

zoelement wird beispielsweise als Kraftmesssensor benutzt, da durch den piezoelektrischen Effekt an einem solchen Element durch Druck oder Zug elektrische Spannungen erzeugt werden, die der Größe der Kraft proportional sind. Durch Nutzung des reziproken Effektes kann auch ein Aktor hergestellt werden, den man für kurzhubige, genaue Stellbewegungen nutzen kann.

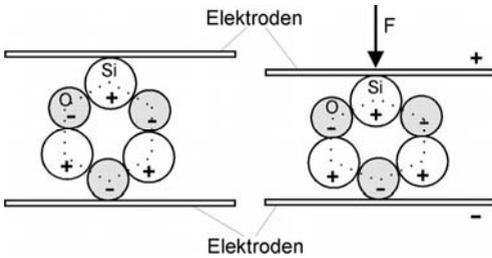


Bild 14. Elementarzelle des Quarzes ohne und mit äußerer Belastung

Im beschriebenen Beispiel können solche Piezoelemente unter Ausnutzung des piezoelektrischen Effektes als Sensor zur Registrierung von Schwingungen ausgenutzt werden, da sie ein kraftproportionales Spannungssignal liefern. Bringt man zusätzlich in den Kraftfluss ein Element ein, das den reziproken piezoelektrischen Effekt ausnutzt, so kann man eine Steifigkeitsmodulation durchführen, die gegenüber der registrierten Schwingung um 180° phasenverschoben verläuft. Das Anlegen einer Wechselspannung an ein solches Aktor-Element führt zu einer Dickenänderung des Elementes, die bei einem dünnen scheibenförmigen Element im Bereich weniger Mikrometer liegt. Legt man es zwischen Werkzeug und Werkzeughalter und legt eine Wechselspannung an, so ändert sich die Gesamtsteifigkeit der Anordnung in Kraftrichtung. Die Steifigkeitsmodulation muss natürlich von einem Rechner aufgrund der Sensorsignale exakt gesteuert werden. Als Ergebnis ist eine solche Einrichtung in der Lage, die Ratterneigung komplett zu unterdrücken, während die anderen Lösungen nur Teilaspekte in Betracht ziehen, ohne die eigentliche Ursache zu behandeln. In der Gleichung des Hooke'schen Gesetzes drückt sich dies so aus:

$$\tilde{F} = \tilde{\tilde{c}} \cdot x \tag{4}$$

Die Bezeichnung $\tilde{\tilde{c}}$ deutet an, dass die Steifigkeit gegenphasig moduliert wird. Man sieht an der Gleichung (4), dass durch die gegenphasige Modulation der Steifigkeit $\tilde{\tilde{c}}$ zum Kraftverlauf \tilde{F} die Verformung x konstant gehalten werden kann, d. h. die Schwingung verschwindet.

Durch den mechatronischen Denkansatz kann also eine generellere Lösung des Ratterproblems gefunden werden, die nicht nur einzelne Symptome behandelt und unter Umständen erheblich wirtschaftlicher arbeitet.

2 Modellbildung und Simulation

In Bild 7, Kap. 1, ist die Struktur eines mechatronischen Systems dargestellt worden. Es handelt sich in der Regel um Systeme, die rechnergesteuert unter Informationsaufnahme durch Sensoren bestimmte Bewegungen erzeugen oder Kräfte ausüben. Es geht dabei um dynamische Systeme, deren Bewegungen durch Rechneralgorithmen gesteuert und geregelt werden.

Um die Kinematik und die Dynamik eines komplexen Systems behandeln zu können und darauf aufbauend ein Steuerungs- und Regelungskonzept des Systems zu entwickeln, ist immer zuerst eine Modellbildung erforderlich. Dies ist eine in verschiedenen Schritten ablaufende Herausarbeitung der wesentlichen Systemeigenschaften, die am Ende auf die Bildung eines Satzes mathematischer Beschreibungen des Systemverhaltens (Bild 1) führt. Zu einer solchen Modellbildung gehören die Beschreibung der Lage und der Orientierung der einzelnen Körper zueinander und die Bestimmung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wie Bild 1 zeigt führt die Modellbildung von der verbalen zu einer mathematischen Beschreibung, die in der Regel durch Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen gegeben ist. Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen neben physikalischen Größen auch deren Ableitungen vorkommen können. Dies sind, in den in der Mechatronik häufig vorkommenden Bewegungs-Differentialgleichungen, beispielsweise:

- der Weg x ,
- die Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$,
- die Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

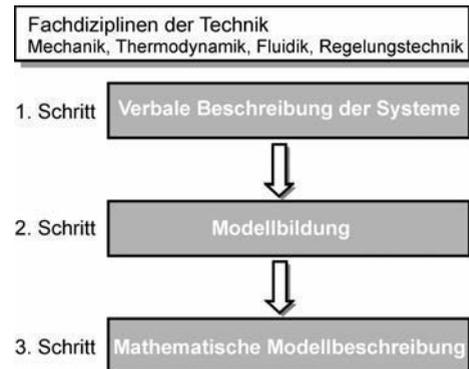


Bild 1. Vorgehensweise bei der Beschreibung physikalisch technischer Systeme

Die mathematische Modellbeschreibung ist dann zwar exakt und lässt genaue Aussagen für das Modell zu, aber die Gleichungen gelten nicht für das reale Objekt der Betrachtung, sondern für sein Modell. Dies bedeutet, dass das Modell häufig nicht exakt das reale Verhalten beschreibt und meist auch gar nicht soll.

