschland säuft« weder wahr noch falsch sind.

Die erste Option ist wenig attraktiv. Denn selbst wenn ein Satz einen Namen enthält, der *de facto* nichts bezeichnet, so büßt dieser Satz darum noch nicht bereits seine **Wahrheitswertfähigkeit** ein. Das heißt, es gibt desungeachtet denkmögliche Umstände, in denen dieser Satz wahr oder falsch ist – denkmögliche Umstände nämlich, in denen der fragliche Name etwas bezeichnet. (Demgegenüber gibt es keine denkmöglichen Umstände, in denen der Satz »Wie spät ist es?« wahr oder falsch ist.) Die hier in Rede stehende Option läuft also auf die Behauptung hinaus, logische Regeln besäßen nicht für alle wahrheitswertfähigen Sätze Gültigkeit. Wie erklärt man dann aber beispielsweise, dass es hier und heute tatsächlich so ist, dass, wenn »F*k*« wahr wäre, dann auch »F*k* v es regnet« wahr wäre, gleichgültig, was sonst noch der Fall oder nicht der Fall wäre? Und dass es hier und heute so ist, dass, wenn »~~F*k*« wahr wäre, »F*k*« jedenfalls wahr wäre? Wie es scheint, haben wir darauf keine andere Antwort parat als die, dass hier und heute »F*k* v es regnet« logisch aus »F*k*« folgt und dass hier und heute »F*k*« logisch aus »~~F*k*« folgt. Diese Antwort verböte sich aber, wenn ein Satz wie »F*k*« de facto in gar keinen logischen Beziehungen zu anderen Sätzen stünde.

Uns bleibt also nur die zweite Option: Solange wir an unseren logischen Regeln festhalten, müssen wir bestreiten, dass Sätze wie »Der gegenwärtige Kaiser von Deutschland säuft« weder wahr noch falsch sind. Wie können wir diese Haltung plausibilisieren? Da solche Sätze jedenfalls nicht wahr sind, müssen sie folglich falsch sein. Eine Nominalphrase zu enthalten, die gar keinen Gegenstand bezeichnet, muss demnach als eine Art und Weise verstanden werden, in der ein Satz falsch sein kann. (Die andere Art und Weise ist freilich die, einem bezeichneten

Gegenstand eine Eigenschaft zuzuschreiben, die dieser nicht hat.) Wie aber können wir uns klarmachen, dass Gegenstandslosigkeit eine Form der Falschheit ist?

Hier kommt nun die **Theorie der Kennzeichnungen** des britischen Philosophen und Mathematikers Bertrand Russell (1872–1970) ins Spiel. Dieser Theorie zufolge hat ein Satz wie:

Der gegenwärtige Kaiser von Deutschland säuft.

allem Anschein zum Trotz nicht die prädikatenlogische Form »F*m*«, sondern ist stattdessen wie folgt zu analysieren:

$\exists x$[x ist ein gegenwärtiger Kaiser von Deutschland & x säuft &
$\forall y$(y ist ein gegenwärtiger Kaiser von Deutschland $\rightarrow y = x$)].

Nach Russell hat also der Satz »Der gegenwärtige Kaiser von Deutschland säuft« die komplexe logische Form

$\exists x[(\mathrm{F}xm \ \& \ \mathrm{G}x \ \& \ \forall y(\mathrm{F}ym \rightarrow x = y))]$

und besagt soviel wie:

Es gibt mindestens einen Gegenstand x, der ein Kaiser von Deutschland ist und säuft, so dass ferner für jeden Gegenstand y, der ein Kaiser von Deutschland ist, gilt, dass y mit x identisch ist.

Die eingebaute Allquantifizierung hat den Zweck sicherzustellen, dass es *höchstens* einen Gegenstand gibt, der Kaiser von Deutschland ist. Denn gäbe es mehrere Kaiser von Deutschland, könnte von *dem* Kaiser von Deutschland kaum die Rede sein. Die eingebaute Allquantifizierung soll also dem *bestimmten Artikel* Rechnung tragen, der in dem ursprünglichen Satz »Der gegenwärtige Kaiser von Deutschland säuft« vorkommt. Sie leistet dies, indem sie eine **Einzigkeitsbedingung** formuliert. Würde diese Allquantifizierung fehlen, könnte Russell nicht für sich beanspruchen, den Inhalt dieses Satzes angemessen wiedergegeben zu haben.

Russells Theorie der Kennzeichnungen zufolge enthält die formalsprachliche Übersetzung umgangssprachlicher Sätze, in denen leere Namen vorkommen, gar keinen diesem Namen entsprechenden singulären Term mehr. (Wenn man sich auf diesen Sprachgebrauch festlegen wollte, könnte man stattdessen auch sagen, der Russellschen Theorie zufolge enthielten die fraglichen Sätze der Umgangssprache eigentlich gar keine singulären Terme, sondern erweckten nur den Anschein. Aber an dieser Wortwahl hängt letztlich nichts.) Die formalsprachliche Übersetzung ist ein komplexer Existenzsatz, in dem nur Prädikate vorkommen.

Auch Sätze wie »Odysseus hat Hunger« sind nach Russell als komplexe Existenzsätze zu analysieren. Da sich nun aber aus dem Namen »Odysseus« nicht so ohne weiteres ein entsprechendes Prädikat gewinnen lässt, von dem man dann aussagen könnte, es werde von einem und nur einem Gegenstand erfüllt, der darüber hinaus Hunger hat, muss Russell behaupten, dass der Name »Odysseus« nur dem Anschein nach ein Eigenname ist und in Wahrheit dieselbe Bedeutung hat wie eine Kennzeichnung – z. B. die Kennzeichnung »der Mann, der alle in der *Odyssee* beschriebenen Heldentaten begangen hat«. Bei leeren Namen ist diese Behauptung in der Tat gar nicht unplausibel, denn wenn es gar keinen Gegenstand gibt, den der betreffende Name bezeichnet, dann kann dieser Name ja auch nicht wie bei einer

Taufe eingeführt worden sein, sondern muss auf dem Umweg über Beschreibungen zu seiner Bedeutung gekommen sein. Der Satz »Odysseus hat Hunger« kann demnach als bedeutungsgleich mit dem folgenden Existenzsatz analysiert werden:

$\exists x$[x ist ein Mann, der alle in der *Odyssee* beschriebenen Heldentaten begangen hat & x hat Hunger & $\forall y$(y ist ein Mann, der alle in der *Odyssee* beschriebenen Heldentaten begangen hat $\rightarrow y = x$)].

Vor dem Hintergrund dieser Analyse ist es nun sehr leicht zu verstehen, warum die Sätze »Der gegenwärtige Kaiser von Deutschland säuft« und »Odysseus hat Hunger« nicht etwa weder wahr noch falsch, sondern schlicht falsch sind. Denn es gibt einfach niemanden, der alle in der Odyssee beschriebenen Heldentaten begangen hat. Und ebensowenig gibt es einen Gegenstand, der das Prädikat »ist gegenwärtiger Kaiser von Deutschland« erfüllt. Die aus diesen Sätzen gebildeten Disjunktionen der Form »A v ~A« stellen sich dementsprechend als wahr heraus. Die Gültigkeit unserer logischen Regeln ist damit bewahrt. Russell sei Dank!