2.1 Verfahren der Modellbildung

Modelle dienen zur Beschreibung der Eigenschaften und der Struktur eines Systems. Sie sind nie ein absolut vollständiges Abbild eines Systems. Je nachdem, welchen Zweck man mit der Modellbildung verfolgt, gibt es verschiedenartige Modelle mit unterschiedlichen Eigenschaften. In Bild 2 sind unterschiedliche Modelle aufgeführt. Dabei unterscheidet man physikalische und mathematische Modelle. Physikalische Modelle sind stets gegenständig und maßstäblich, mathematische Modelle sind abstrakt und dienen einer formalen Beschreibung der Systemeigenschaften. Bei den physikalischen Modellen unterscheidet man folgende Arten:

- Prototypmodell
- Pilotmodell
- Ähnlichkeitsmodell

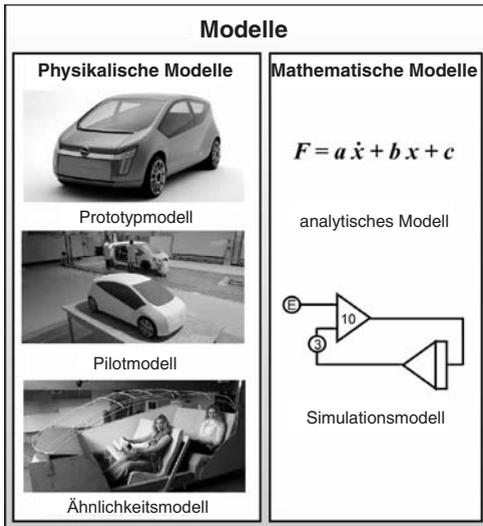


Bild 2. Unterschiedliche Arten von Modellen

Das Prototypmodell ist 1:1 maßstäblich und besitzt höchste qualitative und quantitative Ähnlichkeit. Wie im Beispiel (Bild 2) gezeigt, wird ein solcher Prototyp eines PKW vor der Serienherstellung angefertigt. Er ist ein weitestgehend mit den Serieneigenschaften ausgestatteter Originalaufbau, an dem alle Eigenschaften des späteren Originals direkt und konkret getestet werden können. Nachteile eines solchen Prototypmodells sind seine aufwändige und teure

Herstellung und geringe Flexibilität bei erforderlichen Änderungen. Die Erstellung eines solchen Modells wird daher nur der letzte Schritt vor Serienanlauf eines Massenproduktes sein.

Das Pilotmodell ist häufig maßstäblich unterschiedlich zum Original, z.B. 1:10. Es bildet daher nur wesentliche Eigenschaften genau ab. Seine Herstellung ist in der Regel mit reduziertem Aufwand möglich und lässt sich einfacher ändern. Häufig ist die Aufgabe eines solchen Modells nur die Visualisierung, um beispielsweise das Design beurteilen zu können.

Der geringste Aufwand zur Herstellung eines physikalischen Modells tritt beim Ähnlichkeitsmodell auf. Es werden hier nur noch Teile des Systems hergestellt, an denen man ein eingeschränktes Spektrum von Untersuchungen vornehmen kann. So könnten unter Berücksichtigung der Ähnlichkeitsverhältnisse an einem solchen Modell Untersuchungen im Windkanal über das Strömungsverhalten der Karosserie gemacht werden, d. h. es handelt sich um Untersuchungen während des Entwicklungsprozesses.

Deutlich flexibler und mit geringem Aufwand herstellbar sind abstrakte mathematische Modelle. Dafür muss man die analytischen Zusammenhänge zwischen den Attributen eines Systems bestimmen, was einen Satz von Gleichungen liefert, die eine geschlossene, analytische Lösung besitzen. Dies ist in der Regel ohne Rechneinsatz nur für sehr einfache Systeme möglich. Für einige einfache Systeme werden im Folgenden die Vorgehensweise zur Erstellung eines mathematischen Modells und die dabei auftretenden Probleme beschrieben.

Komplexere Systeme kann man mit Hilfe eines Simulationsmodells behandeln. Dieses Modell wird auf einem Digitalrechner erstellt und mit Hilfe numerischer Rechenverfahren gelöst.

2.1.1 Mathematische Modellbildung

Um ein mathematisches Modell eines realen Systems zu bilden, stehen zwei verschiedene Vorgehensweisen zur Verfügung. Liegen relativ genaue Kenntnisse der inneren Zusammenhänge eines System vor, so liefert eine theoretische Systemanalyse ein *theoretisches Modell*. Sind kaum Kenntnisse über die Beziehung der Attribute zueinander und über die Struktur des Systems bekannt, so muss man experimentelle Methoden anwenden, die so genannten *Identifikationsverfahren*. Bei solchen Verfahren werden Testsignale mit genau festgelegten Eigenschaften auf die Eingänge des Systems gegeben und die Ausgangssignale gemessen. Aus deren zeitlichen Verlauf kann man unter Umständen auf die dynamischen Eigenschaften des Systems zurückschließen.

Eine häufig verwendete einfache Identifikationsmethode ist die Ermittlung der *Sprungantwort*. Wie in Bild 3 gezeigt, wird dabei auf den Eingang des zu identifizieren Systems (Black Box) von einem Signalgenerator ein sprungförmiges Signal gegeben

und dieses auf dem ersten Kanal eines Zweikanalschreibers aufgezeichnet. Gleichzeitig wird mit dem zweiten Kanal das dabei auftretende Ausgangssignal registriert. Aus dem zeitlichen Vergleich der beiden Signalverläufe und der Amplituden der Signale kann auf das Übertragungsverhalten des Systems und auf seine Verstärkung geschlossen werden. Bild 4 zeigt ein Beispiel für eine solche Messung zur Identifikation des Übertragungsverhaltens eines Systems. Auf den Sprung des Eingangssignals $x_e(t)$ mit der Amplitude „1“ reagiert das Ausgangssignal $x_a(t)$ mit Verzögerung und einer asymptotischen Annäherung an den Endwert mit der Amplitude K_p . Die Größe K_p wird auch als *Proportionalbeiwert* oder *Verstärkung* des Systems bezeichnet. Das zeitliche Übergangsverhalten zwischen Anfangs- und Endwert von $x_a(t)$ wird durch die *Zeitkonstante* T charakterisiert, die sich aus dem Schnittpunkt der Anfangstangente zu Beginn des Vorgangs und dem Wert der Amplitude im Beharrungszustand ergibt. Solche Systeme und ihr Verhalten werden ausführlicher in Kapitel 2.2 behandelt.

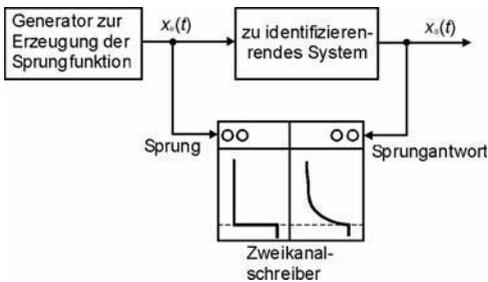


Bild 3. Messung der Sprungantwort eines zu identifizierenden Systems

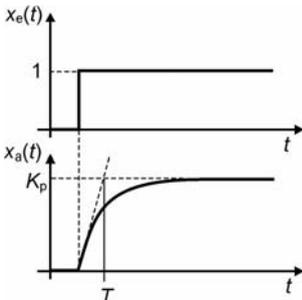


Bild 4. Verlauf der Sprungantwort $x_a(t)$ in Abhängigkeit eines Einheitssturzes $x_e(t)$

Um die prinzipielle Vorgehensweise darzustellen und einige dabei auftretende Probleme zu erläutern, wird im Folgenden ein einfaches Beispiel behandelt werden. Es handelt sich dabei um das einfache System des Einmassenschwingers mit viskoser Dämpfung.

2.1.2 Das mathematische Modell

Das Verhalten der häufig behandelten kontinuierlichen Systeme lässt sich durch wenige physikalische Grundgesetze beschreiben. Solche Gesetze sind beispielweise die Newton'schen Axiome der Mechanik, die Hebelgesetze, die Hauptsätze der Thermodynamik, das Ohm'sche Gesetz und die Kirchhoff'schen Regeln. Häufig lassen sich mit Hilfe dieser Grundgesetze Bilanzgleichungen für gespeicherte Energien, Massen und Impulse herleiten (Bild 5), deren Formulierung in der Regel zu Differentialgleichungen führt, d. h. die behandelten Größen treten in der Gleichung auch in Form ihrer Ableitungen auf. Hängen die Zustandsgrößen des behandelten Systems nur von der Zeit t ab, so kann man die Systeme durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben, deren Lösung noch relativ einfach ist. Man spricht dann auch von Systemen mit *konzentrierten Parametern*.

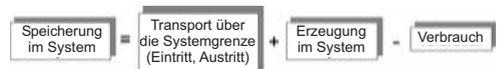


Bild 5. Bilanzgleichung zur Erstellung eines mathematischen Modells

Hängen die Zustandsgrößen außer von der Zeit t auch noch von anderen Größen wie beispielsweise dem Ort x oder dem Druck p ab, so sind für die mathematische Modellbeschreibung partielle Differentialgleichungen erforderlich, d. h. die Zustandsgrößen müssen partiell nach mehreren Variablen abgeleitet werden. Hierzu wird bereits ein erheblicher Rechenaufwand benötigt. Man spricht dann von Systemen mit *verteilten Parametern*.

Um die Bilanzgleichung nicht zu kompliziert werden zu lassen, führt man häufig Randbedingungen und Einschränkungen ein, die einerseits eine mathematische Lösung ermöglichen, aber andererseits die Gültigkeit des Modells auf bestimmte Aspekte und Fälle beschränken.

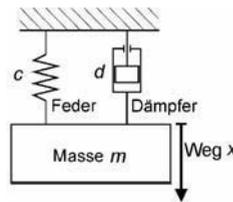


Bild 6. Einmassenschwinger, c Federkonstante, d Dämpfungskonstante

Dies wird am Beispiel des mechanischen Einmassenschwingers aus Bild 6 deutlich. Ein solcher Einmassenschwinger besteht aus einer Einzelmasse m , bei der man sich die Eigenschaft „Masse“ als vollständig im Schwerpunkt des Körpers konzentriert vorstellt. Sie ist an einer Feder aufge-

hängt, die die Federkonstante c besitzt und als masselos angenommen wird. Außerdem ist die Masse über einen ebenfalls als masselos angenommenen viskosen Dämpfer (Stoßdämpfer) mit dem ruhenden Aufhängepunkt verbunden. Bewegungen dieses Systems sind nur in einer Ebene mit der Richtung x möglich.