In der Tat lassen sich alle definiten Kennzeichnungen in der von Russell vorgeschlagenen Weise analysieren, also auch solche, die erfolgreich einen Gegenstand bezeichnen. Damit reduziert sich die Gruppe der singulären Terme auf die Gruppe der Eigennamen, entgegen unserer anfänglichen Klassifikation (siehe Kapitel 15.2). So wie sich definite Kennzeichnungen im Zuge der logischen Analyse zum Verschwinden bringen lassen, so lassen sich auch Sätze, deren Analyse auf den ersten Blick auf Funktoren als Bauteile nicht verzichten zu können scheint, als quantifizierte Sätze analysieren, in denen anstelle von Funktoren komplexe mehrstellige Prädikate vorkommen. Statt also zu behaupten, der Satz

Die Leibspeise des Hauptmanns von Köpenick ist fettig.

sei aus den für die prädikatenlogische Analyse relevanten Funktoren »Die Leibspeise von *x*«, »der Hauptmann von *x*« sowie dem Eigennamen »Köpenick« und dem Prädikat »*x* ist fettig« aufgebaut, können wir ihn wie folgt analysieren:

$\exists x_1 \exists y_1$(x_1 ist Hauptmann von Köpenick & y_1 ist eine Leibspeise von x_1
& y_1 ist fettig & $\forall x_2$(x_2 ist Hauptmann von Köpenick $\rightarrow x_2 = x_1$)
& $\forall y_2$(y_2 ist Leibspeise von $x_1 \rightarrow y_2 = y_1$))

In diesem Existenzsatz kommen statt der Funktoren nur mehrstellige Prädikate vor. Die Gruppe der generellen Terme reduziert sich also entgegen unserer anfänglichen Klassifikation auf die Prädikate.

Bevor wir dieses Kapitel mit einer kleinen Übung abschließen, wollen wir uns noch kurz vergewissern, dass uns Russells Analyse keine beweistheoretischen Probleme bereitet, nur weil bei den formalsprachlichen Sätzen plötzlich ein Allquantor innerhalb des offenen Satzes vorkommt, dessen Variablen der Existenzquantor bindet. Wir können nämlich den Allquantor, der in diesem offenen Satz vorkommt, auch **exportieren** und direkt hinter den Existenzquantor schalten. Ebenso können wir ihn wieder **importieren**, indem wir ihn dem Teil des Prädikats vorschalten, dessen Variable er bindet. Denn es gelten die nachstehenden logischen Folgebeziehungen:

$\exists x(\mathrm{F}x \;\&\; \forall y \mathrm{G}xy) \vdash \exists x \forall y(\mathrm{F}x \;\&\; \mathrm{G}xy)$
$\exists x \forall y(\mathrm{F}x \;\&\; \mathrm{G}xy) \vdash \exists x(\mathrm{F}x \;\&\; \forall y \mathrm{G}xy)$

Demnach können wir also getrost davon ausgehen, dass wir es jeweils mit einem und nur einem, allerdings komplexen offenen Satz zu tun haben, der zwei Variablen enthält, die je durch einen Existenzquantor bzw. Allquantor gebunden werden.

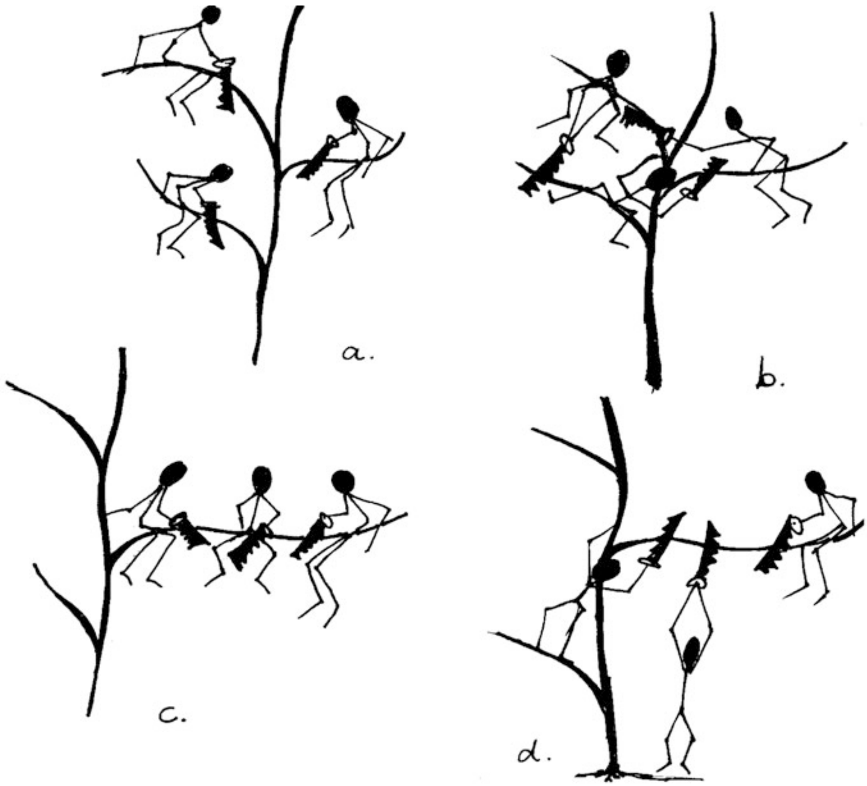
Um das Verständnis dafür zu schärfen, welche logische Struktur Sätze mit definiten Kennzeichnungen haben, und sich noch einmal klarzumachen, dass aus einem Satz der Form »$\exists x \forall y Fxy$« ein Satz der Form »$\forall y \exists x Fxy$« logisch folgt, nicht aber umgekehrt, betrachten wir die umseitige Abbildung und fragen uns, welche der Sätze (1) bis (28) durch welche der dargestellten Szenarien (a) bis (d) wahr gemacht werden. Dabei setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass es im Universum nur drei Kollegen gibt.

Bei dieser Übung wird es nicht darum gehen, die Sätze (1) bis (28) zu formalisieren und somit ihre prädikatenlogische Form anzugeben. Vielmehr geht es hier allein darum, diejenigen sprachlichen und logischen Fähigkeiten zu trainieren, die einen allererst dazu befähigen, sich an derartige Formalisierungen zu machen.

Neben der Unterscheidung zwischen bestimmten und unbestimmten Artikeln ist bei dieser Übung auch die Funktionsweise von Personalpronomina wichtig, die sich auf einen zuvor identifizierten Gegenstand rückbeziehen. Solche Personalpronomina erfüllen dieselbe Funktion wie gebundene Variablen. Und noch etwas: Man denke bei der Bearbeitung dieser Aufgabe daran, dass im Deutschen manche Relativpronomina – nämlich »der«, »die« und »das« – zwar genauso aussehen wie die bestimmten Artikel, aber natürlich eine andere Funktion erfüllen. Insbesondere versteckt sich hinter Relativpronomina – im Gegensatz zu den bestimmten Artikeln – keine Einzigkeitsbehauptung: Wenn ich sage »Dort geht ein Mann, den ich kenne«, dann impliziere ich damit keineswegs, dass es einen und nur einen Mann gibt, den ich kenne. Also: Aufgepasst!

→ **Übungen K – N**

(1) Es gibt einen Ast, den ein Kollege absägt.
(2) Es gibt einen Ast, auf dem alle Kollegen sitzen.
(3) Es gibt einen Ast, auf dem ein Kollege sitzt.
(4) Es gibt einen Ast, den alle Kollegen absägen.
(5) Es gibt einen Ast, den kein Kollege absägt.
(6) Es gibt einen Ast, den alle Kollegen absägen, die auf ihm sitzen.
(7) Es gibt einen Kollegen, der auf einem Ast sitzt, den ein Kollege absägt.
(8) Es gibt einen Kollegen, der auf einem Ast sitzt, den alle Kollegen absägen.
(9) Es gibt keinen Ast, den ein Kollege, der auf ihm sitzt, absägt.
(10) Es gibt einen Ast, den kein Kollege, der auf ihm sitzt, absägt.
(11) Auf jedem Ast sitzt ein Kollege, der ihn absägt.
(12) Auf jedem Ast, den ein Kollege absägt, sitzt ein Kollege.
(13) Der Kollege, der auf dem Ast sitzt, den alle Kollegen absägen, sägt diesen Ast ab.
(14) Den Ast, auf dem alle Kollegen sitzen, sägen alle Kollegen ab.
(15) Alle Kollegen sägen den Ast ab, auf dem ein Kollege sitzt.
(16) Jeder Kollege sägt den Ast ab, auf dem jeder Kollege sitzt.
(17) Alle Kollegen sägen einen Ast ab, auf dem ein Kollege sitzt.
(18) Jeder Kollege sägt den Ast ab, auf dem er sitzt.



(19) Jeder Kollege sitzt auf einem Ast, den ein Kollege absägt.
(20) Es gibt Kollegen, die einen Ast absägen, auf dem sie nicht sitzen.
(21) Alle Kollegen, die auf einem Ast sitzen, sägen ihn ab.
(22) Jeder Kollege sitzt auf einem Ast, den nicht alle Kollegen absägen.
(23) Es gibt einen Kollegen, der auf einem Ast sitzt, auf dem nicht alle Kollegen sitzen, die ihn absägen.
(24) Es gibt Kollegen, die auf einem Ast sitzen, den sie nicht absägen.
(25) Jeder Kollege sägt einen Ast ab, auf dem nicht alle Kollegen sitzen.
(26) Jeder Kollege sägt einen Ast ab, auf dem er nicht sitzt.
(27) Es gibt einen Kollegen, der einen Ast absägt, den alle Kollegen absägen, die nicht auf ihm sitzen.
(28) Nicht auf jedem Ast sitzt ein Kollege, der ihn absägt.

Die Auflösung steht auf Seite 157. Wer zum Abschluss noch zwei Nüsse knacken will, der bemühe sich um die Beantwortung der folgenden beiden Fragen:

Frage 1: Welcher umgangssprachliche Satz wird durch die Szenarien (a) und (d), nicht aber durch die Szenarien (b) und (c) wahr gemacht?

Frage 2: Welcher umgangssprachliche Satz wird durch die Szenarien (b) und (c), nicht aber durch die Szenarien (a) und (d) wahr gemacht?

20. Übersicht prädikatenlogischer Regeln und Folgebeziehungen

∀-Einführung	∀-Beseitigung	
$\dfrac{X \vdash Fa}{X \vdash \forall xFx}$ * * sofern »*a*« in X nicht vorkommt	$\dfrac{X \vdash \forall xFx}{X \vdash Fm}$	$\dfrac{X \vdash \forall xFx}{X \vdash Fa}$

∃-Einführung		∃-Beseitigung
$\dfrac{X \vdash Fm}{X \vdash \exists xFx}$	$\dfrac{X \vdash Fa}{X \vdash \exists xFx}$	$\dfrac{X \vdash \exists xFx \qquad Y, Fa \vdash C}{X, Y \vdash C}$ * * sofern »*a*« weder in Y noch in C vorkommt

(allspezialisierender) **Modus ponendo ponens**	(allspezialisierender) **Modus tollendo tollens**
$\dfrac{X \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \qquad Y \vdash Fm}{X, Y \vdash Gm}$	$\dfrac{X \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \qquad Y \vdash {\sim}Gm}{X, Y \vdash {\sim}Fm}$

(allspezialisierender) **Modus ponendo tollens**	(allspezialisierender) **Modus tollendo ponens**
$\dfrac{X \vdash \forall x{\sim}(Fx \,\&\, Gx) \qquad Y \vdash Fm}{X, Y \vdash {\sim}Gm}$	$\dfrac{X \vdash \forall x(Fx \vee Gx) \qquad Y \vdash {\sim}Fm}{X, Y \vdash Gm}$

Auflösung der Frage von S. 156:
1abcd, 2 c, 3abcd, 4cd, 5cd, 6acd, 7abcd, 8cd, 9 b, 10bcd, 11 a, 12abcd, 13 d, 14 c, 15cd, 16 c, 17abcd, 18ac, 19abc, 20bd, 21acd, 22ab, 23bd, 24 b, 25abd, 26 b, 27cd, 28bcd

Antwort 1: Es gibt mindestens einen Kollegen, der den Ast absägt, auf dem er allein sitzt.
Antwort 2: Jeder Kollege sitzt auf einem Ast, den ein anderer Kollege absägt.

(existenzgeneralisierender) **Modus ponendo ponens**	(monoton-existenzgeneralisierender) **Modus ponendo ponens**
$\dfrac{X \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \quad Y \vdash \exists xFx}{X, Y \vdash \exists xGx}$	$\dfrac{X \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \quad Y \vdash \exists x(Fx \,\&\, Hx)}{X, Y \vdash \exists x(Gx \,\&\, Hx)}$

(allquantifizierter) **Modus ponendo ponens**	(allquantifizierte) **Transitivität**
$\dfrac{X \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \quad Y \vdash \forall xFx}{X, Y \vdash \forall xGx}$	$\dfrac{X \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \quad Y \vdash \forall x(Gx \rightarrow Hx)}{X, Y \vdash \forall x(Fx \rightarrow Hx)}$

Interdefinitionen der Quantoren	
$\exists xFx \vdash \sim\forall x\sim Fx$	$\sim\forall x\sim Fx \vdash \exists xFx$
$\exists x\sim Fx \vdash \sim\forall xFx$	$\sim\forall xFx \vdash \exists x\sim Fx$
$\forall xFx \vdash \sim\exists x\sim Fx$	$\sim\exists x\sim Fx \vdash \forall xFx$
$\forall x\sim Fx \vdash \sim\exists xFx$	$\sim\exists xFx \vdash \forall x\sim Fx$

Äquivalenzumformungen	
$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \sim\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	$\sim\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$
$\exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \vdash \exists x(Fx \,\&\, Gx)$
$\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx) \vdash \sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$
$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \vdash \sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	$\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$

Distributionsgesetze	
$\forall x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \forall xFx \,\&\, \forall xGx$	$\forall xFx \,\&\, \forall xGx \vdash \forall x(Fx \,\&\, Gx)$
$\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists xFx \vee \exists xGx$	$\exists xFx \vee \exists xGx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$

Distributionsgesetze	
$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall xFx \rightarrow \forall xGx$	$\exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \exists xFx \,\&\, \exists xGx$
$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists xFx \rightarrow \exists xGx$	

∃-Importation	**∃-Exportation**
$\forall x\exists y(Fx \rightarrow Gxy) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \exists yGxy)$	$\forall x(Fx \rightarrow \exists yGxy) \vdash \forall x\exists y(Fx \rightarrow Gxy)$

∀-Importation	**∀-Exportation**
$\exists x\forall y(Fx \,\&\, Gxy) \vdash \exists x(Fx \,\&\, \forall yGxy)$	$\exists x(Fx \,\&\, \forall yGxy) \vdash \exists x\forall y(Fx \,\&\, Gxy)$

(einseitige) **Quantoren-Vertauschung**
$\exists x\forall yFxy \vdash \forall y\exists xFxy$