Diese Beschreibung zeigt, dass eine große Anzahl von Einschränkungen und Vereinfachungen mit der Modellbildung verbunden sind. Würde man dies nicht tun, wäre die mathematische Behandlung des Modells bereits sehr komplex.

Dieses Modell steht beispielsweise für die Aufhängung eines PKW-Rades, die aus einer Feder/Dämpfer-Kombination aus Schraubenfeder und Stoßdämpfer besteht (Bild 7). Man erkennt, dass das sehr einfache Modell des viskos gedämpften Einmassenschwingers nur durch Vernachlässigung einer Anzahl realer Einflüsse auf dieses System Gültigkeit hat.

So ist eine wichtige Einschränkung des Modells, dass es nur einen Freiheitsgrad enthält, da es nur lineare Bewegungen in Richtung der Koordinate x zulässt (Bild 6). Im realen System ist der Stoßdämpfer an der Karosserie drehbar aufgehängt, wodurch Drehbewegungen des Gesamtsystems um die Aufhängung möglich sind. Diese treten auch auf, da die zeitlich veränderliche äußere Zwangskraft $F(t)$ nicht nur in Richtung von x als Reaktionskraft zwischen Reifen und Untergrund auftritt. Die Feder wird also nicht nur in x -Richtung verformt, sondern auch seitlich dazu. Außerdem wurde ein lineares Dehnungsverhalten der Feder im ganzen Arbeitsbereich vorausgesetzt. Schlägt diese bei extremen Stößen durch, verhält sie sich wegen der dann auftretenden Begrenzung stark nichtlinear.

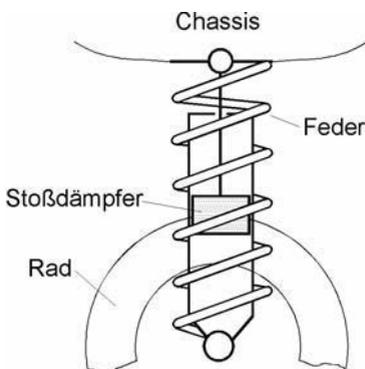


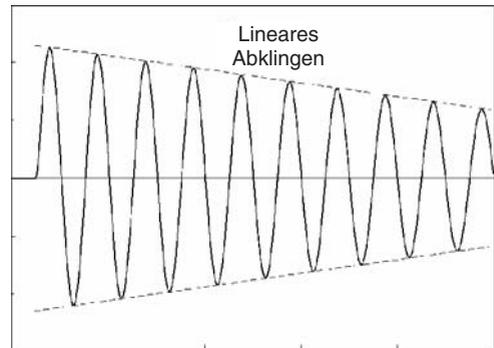
Bild 7. PKW-Federbein

Für den pneumatischen Stoßdämpfer wird eine viskose Dämpfung mit der Dämpfungskonstanten d angenommen, die der Geschwindigkeitsproportional ist:

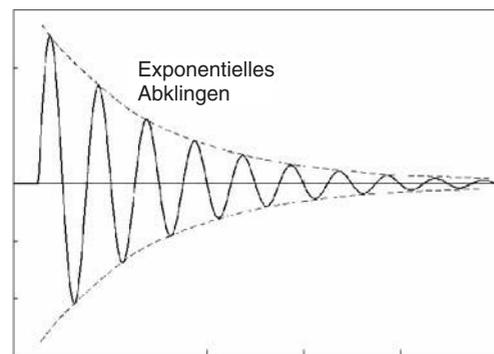
$$F_d = d \cdot v = d \cdot \frac{dx}{dt} = d \cdot \dot{x}$$

Dies gilt für die hauptsächlich auftretende Dämpfung durch das Komprimieren und Abströmen der Luft im

Dämpfer, jedoch nicht für die Reibung der Dichtung an der Außenwand. Hier liegt trockene Reibung vor ($F_R = \mu \cdot F_N$), die proportional zur Normalkraft F_N ist. Das Abklingverhalten von Schwingungsvorgängen ist in Abhängigkeit von diesen Reibungstypen mit dem entsprechenden Reibverhalten unterschiedlich. Bei trockener Reibung klingt die gedämpfte Schwingung linear ab (Bild 8a), bei viskoser Reibung folgt das Abklingverhalten einer Exponentialfunktion (Bild 8b).



a)



b)

Bild 8. Abklingen der Schwingung eines Einmassenschwingers mit Dämpfung durch

a) trockene und

b) viskose Reibung

Weiterhin werden bei der Modellbildung alle Massen zu einer Masse m zusammengefasst und in einem Punkt konzentriert angenommen, um den Angriffspunkt der Massenkräfte eindeutig festzulegen. Im realen System sind die Massen über das ganze System verteilt, weshalb der Schwerpunkt nur schwer zu bestimmen ist und seine Lage verändert sich auch noch. Schließlich wurden untergeordnete Kräfte wie beispielsweise der Luftwiderstand des Rades oder des Stoßdämpfers weggelassen.