21. Kurzer Leitfaden fürs Beweisen: Prädikatenlogik

Wie wir gesehen haben, ermöglichen uns die Quantorenregeln, von quantifizierten Sätzen zu aussagenlogischen Verknüpfungen hinabzusteigen, auf diese dann aussagenlogische Regeln anzuwenden, um anschließend wieder zu quantifizierten Sätzen aufzusteigen. Zwar ist dieser Ab- und Wiederaufstieg nicht immer möglich, weshalb die ∀-Einführungsregel und die ∃-Beseitigungsregel gewissen Beschränkungen unterliegen. Trotz dieser Beschränkungen bleibt es jedoch dabei, dass in prädikatenlogische Beweise aussagenlogische Beweise eingebaut sind. Aus diesem Grund ist der in Kapitel 13 entwickelte Leitfaden fürs aussagenlogische Beweisen auch für die Prädikatenlogik einschlägig. Womit wir uns hier demnach nur befassen müssen, ist die Frage, wie wir den Abstieg von und Wiederaufstieg zu quantifizierten Sätzen am geschicktesten einleiten – insbesondere dann, wenn wir es mit Sätzen zu tun haben, die mehrere Quantoren enthalten. Zu diesem Zweck stellen wir eine Reihe von Faustregeln auf:

1. Man bemühe sich beim Formalisieren möglichst darum, Negationen von quantifizierten Sätzen zu vermeiden. Dabei sollte man sein Sprachgefühl und den Umstand nutzen, dass die Umgangssprache verschiedene, aber äquivalente Formulierungen erlaubt (siehe Kapitel 18).

2. Man überprüfe zunächst, ob sich unter den Prämissen eine aussagenlogische Verknüpfung findet, als deren Teilsatz die Konklusion selbst oder der Satz erscheint, den die Konklusion negiert bzw. der selbst die Negation der Konklusion ist.
3. Wenn ja, dann sollte man versuchen, die Konklusion mit Hilfe aussagenlogischer Regeln aus den Prämissen abzuleiten.
4. Wenn nicht, dann sollte man überprüfen, ob die Prämissen mehrere Quantoren enthalten! Wenn ja, dann sollte man die in Kapitel 20 aufgeführten Exportationsregeln anwenden, wo immer dies möglich ist.
5. Anschließend beseitige man die Allquantoren aller Allsätze, die sich unter den Prämissen finden.
6. Wenn sich unter den Prämissen Existenzsätze finden, dann sollte man anschließend die für eine ∃-Beseitigung erforderlichen Zusatzannahmen machen.
7. Man wiederhole Schritte 5 und 6 in Bezug auf alle All- bzw. Existenzsätze, die sich aus den Schritten 4 bis 6 ergeben.
8. Man überprüfe jedesmal, ob sich die Konklusion mittlerweile mit Hilfe der aussagenlogischen Regeln und der Quantoreneinführungsregeln folgern lässt. Wenn ja, sollte man nicht vergessen, die ∃-Beseitigungsregel anzuwenden und alle Zusatzannahmen aufzugeben, die zum Zwecke dieser Anwendung gemacht werden mussten.
9. Ist die Konklusion die Negation eines quantifizierten Satzes, dann sollte man den quantifizierten Satz annehmen, den die Konklusion negiert, und dann im Laufe des Beweises die Regel Reductio ad absurdum auf ihn anwenden. Die Hoffnung dabei ist, aus dieser Annahme mit Hilfe logischer Regeln einen Satz zu folgern, der mit den Prämissen in Widerspruch gerät. (Ein Beweis, der dies illustriert, ist **31a**).
10. Findet sich unter den Prämissen die Negation eines Allsatzes, dann sollte man die Negation der Konklusion bzw. denjenigen Satz annehmen, dessen Negation die Konklusion ist, und dann im Laufe des Beweises die Regel Reductio ad absurdum anwenden. Die Hoffnung ist, aus dieser Annahme den Allsatz zu folgern, dessen Negation die betreffende Prämisse ist. (Ein Beweis, der dies illustriert, ist **32b**).
11. Findet sich unter den Prämissen die Negation eines Existenzsatzes, dann sollte man einen Satz über einen beliebigen Gegenstand annehmen, aus dem man denjenigen Existenzsatz folgern kann, den die betreffende Prämisse negiert. Im Laufe des Beweises sollte man dann die Regel Reductio ad absurdum auf ihn anwenden. Die Hoffnung ist, aus der Widerlegung dieser Annahme die Konklusion zu folgern. (Ein Beweis, der dies illustriert, ist **34b**).
12. Bei Befolgen dieser Faustregeln sollte man zudem stets in Erinnerung behalten, dass Beweise Unterbeweise haben, in Bezug auf die sich die Frage, welche Faustregeln anzuwenden sind, erneut stellt. (Ein Beweis, der dies illustriert, ist **31b**).

Auch dieser Leitfaden für die strategisch günstige Anwendung prädikatenlogischer Regeln liefert keine Blaupause für Beweise. Die aufgeführten Faustregeln sollen nur dabei helfen, ausgehend von der prädikatenlogischen Form von Prämissen und Konklusion einen Ansatz für solche Beweise zu finden.

22. Beweise einiger wichtiger Theoreme und Folgebeziehungen

Beweis 24: $\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x), \mathrm{F}m \vdash \mathrm{G}m$ ***(allspezialisierender MPP)***

1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$	Annahme
2	(2)	$\mathrm{F}m$	Annahme
1	(3)	$\mathrm{F}m \rightarrow \mathrm{G}m$	1, ∀-Beseitigung
1,2	(4)	$\mathrm{G}m$	2, 3, MPP

Jeder, der teilnehmen will, muss einen Beitrag leisten. Du willst teilnehmen. Also musst Du einen Beitrag leisten.

Beweis 25: $\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x), \sim\mathrm{G}m \vdash \sim\mathrm{F}m$ ***(allspezialisierender MTT)***

1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$	Annahme
2	(2)	$\sim\mathrm{G}m$	Annahme
1	(3)	$\mathrm{F}m \rightarrow \mathrm{G}m$	1, ∀-Beseitigung
1,2	(4)	$\sim\mathrm{F}m$	2, 3, MTT

Alle Passagiere werden gefilzt. Sergeant Pepper wird nicht gefilzt. Also ist es nicht der Fall, dass Sergeant Pepper ein Passagier ist.

Beweis 26: $\forall x\sim(\mathrm{F}x \,\&\, \mathrm{G}x), \mathrm{F}m \vdash \sim\mathrm{G}m$ ***(allspezialisierender MPT)***

1	(1)	$\forall x\sim(\mathrm{F}x \,\&\, \mathrm{G}x)$	Annahme
2	(2)	$\mathrm{F}m$	Annahme
1	(3)	$\sim(\mathrm{F}m \,\&\, \mathrm{G}m)$	1, ∀-Beseitigung
1,2	(4)	$\sim\mathrm{G}m$	2, 3, MPT

Keiner ist Kanzler und Oppositionsführer zugleich. Gerd ist Kanzler. Also ist Gerd nicht Oppositionsführer.

Beweis 27: $\forall x(\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}x), \sim\mathrm{F}m \vdash \mathrm{G}m$ ***(allspezialisierender MTP)***

1	(1)	$\forall x(\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}x)$	Annahme
2	(2)	$\sim\mathrm{F}m$	Annahme
1	(3)	$\mathrm{F}m \vee \mathrm{G}m$	1, ∀-Beseitigung
1,2	(4)	$\mathrm{G}m$	2, 3, MTP

Jeder weiß es besser oder hat resigniert. Gerd weiß es nicht besser. Also hat Gerd resigniert.