Obwohl das reale System nur wenig mit dem einfachen Modell des Einmassenschwingers zu tun zu haben scheint, wird es trotzdem in Lehrbüchern häufig beispielhaft verwendet. Das Modell muss so ein-

fach gestaltet werden, um mit klassischen Rechenmethoden die Ermittlung des Bewegungszustandes des Systems zu beliebigen Zeitpunkten vornehmen zu können. Erst die Verfügbarkeit leistungsfähiger Digitalrechner lässt heute das Durchrechnen komplexerer Modelle zu, die das reale Verhalten von Systemen noch besser und auch in Grenzbereichen beschreiben. Zum anderen kann man auch schon aus dem einfachen Modell mit einer in der Technik hinreichenden Genauigkeit bestimmte Kenngrößen ermitteln und das reale System dimensionieren. Größere Fehler treten ja nur auf, wenn die vernachlässigten Kräfte oder die vereinfachenden Annahmen durch Extremsituationen in solchen Bereichen liegen, in denen sie nicht mehr ohne weiteres vernachlässigt werden können.

Ein Beispiel für die Modellierung der Dynamik eines einfachen Systems, bei dem das Verlassen des Gültigkeitsbereichs der Modellannahmen zu starken Abweichungen zwischen Modell und Realität führt, ist das jedem bekannte Pendel. Das Bild 9 zeigt das Schema eines Pendels und außerdem die an der Masse angreifenden Kräfte. Wird die Masse aus der Ruhelage um den Winkel $\varphi = \varphi(t)$ ausgelenkt, so wirkt auf sie infolge der Massenkraft $F_G = m \cdot g$ in der zur Auslenkung entgegengesetzten Richtung die Rückstellkraft $F_R = m \cdot g \cdot \sin \varphi$. Die Bogenlänge beträgt dabei $s = l \cdot \varphi$, die Beschleunigung $a = l \cdot \ddot{\varphi}$. Durch Einsetzen in das Newton'sche Bewegungsgesetz ($F = m \cdot a$) erhält man:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

oder

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) + m \cdot g \cdot \sin \varphi(t) = 0 \tag{1}$$

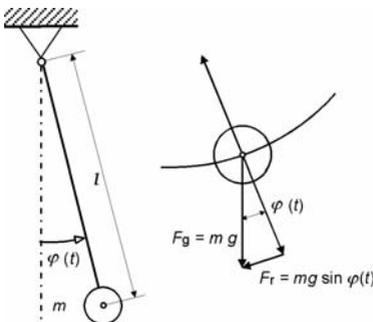


Bild 9. Pendel und angreifende Kräfte

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung zu der noch zusätzlich die Anfangsbedingungen festgelegt werden müssen:

$$\varphi(t = 0) = \varphi_0 \quad \ddot{\varphi}(t = 0) = \dot{\varphi}_0 = 0$$

Bei dieser Modellierung wurden wieder vereinfachende Annahmen getroffen, nämlich dass der Faden masselos und die Masse in einem Punkt – dem Schwerpunkt – konzentriert ist. Außerdem wurden

Kräfte durch Luftwiderstand und Lagerreibung vernachlässigt.

Aus der Bewegungsgleichung und den Anfangsbedingungen lässt sich eine Lösung gewinnen, die die freien Schwingungen des Pendels beschreibt. Jedoch handelt es sich bei der Bewegungsgleichung, da φ sowohl als zweite Ableitung als auch als Argument der Sinusfunktion auftaucht, um eine nichtlineare Differentialgleichung, deren Lösung schwierig ist. Daher wird vorwiegend der Fall behandelt, dass das Pendel nur sehr kleine Ausschläge macht, d. h. unter dieser Voraussetzung gilt nämlich

$$\sin \varphi(t) \approx \varphi(t) \tag{2}$$

Damit kann die Differentialgleichung folgendermaßen linearisiert werden, wodurch sie leichter lösbar ist:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) + m \cdot g \cdot \varphi(t) = 0 \tag{3}$$

Dass dieses mathematische Modell für das Pendel aber nur sehr eingeschränkt gilt, kann man leicht an der folgenden Bildserie (Bild 10) erkennen, die durch Simulation des Modells mit einem numerischen Simulationssystem auf einem Rechner erstellt wurde.

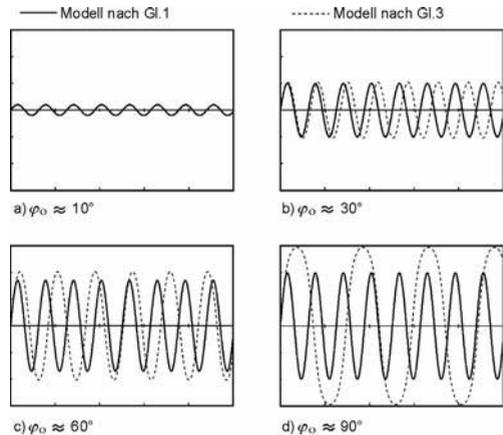


Bild 10. Simulation des Schwingungsverlaufs verschiedener Modelle eines Pendels für unterschiedliche Anfangsauslenkungen

Sie zeigt in jedem Teilbild die Schwingungsverläufe nach Loslassen aus einer ausgelenkten Stellung für beide Modellgleichungen (1) und (3). Alle Teilbilder haben den gleichen Amplituden- und Zeitmaßstab. Im Teilbild a) ist der Winkel noch sehr klein ($\varphi_0 \approx 10^\circ$), sodass Gleichung (2) gilt und die beiden Schwingungsverläufe der unterschiedlichen Modelle kaum zu unterscheiden sind. In den Teilbildern b) - d) wird der Auslenkungswinkel schrittweise bis auf $\varphi_0 = 90^\circ$ vergrößert. Bei $\varphi_0 = 30^\circ$ weichen die beiden Modelle erst nach mehreren Schwingungen deutlich voneinander ab, bei $\varphi_0 = 60^\circ$ wird die Abweichung in der Frequenz schon nach einer Schwin-

gung sichtbar, bei $\varphi_0 = 90^\circ$ tritt sofort eine starke Abweichung in Frequenz und Winkel auf. Das vereinfachte Modell nach Gleichung (3) liefert also nur für den kleinsten Bereich der möglichen Anfangsauslenkungen φ_0 den richtigen Wert für $\varphi(t)$. Trotzdem wäre der Aufwand für die rechnerische Behandlung des Modells nach Gleichung (1) unnötig hoch, wenn man ein technisches System untersuchen würde, in dem ein Pendel vorkommt, das nur Ausschläge geringer Amplitude ausführt und daher zur Beschreibung auch das Modell nach Gleichung (3) ausreicht. Für die Erstellung des Modells eines technischen Systems gelten drei allgemeine Anforderungen:

- Die Modellelemente müssen klar definiert, eindeutig beschreibbar und in sich widerspruchsfrei sein (*physikalische Transparenz*).
- Die Folgerungen über das Verhalten, die man aus den Verknüpfungen der Modellelemente zu einem Gesamtmodell ziehen kann, müssen im Rahmen des Modellzwecks (*Gültigkeitsbereich*) dem realen Systemverhalten entsprechen (*Modellgültigkeit*).
- Gibt es verschiedene Möglichkeiten zur Darstellung des Systems, die alle den ersten beiden Forderungen genügen, so sollte man die einfachste mögliche auswählen (*Effizienz*).

Für die Herleitung eines einfachen, effizienten und gültigen Modells gibt es keine in allgemein gültige Regeln fassbare Vorgehensweise.

Das Modell eines mechanischen Systems, das beispielweise alle nur denkbaren Bewegungsmöglichkeiten berücksichtigt, ist zwar physikalisch richtig, aber für die praktische Anwendung unübersichtlich, unhandlich und verliert für die meisten Fälle die physikalische Überschaubarkeit. Die Kunst bei der Modellbildung besteht daher darin, das Modell so einfach wie möglich zu gestalten, um es mit technisch und wirtschaftlich vertretbarem Aufwand untersuchen zu können. Dabei dürfen aber keine unzulässigen, das Systemverhalten zu stark verfälschenden Annahmen getroffen werden.

2.1.3 Modell des Einmassenschwingers

Am Beispiel des Fadenpendels wurde der Vorgang der Bildung des mathematischen Modells bereits einmal demonstriert. Ausgangspunkt war dabei eine Bilanzgleichung, hier das Newton'sche Bewegungsgesetz $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$.

Im Folgenden soll nun das mathematische Modell für den gedämpften Einmassenschwinger nach Bild 6 hergeleitet werden. Ziel ist es, bei einem mechanischen System eine Bewegungsgleichung zu ermitteln, aus der man den Bewegungszustand (x , $v = \dot{x}$, $a = \ddot{x}$) eines Punktes zu jedem Zeitpunkt t bestimmen kann. Will man nämlich ein technisches System und sein Bewegungsverhalten durch Mecha-

tronik verbessern, so muss man entsprechend der in Bild 7, Kap. 1 dargestellten Struktur eines mechatronischen Systems mit Hilfe eines Digitalrechners steuernd und regelnd auf das System einwirken. Die dazu erforderlichen Algorithmen können nur erstellt werden, wenn man das mathematische Modell des Systems kennt.

Entsprechend der Bilanzgleichung in Bild 5 stellt in der Mechanik die Verallgemeinerung des Newton'schen Bewegungsgesetzes, das *Prinzip von d'Alembert*, eine solche Bilanzgleichung zur Verfügung, die die Dynamik auf statische Betrachtungen zurückführt:

$$\sum F = F + F_T = 0. \quad (4)$$

Es besagt nichts anderes, als dass die Summe aller Kräfte, die auf einen Körper einwirken, gleich Null sein muss. Dabei ist F eine von außen am Körper angreifende Kraft und F_T die Trägheitskraft des Körpers.

Um dieses Prinzip zum Aufstellen der Bewegungsgleichung eines Körpers anwenden zu können, muss man alle äußeren Kräfte ermitteln. Dazu wendet man das in Bild 11 dargestellte Schnittprinzip an, bei dem alle zum Körper bestehenden Verbindungen gedanklich aufgetrennt werden und durch die an den Schnittstellen entstehenden Reaktionskräfte ersetzt werden. Von außen auf den Körper wirkende Kräfte sind dann die Federkraft F_c und die Dämpferkraft F_d . Außerdem kann noch eine äußere Erregerkraft $F(t)$ auf die Masse wirken. Ebenfalls am Schwerpunkt der Masse greift die Trägheitskraft $F_T = m \cdot \ddot{x}$ an. Wegen der Annahme einer linearen Feder beträgt die Federkraft:

$$F_c = c \cdot x. \quad (5)$$

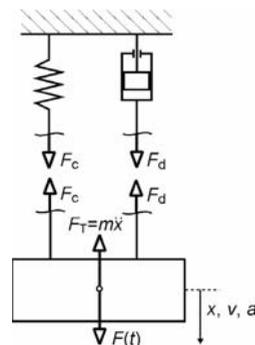


Bild 11. Anwendung des Schnittprinzips beim Einmassenschwinger

Die Dämpferkraft beträgt wegen der Annahme einer viskosen Dämpfung:

$$F_d = d \cdot \dot{x}. \quad (6)$$

Das Prinzip von d'Alembert besagt nun, dass die Summe aller am Körper angreifenden Kräfte gleich null sein muss:

$$F(t) - F_c - F_d - F_T = 0. \quad (7)$$

Setzt man die Werte der Kräfte in die Gleichung ein, so erhält man die Bewegungsdifferentialgleichung des viskos gedämpften Einmassenschwingers mit äußerer Erregung:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t) \quad (8)$$

Dies ist eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösung ohne Rechnerhilfe noch möglich ist.