Beweis 28: $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow Hx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Hx)$ ***(allquant. Transitivität)***

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\forall x(Gx \rightarrow Hx)$	Annahme
1	(3)	$Fa \rightarrow Ga$	1, ∀-Beseitigung
2	(4)	$Ga \rightarrow Ha$	2, ∀-Beseitigung
1,2	(5)	$Fa \rightarrow Ha$	3, 4, Transitivität (siehe Beweis **4**)
1,2	(6)	$\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	5, ∀-Einführung

Jede Zigarette enthält Nikotin. Alles, was Nikotin enthält, ist giftig. Demnach sind alle Zigaretten giftig.

Beweis 29: $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists xFx \vdash \exists xGx$ ***(existenzgeneralisierender MPP)***

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\exists xFx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
1	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	1, ∀-Beseitigung
1,3	(5)	Ga	3, 4, MPP
1,3	(6)	$\exists xGx$	5, ∃-Einführung
1,2	(7)	$\exists xGx$	2, 3, 6, ∃-Beseitigung

Jede Überflutung richtet Sachschäden an. Es gibt eine Überflutung. Also gibt es etwas, das Sachschäden anrichtet.

Beweis 30: $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \,\&\, Hx) \vdash \exists x(Gx \,\&\, Hx)$ ***(mon.-existenzgen. MPP)***

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\exists x(Fx \,\&\, Hx)$	Annahme
3	(3)	$Fa \,\&\, Ha$	Annahme
1	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	1, ∀-Beseitigung
3	(5)	Fa	3, &-Beseitigung
1,3	(6)	Ga	4, 5, MPP
3	(7)	Ha	3, &-Beseitigung
1,3	(8)	$Ga \,\&\, Ha$	6, 7, &-Einführung
1,3	(9)	$\exists x(Gx \,\&\, Hx)$	8, ∃-Einführung
1,2	(10)	$\exists x(Gx \,\&\, Hx)$	2, 3, 9, ∃-Beseitigung

Jedes Abenteuer birgt ein Risiko. Einige Beziehungen sind Abenteuer. Es gibt also Beziehungen, die riskant sind.

Beweis 31a: $\exists xFx \vdash {\sim}\forall x{\sim}Fx$ ***(Interdefinition)***

1	(1)	$\forall x{\sim}Fx$	Annahme
2	(2)	$\exists xFx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme

1	(4)	$\sim Fa$	1, $\forall$-Beseitigung
1,3	(5)	$Fa \mathbin{\&} \sim Fa$	3, 4, &-Einführung
3	(6)	$\sim\forall x\sim Fx$	1, 5, RAA
2	(7)	$\sim\forall x\sim Fx$	2, 3, 6, $\exists$-Beseitigung

> Nicht alles hat sowieso keine Aussichten auf Erfolg. Denn manches hat durchaus Aussichten auf Erfolg.

Beweis 31b: $\sim\forall x\sim Fx \vdash \exists xFx$ ***(Interdefinition)***

1	(1)	$\sim\forall x\sim Fx$	Annahme
2	(2)	$\sim\exists xFx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
3	(4)	$\exists xFx$	3, $\exists$-Einführung
2,3	(5)	$\exists xFx \mathbin{\&} \sim\exists xFx$	2, 4, &-Einführung
2	(6)	$\sim Fa$	3, 5, RAA
2	(7)	$\forall x\sim Fx$	6, $\forall$-Einführung
1,2	(8)	$\forall x\sim Fx \mathbin{\&} \sim\forall x\sim Fx$	1, 7, &-Einführung
1	(9)	$\sim\sim\exists xFx$	2, 8, RAA
1	(10)	$\exists xFx$	9, DN-Beseitigung

> Nicht alles hat keine Aussichten auf Erfolg. Also hat manches Aussichten auf Erfolg.

Beweis 32a: $\exists x\sim Fx \vdash \sim\forall xFx$ ***(Interdefinition)***

1	(1)	$\forall xFx$	Annahme
2	(2)	$\exists x\sim Fx$	Annahme
3	(3)	$\sim Fa$	Annahme
1	(4)	Fa	1, $\forall$-Beseitigung
1,3	(5)	$Fa \mathbin{\&} \sim Fa$	3, 4, &-Einführung
3	(6)	$\sim\forall xFx$	1, 5, RAA
2	(7)	$\sim\forall xFx$	2, 3, 6, $\exists$-Beseitigung

> Einiges stört mich nicht. Also stört mich nicht alles.

Beweis 32b: $\sim\forall xFx \vdash \exists x\sim Fx$ ***(Interdefinition)***

1	(1)	$\sim\forall xFx$	Annahme
2	(2)	$\sim\exists x\sim Fx$	Annahme
3	(3)	$\sim Fa$	Annahme
3	(4)	$\exists x\sim Fx$	3, $\exists$-Einführung
2,3	(5)	$\exists x\sim Fx \mathbin{\&} \sim\exists x\sim Fx$	2, 4, &-Einführung
2	(6)	$\sim\sim Fa$	3, 5, RAA
2	(7)	Fa	6, DN-Beseitigung
2	(8)	$\forall xFx$	7, $\forall$-Einführung
1,2	(9)	$\forall xFx \mathbin{\&} \sim\forall xFx$	1, 8, &-Einführung

1	(10)	$\sim\sim\exists x\sim Fx$	2, 9, RAA
1	(11)	$\exists x\sim Fx$	10, DN-Beseitigung

> Nicht alles stört mich. Also gibt es etwas, das mich nicht stört.

Beweis 33a: $\forall xFx \vdash \sim\exists x\sim Fx$ ***(Interdefinition)***

1	(1)	$\forall xFx$	Annahme
2	(2)	$\exists x\sim Fx$	Annahme
3	(3)	$\sim Fa$	Annahme
1	(4)	Fa	1, ∀-Beseitigung
1,3	(5)	$Fa \;\&\; \sim Fa$	3, 4, &-Einführung
3	(6)	$\sim\forall xFx$	1, 5, RAA
2	(7)	$\sim\forall xFx$	2, 3, 6, ∃-Beseitigung
1,2	(8)	$\forall xFx \;\&\; \sim\forall xFx$	1, 7, &-Einführung
1	(9)	$\sim\exists x\sim Fx$	2, 8, RAA

> Alles ist mit sich selbst identisch. Demnach gibt es nicht ein Ding, das nicht mit sich selbst identisch ist.

Beweis 33b: $\sim\exists x\sim Fx \vdash \forall xFx$ ***(Interdefinition)***

1	(1)	$\sim\exists x\sim Fx$	Annahme
2	(2)	$\sim Fa$	Annahme
2	(3)	$\exists x\sim Fx$	2, ∃-Einführung
1,2	(4)	$\exists x\sim Fx \;\&\; \sim\exists x\sim Fx$	1, 3, &-Einführung
1	(5)	$\sim\sim Fa$	2, 4, RAA
1	(6)	Fa	5, DN-Beseitigung
1	(7)	$\forall xFx$	6, ∀-Einführung

> Es gibt nicht ein Ding, das nicht schon sein Interesse geweckt hat. Folglich hat schon alles sein Interesse geweckt.

Beweis 34a: $\forall x\sim Fx \vdash \sim\exists xFx$ ***(Interdefinition)***

1	(1)	$\forall x\sim Fx$	Annahme
2	(2)	$\exists xFx$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
1	(4)	$\sim Fa$	1, ∀-Beseitigung
1,3	(5)	$Fa \;\&\; \sim Fa$	3, 4, &-Einführung
3	(6)	$\sim\forall x\sim Fx$	1, 5, RAA
2	(7)	$\sim\forall x\sim Fx$	2, 3, 6, ∃-Beseitigung
1,2	(8)	$\forall x\sim Fx \;\&\; \sim\forall x\sim Fx$	1, 7, &-Einführung
1	(9)	$\sim\exists xFx$	2, 8, RAA

> Jeder ist ungeeignet. Kurz, es gibt nicht einen, der geeignet ist.