Um die durch die äußere Erregungskraft $F(t)$ bedingte Unbestimmtheit des Systems zu eliminieren, betrachtet man häufig auch den Fall der freien Schwingung, d. h. die Erregungskraft ist null.

Die in der Gleichung (6) vorkommende Dämpfungskonstante d ist dimensionsbehaftet. Zur Charakterisierung des Bewegungsverhaltens schwingungsfähiger Systeme wie des Einmassenschwingers verwendet man daher meist den dimensionslosen, als *Lehr'sches Dämpfungsmaß* oder auch *Dämpfungsgrad* bezeichneten Wert D . Damit ergibt sich die Lösung $x(t)$ der Gleichung (8) für $F(t) = 0$:

$$x(t) = e^{-\omega_0 D t} \left(x_0 \cos \omega t + \left(\frac{\dot{x}_0 + D \omega_0 x_0}{\omega} \right) \sin \omega t \right) \quad (9)$$

Darin sind e die Euler'sche Zahl, $x_0 = x(t=0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0)$ und ω die *Kreisfrequenz* des Systems. Die Kreisfrequenz ω hängt auf folgende Art mit der Schwingfrequenz f zusammen und lässt sich aus den Kennwerten des schwingungsfähigen Systems berechnen:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}. \quad (10)$$

Für den Fall, dass die Dämpfungskonstante d gleich null ist, das System also ungedämpft schwingen kann, wird aus der Kreisfrequenz die *Eigenkreisfrequenz*:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (11)$$

Mit diesen Größen kann der Dämpfungsgrad D ausgedrückt werden:

$$D = \frac{d}{2m\omega_0} = \frac{d}{2\sqrt{mc}}. \quad (12)$$

Setzt man Gleichung (12) in Gleichung (10) ein, so erhält man:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}. \quad (13)$$

Anhand dieser Gleichung kann man unterschiedliche Fälle des Bewegungsverhaltens des Einmassenschwingers unterscheiden.

Ist $D < 1$, so schwingt das System mit einer Kreisfrequenz ω , die kleiner als ω_0 ist.

Ist $D = 1$, so wird der Wurzelausdruck in Gleichung (13) gleich null, es liegt keine Schwingung mehr vor; man spricht auch vom *aperiodischen Grenzfall*, da von diesem kritischen Dämpfungswert ab zu höheren Dämpfungsgraden hin keine Schwingung mehr auftritt.

Ist $D > 1$, so stellt der Wurzelausdruck keine reelle Zahl sondern eine komplexe Zahl dar, es liegt eine überkritische Dämpfung mit einem Kriechvorgang vor.

Da mit der Differentialgleichung (8) das mathematische Modell des Systems „Einmassenschwinger“ bekannt ist, kann man das System und sein Bewegungsverhalten auch mit Hilfe eines *Simulationsystems* auf einem Rechner simulieren. Wie dies gemacht wird, wird im Kapitel 2.5 eingehender beschrieben.

Um das Verhalten in den 3 oben aufgeführten Fällen zu verdeutlichen, wurde in der Simulation die Sprungantwort des Systems aufgenommen. Diese ist in der Bildfolge Bild 12 - 14 dargestellt.

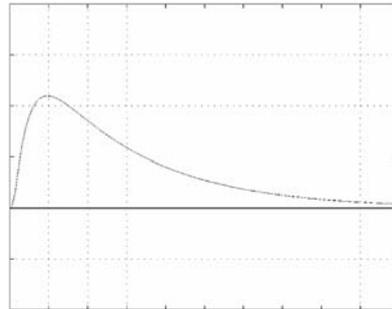


Bild 12. Darstellung der Amplitude über der Zeit (Simulation) nach Auslenkung eines Einmassenschwingers mit überkritischer Dämpfung ($D > 1$: Kriechvorgang)

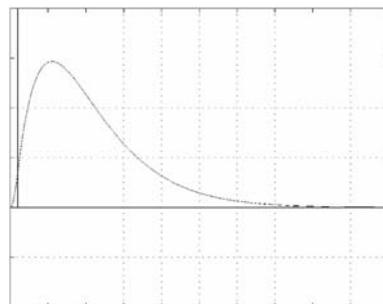


Bild 13. Darstellung der Amplitude über der Zeit (Simulation) nach Auslenkung eines Einmassenschwingers mit kritischer Dämpfung ($D = 1$: aperiodischer Grenzfall)

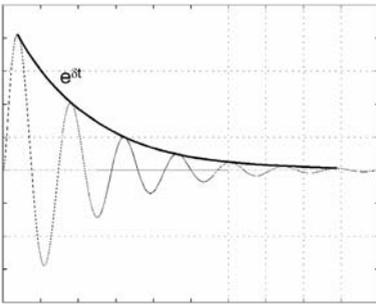


Bild 14. Darstellung der Amplitude über der Zeit (Simulation) nach Auslenkung eines Einmassenschwingers mit unterkritischer Dämpfung ($D < 1$: Schwingung)