Beweis 34b: $\sim\exists x Fx \vdash \forall x{\sim}Fx$ ***(Interdefinition)***

1	(1)	$\sim\exists x Fx$	Annahme
2	(2)	Fa	Annahme
2	(3)	$\exists x Fx$	2, ∃-Einführung
1,2	(4)	$\exists x Fx \mathbin{\&} \sim\exists x Fx$	1, 3, &-Einführung
1	(5)	$\sim Fa$	2, 4, RAA
1	(6)	$\forall x{\sim}Fx$	5, ∀-Einführung

Es ist nicht der Fall, dass es etwas Lohnendes gibt. Das heißt: Alles, was es gibt, lohnt nicht.

Beweis 35: $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x Fx \vdash \forall x Gx$ ***(allquantifizierter MPP)***

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\forall x Fx$	Annahme
1	(3)	$Fa \rightarrow Ga$	1, ∀-Beseitigung
2	(4)	Fa	2, ∀-Beseitigung
1,2	(5)	Ga	3, 4, MPP
1,2	(6)	$\forall x Gx$	5, ∀-Einführung

Alles, was schiefgehen kann, geht auch schief. Alles kann schiefgehen. Also geht alles schief.

Beweis 36: $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x Fx \rightarrow \forall x Gx$ ***(Distributionsgesetz)***

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\forall x Fx$	Annahme
1,2	(3)	$\forall x Gx$	1,2, Folge, **Beweis 35**
1	(4)	$\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx$	2, 3, →-Einführung

Jeder, der ungeschützt Sex hat, hat ein erhöhtes Ansteckungsrisiko. Wenn also alle ungeschützt Sex haben, dann haben auch alle ein erhöhtes Ansteckungsrisiko.

Beweis 37: $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x Fx \rightarrow \exists x Gx$ ***(Distributionsgesetz)***

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\exists x Fx$	Annahme
1,2	(3)	$\exists x Gx$	1, 2, Folge, **Beweis 29**
1	(4)	$\exists x Fx \rightarrow \exists x Gx$	2, 3, →-Einführung

Wer anderen eine Grube gräbt, fällt selbst hinein. Wenn es also jemanden gibt, der anderen eine Grube gräbt, dann gibt es auch jemanden, der in eine Grube fällt.

Beweis 38a: $\forall x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \forall xFx \,\&\, \forall xGx$ ***(Distributionsgesetz)***

1	(1)	$\forall x(Fx \,\&\, Gx)$	Annahme
1	(2)	$Fa \,\&\, Ga$	1, $\forall$-Beseitigung
1	(3)	Fa	2, &-Beseitigung
1	(4)	$\forall xFx$	3, $\forall$-Einführung
1	(5)	Ga	2, &-Beseitigung
1	(6)	$\forall xGx$	5, $\forall$-Einführung
1	(7)	$\forall xFx \,\&\, \forall xGx$	4, 6, &-Einführung

Alles ist schrecklich, aber unabänderlich. Demnach ist alles schrecklich. Und alles ist unabänderlich.

Beweis 38b: $\forall xFx \,\&\, \forall xGx \vdash \forall x(Fx \,\&\, Gx)$ ***(Distributionsgesetz)***

1	(1)	$\forall xFx \,\&\, \forall xGx$	Annahme
1	(2)	$\forall xFx$	1, &-Beseitigung
1	(3)	Fa	2, $\forall$-Beseitigung
1	(4)	$\forall xGx$	1, &-Beseitigung
1	(5)	Ga	4, $\forall$-Beseitigung
1	(6)	$Fa \,\&\, Ga$	3, 5, &-Einführung
1	(7)	$\forall x(Fx \,\&\, Gx)$	6, $\forall$-Einführung

Alles ist sowohl unausweichlich als auch unabänderlich. Denn einerseits ist alles unausweichlich und andererseits ist alles unabänderlich.

Beweis 39a: $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists xFx \vee \exists xGx$ ***(Distributionsgesetz)***

1	(1)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	Annahme
2	(2)	$Fa \vee Ga$	Annahme
3	(3)	Fa	Annahme
3	(4)	$\exists xFx$	3, $\exists$-Einführung
3	(5)	$\exists xFx \vee \exists xGx$	4, v-Einführung
6	(6)	Ga	Annahme
6	(7)	$\exists xGx$	6, $\exists$-Einführung
6	(8)	$\exists xFx \vee \exists xGx$	7, v-Einführung
2	(9)	$\exists xFx \vee \exists xGx$	2, 3, 5, 6, 8, v-Beseitigung
1	(10)	$\exists xFx \vee \exists xGx$	1, 2, 9, $\exists$-Beseitigung

Es gibt hier manche, die lügen oder sich einen Scherz erlauben. Also mindestens eines von beidem trifft zu: Einige lügen, oder einige erlauben sich einen Scherz.

Beweis 39b: $\exists xFx \vee \exists xGx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$ ***(Distributionsgesetz)***

1	(1)	$\exists xFx \vee \exists xGx$	Annahme
2	(2)	$\exists xFx$	Annahme

3	(3)	F*a*	Annahme
3	(4)	F*a* v G*a*	3, v-Einführung
3	(5)	∃*x*(F*x* v G*x*)	4, ∃-Einführung
2	(6)	∃*x*(F*x* v G*x*)	2, 3, 5, ∃-Beseitigung
7	(7)	∃*x*G*x*	Annahme
8	(8)	G*a*	Annahme
8	(9)	F*a* v G*a*	8, v-Einführung
8	(10)	∃*x*(F*x* v G*x*)	9, ∃-Einführung
7	(11)	∃*x*(F*x* v G*x*)	7, 8, 10, ∃-Beseitigung
1	(12)	∃*x*(F*x* v G*x*)	1, 2, 6, 7, 11, v-Beseitigung

Manche haben wirklich Angst oder verhalten sich wenigstens so, als hätten sie Angst. Denn entweder stimmt es, dass es hier einige gibt, die wirklich Angst haben, oder es stimmt, dass es hier wenigstens einige gibt, die sich so verhalten, als hätten sie Angst.

Beweis 40: ∃*x*(F*x* & G*x*) ⊢ ∃*x*F*x* & ∃*x*G*x* ***(Distributionsgesetz)***

1	(1)	∃*x*(F*x* & G*x*)	Annahme
2	(2)	F*a* & G*a*	Annahme
2	(3)	F*a*	2, &-Beseitigung
2	(4)	∃*x*F*x*	3, ∃-Einführung
2	(5)	G*a*	2, &-Beseitigung
2	(6)	∃*x*G*x*	5, ∃-Einführung
2	(7)	∃*x*F*x* & ∃*x*G*x*	4, 6, &-Einführung
1	(8)	∃*x*F*x* & ∃*x*G*x*	1, 2, 7, ∃-Beseitigung

Jemand hat geschossen und ist jetzt mausetot. Folglich hat jemand geschossen. Und jemand ist jetzt mausetot.

Beweis 41a: ∀*x*(F*x* → G*x*) ⊢ ~∃*x*(F*x* & ~G*x*) ***(Äquivalenzumformung)***

1	(1)	∀*x*(F*x* → G*x*)	Annahme
2	(2)	∃*x*(F*x* & ~G*x*)	Annahme
3	(3)	F*a* & ~G*a*	Annahme
1	(4)	F*a* → G*a*	1, ∀-Beseitigung
1	(5)	~(F*a* & ~G*a*)	4, Folge, **Beweis 11a**
1,3	(6)	(F*a* & ~G*a*) & ~(F*a* & ~G*a*)	3, 5, &-Einführung
3	(7)	~∀*x*(F*x* → G*x*)	1, 6, RAA
2	(8)	~∀*x*(F*x* → G*x*)	2, 3, 7, ∃-Beseitigung
1,2	(9)	∀*x*(F*x* → G*x*) & ~∀*x*(F*x* → G*x*)	1, 8, &-Einführung
1	(10)	~∃*x*(F*x* & ~G*x*)	2, 9, RAA

Alle, die sich um den Job beworben haben, werden auch interviewt. Es gibt also niemanden, der sich zwar um den Job beworben hat, aber nicht interviewt wird.

Beweis 41b: $\sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$ ***(Äquivalenzumformung)***

1	(1)	$\sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx)$	Annahme
2	(2)	$Fa \mathbin{\&} \sim Ga$	Annahme
2	(3)	$\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx)$	2, ∃-Einführung
1,2	(4)	$\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx) \mathbin{\&} \sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx)$	1, 3, &-Einführung
1	(5)	$\sim(Fa \mathbin{\&} \sim Ga)$	2, 4, RAA
1	(6)	$Fa \rightarrow Ga$	5, Folge, **Beweis 11b**
1	(7)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	6, ∀-Einführung

Nicht eine Menschenseele weit und breit, die nicht vor Angst zitterte. So zitterte denn jede Menschenseele weit und breit vor Angst.

Beweis 42a: $\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx)$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
1	(2)	$\sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx)$	1, Folge, **Beweis 41a**
	(3)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx)$	1, 2, →-Einführung

Wenn alle, die sich um den Job beworben haben, auch interviewt werden, dann gibt es keinen Bewerber, der nicht interviewt wird.

Beweis 42b: $\vdash \sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$\sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx)$	Annahme
1	(2)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	1, Folge, **Beweis 41b**
	(3)	$\sim\exists x(Fx \mathbin{\&} \sim Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	1, 2, →-Einführung

Wenn nicht ein einziger Passagier unverletzt ist, dann sind alle Passagiere verletzt.

Beweis 43a: $\exists x(Fx \mathbin{\&} Gx) \vdash \sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$ ***(Äquivalenzumformung)***

1	(1)	$\exists x(Fx \mathbin{\&} Gx)$	Annahme
2	(2)	$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	Annahme
3	(3)	$Fa \mathbin{\&} Ga$	Annahme
2	(4)	$Fa \rightarrow \sim Ga$	2, ∀-Beseitigung
3	(5)	Fa	3, &-Beseitigung
2,3	(6)	$\sim Ga$	4, 5, MPP
3	(7)	Ga	3, &-Beseitigung
2,3	(8)	$Ga \mathbin{\&} \sim Ga$	6, 7, &-Einführung
3	(9)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	3, 8, RAA
1	(10)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	1, 3, 9, ∃-Beseitigung

Manche, die sich um die Arbeit drücken, werden dennoch bezahlt. Also gehen nicht alle, die sich um die Arbeit drücken, leer aus.

Beweis 43b: $\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \vdash \exists x(Fx \;\&\; Gx)$ ***(Äquivalenzumformung)***

1	(1)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	Annahme
2	(2)	$\sim\exists x(Fx \;\&\; Gx)$	Annahme
3	(3)	$Fa \;\&\; Ga$	Annahme
3	(4)	$\exists x(Fx \;\&\; Gx)$	3, ∃-Einführung
2,3	(5)	$\exists x(Fx \;\&\; Gx) \;\&\; \sim\exists x(Fx \;\&\; Gx)$	2, 4, &-Einführung
2	(6)	$\sim(Fa \;\&\; Ga)$	3, 5, RAA
7	(7)	Fa	Annahme
2,7	(8)	$\sim Ga$	6, 7, MPT
2	(9)	$Fa \rightarrow \sim Ga$	7, 8, →-Einführung
2	(10)	$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	9, ∀-Einführung
1,2	(11)	$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \;\&\; \sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	1, 10, &-Einführung
1	(12)	$\sim\sim\exists x(Fx \;\&\; Gx)$	2, 11, RAA
1	(13)	$\exists x(Fx \;\&\; Gx)$	12, DN-Beseitigung

Nicht jeder, der arbeitslos ist, will nicht arbeiten. Es gibt also manche, die zwar keine Arbeit haben, aber gleichwohl arbeiten wollen.

Beweis 44a: $\vdash \exists x(Fx \;\&\; Gx) \rightarrow \sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$

1	(1)	$\exists x(Fx \;\&\; Gx)$	Annahme
1	(2)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	1, Folge, **Beweis 43a**
	(3)	$\exists x(Fx \;\&\; Gx) \rightarrow \sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	1, 2, →-Einführung

Wenn es Leute gibt, die obdachlos werden, obwohl sie eine akademische Ausbildung hinter sich haben, dann ist nicht jeder, der obdachlos wird, ein ungebildeter Mensch.

Beweis 44b: $\vdash \sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \rightarrow \exists x(Fx \;\&\; Gx)$

1	(1)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	Annahme
1	(2)	$\exists x(Fx \;\&\; Gx)$	1, Folge, **Beweis 43b**
	(3)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \rightarrow \exists x(Fx \;\&\; Gx)$	1, 2, →-Einführung

Wenn nicht jeder Alkoholiker unfähig ist, einer geregelten Arbeit nachzugehen, dann gibt es einige Alkoholiker, die einer geregelten Arbeit nachzugehen fähig sind.

Beweis 45a: $\exists x(Fx \;\&\; \sim Gx) \vdash \sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ ***(Äquivalenzumformung)***

1	(1)	$\exists x(Fx \;\&\; \sim Gx)$	Annahme
2	(2)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
3	(3)	$Fa \;\&\; \sim Ga$	Annahme
2	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	2, ∀-Beseitigung
3	(5)	Fa	3, &-Beseitigung
2,3	(6)	Ga	4, 5, MPP

3	(7)	$\sim Ga$	3, &-Beseitigung
2,3	(8)	$Ga \,\&\, \sim Ga$	6, 7, &-Einführung
3	(9)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	3, 8, RAA
1	(10)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	1, 3, 9, ∃-Beseitigung

Manche, die sich um Arbeit bemühen, sind nicht erfolgreich. Also sind nicht alle, die sich um Arbeit bemühen, erfolgreich.

Beweis 45b: $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$ ***(Äquivalenzumformung)***

1	(1)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
2	(2)	$\sim\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	Annahme
3	(3)	$Fa \,\&\, \sim Ga$	Annahme
3	(4)	$\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	3, ∃-Einführung
2,3	(5)	$\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx) \,\&\, \sim\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	2, 4, &-Einführung
2	(6)	$\sim(Fa \,\&\, \sim Ga)$	3, 5, RAA
7	(7)	Fa	Annahme
2,7	(8)	$\sim\sim Ga$	6, 7, MPT
2,7	(9)	Ga	8, DN-Beseitigung
2	(10)	$Fa \rightarrow Ga$	7, 9, →-Einführung
2	(11)	$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	10, ∀-Einführung
1,2	(12)	$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \,\&\, \sim\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	1, 11, &-Einführung
1	(13)	$\sim\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	2, 12, RAA
1	(14)	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	13, DN-Beseitigung

Nicht jeder, der müde ist, will schlafen. Es gibt also manche, die zwar müde sind, aber gleichwohl nicht schlafen wollen.

Beweis 46a: $\vdash \exists x(Fx \,\&\, \sim Gx) \rightarrow \sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	Annahme
1	(2)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	1, Folge, **Beweis 45a**
	(3)	$\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx) \rightarrow \sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	1, 2, →-Einführung

Wenn es Leute gibt, die zur Kur fahren, obwohl sie nicht krank sind, dann ist nicht jeder, der zur Kur fährt, auch krank.

Beweis 46b: $\vdash \sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$

1	(1)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Annahme
1	(2)	$\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	1, Folge, **Beweis 45b**
	(3)	$\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	1, 2, →-Einführung

Wenn nicht jeder, der regelmäßig Sport treibt, fit ist, dann gibt es einige, die zwar regelmäßig Sport treiben, aber trotzdem nicht fit sind.

Beweis 47a: $\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx) \vdash {\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$ ***(Äquivalenzumformung)***

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	Annahme
2	(2)	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	Annahme
3	(3)	$Fa \,\&\, Ga$	Annahme
1	(4)	$Fa \rightarrow {\sim}Ga)$	1, ∀-Beseitigung
3	(5)	Fa	3, &-Beseitigung
1,3	(6)	${\sim}Ga$	4, 5, MPP
3	(7)	Ga	3, &-Beseitigung
1,3	(8)	$Ga \,\&\, {\sim}Ga$	6, 7, &-Einführung
3	(9)	${\sim}\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	1, 8, RAA
2	(10)	${\sim}\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	2, 3, 9, ∃-Beseitigung
1,2	(11)	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx) \,\&\, {\sim}\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	1, 10, &-Einführung
1	(12)	${\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	2, 11, RAA

Alle Maulesel sind unfruchtbar. Also gibt es keinen einzigen fruchtbaren Maulesel.

Beweis 47b: ${\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$ ***(Äquivalenzumformung)***

1	(1)	${\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	Annahme
2	(2)	$Fa \,\&\, Ga$	Annahme
2	(3)	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	2, ∃-Einführung
1,2	(4)	$\exists x(Fx \,\&\, Gx) \,\&\, {\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	1, 3, &-Einführung
1	(5)	${\sim}(Fa \,\&\, Ga)$	2, 4, RAA
6	(6)	Fa	Annahme
1,6	(7)	${\sim}Ga$	5, 6, MPT
1	(8)	$Fa \rightarrow {\sim}Ga$	6, 7, →-Einführung
1	(9)	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	8, ∀-Einführung

Es gibt keine Teppiche, die fliegen können. Also sind alle Teppiche flugunfähig.

Beweis 48a: $\vdash \forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx) \rightarrow {\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	Annahme
1	(2)	${\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	Folge, **Beweis 47a**
	(3)	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx) \rightarrow {\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	1, 2, →-Einführung

Wenn alle Maulesel unfruchtbar sind, dann gibt es keinen einzigen fruchtbaren Maulesel.

Beweis 48b: $\vdash {\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$

1	(1)	${\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	Annahme
1	(2)	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	Folge, **Beweis 47b**
	(3)	${\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	1, 2, →-Einführung

Wenn es keine Teppiche gibt, die fliegen können, dann sind alle Teppiche flugunfähig.

Beweis 49: $\exists x \forall y Fxy \vdash \forall y \exists x Fxy$ ***(einseitige Quantoren-Vertauschung)***

1	(1)	$\exists x \forall y Fxy$	Annahme
2	(2)	$\forall y Fay$	Annahme
2	(3)	Fab	2, $\forall$-Beseitigung
2	(4)	$\exists x Fxb$	3, $\exists$-Einführung
2	(5)	$\forall y \exists x Fxy$	4, $\forall$-Einführung
1	(6)	$\forall y \exists x Fxy$	1, 2, 5, $\exists$-Beseitigung

Es gibt ein Virus, das allen gefährlich werden kann. Also gibt es für jeden Menschen ein Virus, das ihm gefährlich werden kann.

Beweis 50: $\vdash \exists x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \exists x Fxy$

1	(1)	$\exists x \forall y Fxy$	Annahme
1	(2)	$\forall y \exists x Fxy$	1, Folge, **Beweis 49**
	(3)	$\exists x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \exists x Fxy$	1, 2, $\rightarrow$-Einführung

Wenn es eine Sorge gibt, die alle umtreibt, dann treibt jeden eine Sorge um.

Beweis 51a: $\forall x \exists (Fx \rightarrow Gxy) \vdash \forall x (Fx \rightarrow \exists y Gxy)$ ***($\exists$-Importation)***

1	(1)	$\forall x \exists y (Fx \rightarrow Gxy)$	Annahme
1	(2)	$\exists y (Fa \rightarrow Gay)$	1, $\forall$-Beseitigung
3	(3)	$Fa \rightarrow Gab$	Annahme
4	(4)	Fa	Annahme
3,4	(5)	Gab	3, 4, MPP
3,4	(6)	$\exists y Gay$	5, $\exists$-Einführung
3	(7)	$Fa \rightarrow \exists y Gay$	4, 6, $\rightarrow$-Einführung
1	(8)	$Fa \rightarrow \exists y Gay$	2, 3, 7, $\exists$-Beseitigung
1	(9)	$\forall x (Fx \rightarrow \exists y Gxy)$	8, $\forall$-Einführung

Zu jedem Gegenstand gibt es etwas, das, wenn er ein Topf ist, ein Deckel ist, der zu ihm passt. Also gibt es für jeden Topf einen Deckel, der zu ihm passt.

Beweis 51b: $\forall x (Fx \rightarrow \exists y Gxy) \vdash \forall x \exists y (Fx \rightarrow Gxy)$ ***($\exists$-Exportation)***

1	(1)	$\forall x (Fx \rightarrow \exists y Gxy)$	Annahme
1	(2)	$Fa \rightarrow \exists y Gay$	1, $\forall$-Beseitigung
3	(3)	$\sim\exists y (Fa \rightarrow Gay)$	Annahme
3	(4)	$\forall y \sim(Fa \rightarrow Gay)$	3, Folge, **Beweis 34b**
3	(5)	$\sim(Fa \rightarrow Gab)$	4, $\forall$-Beseitigung

3	(6)	Fa & $\sim Gab$	5, Folge, **Beweis 12a**
3	(7)	Fa	6, &-Beseitigung
1,3	(8)	$\exists y Gay$	2, 7, MPP
9	(9)	Gab	Annahme
3	(10)	$\sim Gab$	6, &-Beseitigung
3,9	(11)	Gab & $\sim Gab$	9, 10, &-Einführung
9	(12)	$\sim\sim\exists y(Fa \rightarrow Gay)$	3, 11, RAA
9	(13)	$\exists y(Fa \rightarrow Gay)$	12, DN-Beseitigung
1,3	(14)	$\exists y(Fa \rightarrow Gay)$	8, 9, 13, $\exists$-Beseitigung
1,3	(15)	$\exists y(Fa \rightarrow Gay)$ & $\sim\exists y(Fa \rightarrow Gay)$	3, 14, &-Einführung
1	(16)	$\sim\sim\exists y(Fa \rightarrow Gay)$	3, 15, RAA
1	(17)	$\exists y(Fa \rightarrow Gay)$	16, DN-Beseitigung
1	(18)	$\forall x\exists y(Fx \rightarrow Gxy)$	17, $\forall$-Einführung

Zu jeder erworbenen Rheumadecke gibt es ein Pfund Kaffee gratis. Also gibt es zu jedem erworbenen Gegenstand etwas gratis, das, wenn es sich bei diesem Gegenstand um eine Rheumadecke handelt, ein Pfund Kaffee ist.