In Bild 12 ist die Dämpfung überkritisch mit $D > 1$, weshalb aufgrund des Eingangssprungs (z. B. eine bestimmte Anfangsauslenkung x_0 des Schwingers, wobei zur Zeit $t = 0$ die Masse aus dieser Lage losgelassen wird) kein Schwingungsvorgang, sondern ein Zurückkriechen in die Ausgangslage stattfindet. In Bild 13 liegt die kritische Dämpfung mit $D = 1$ vor, der aperiodische Grenzfall, in dem gerade noch keine Schwingung auftritt. In Bild 14 ist $D < 1$, weshalb das System nach Aufgeben des Sprungs eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω ausführt. Diese Schwingung klingt nach einer bestimmten Exponentialfunktion $f(x) = e^{\delta t}$ ab, die ebenfalls vom Dämpfungsgrad D abhängt. Dieses Verhalten ist auch an der Lösungsgleichung (9) der Differentialgleichung (8) ablesbar. In dieser Gleichung wird ein Summenausdruck aus Cosinus- und Sinusfunktionen (Schwingung) mit einem Faktor $e^{-\alpha_0 D t}$ multipliziert. Dies ist die exponentiell abklingende Dämpfungsfunktion mit $\delta = -\alpha_0 D$. Bild 15 zeigt nochmals eine Zusammenstellung der unterschiedlichen Wegverläufe $x(t)$ des Einmassenschwingers für unterschiedliche Werte von D , nachdem das System um einen Anfangswert x_0 ausgelenkt wurde.

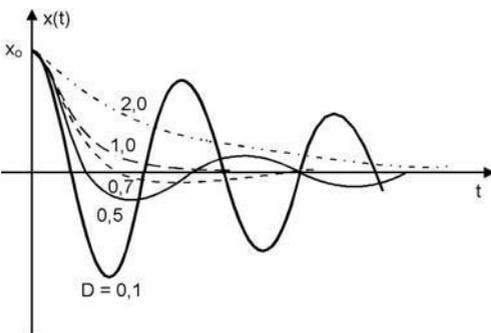


Bild 15. Darstellung des Schwingverhaltens eines Einmassenschwingers für verschiedene Werte des Lehr'schen Dämpfungsmaßes D

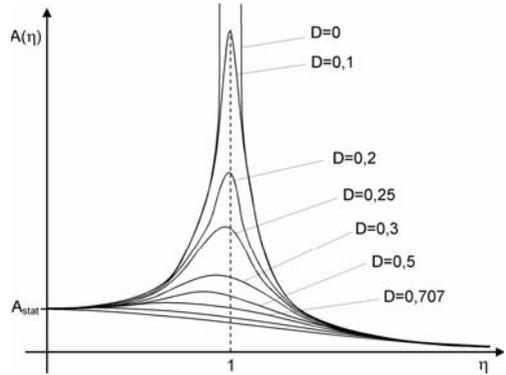


Bild 16. Amplitude eines harmonisch erregten Schwingers in Abhängigkeit des Lehr'schen Dämpfungsmaßes

In der Technik ist der zuletzt behandelte Fall der von außen angeregten Schwingung von großer Bedeutung. In einem solchen Fall spielt die Eigenfrequenz ω des schwingungsfähigen Systems eine besondere Rolle. Denkt man sich einen Einmassenschwinger, der beispielsweise durch eine harmonische Schwingung von außen mit der Frequenz Ω angeregt wird und trägt, wie in Bild 16 dargestellt, die Schwingamplitude $A(\eta)$ über dem Verhältnis

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} \tag{14}$$

auf, so ergeben sich in Abhängigkeit des Lehr'schen Dämpfungsmaßes D die dargestellten unterschiedlichen Kurven. Die Kurven beginnen alle bei der statischen Auslenkung A_{stat} , derjenigen Verformung, die unter einer statischen Last ($\Omega = 0$) auftritt. Eine Extremstelle der Amplitudenfunktion tritt an der Stelle $\eta = 1$ auf, wobei die dynamischen Amplituden sehr unterschiedlich sein können. Die Amplituden bei kleinen Werten von D können sehr groß werden, man spricht von Resonanz. Für den Einmassenschwinger bedeutet das, dass bei harmonischer Anregung mit einer Anregefrequenz Ω , die der Eigenfrequenz ω des Schwingers entspricht, das System bei kleinen Dämpfungen in so starke Schwingungen versetzt werden kann, dass der Schwinger dadurch geschädigt oder sogar zerstört wird.

Um bei bekannter Anregefrequenz Ω , die z. B. durch eine rotierende Masse mit einer Unwucht hervorgerufen werden kann, eine Anregung im Bereich der Eigenfrequenz ω zu vermeiden, muss man ω durch Verändern von Masse oder Federkonstante so verschieben, dass die Eigenfrequenz weit oberhalb oder unterhalb der Anregefrequenz liegt. Dies verhindert zu große Schwingamplituden des durch die Unwucht angeregten Bauteils. Ist die Anregefrequenz nicht konstant, wie beispielsweise bei einem rotierenden PKW-Rad (unterschiedliche Drehzahlen) so muss das Rad genau ausgewuchtet werden, um die Unwucht-

kräfte möglichst klein zu halten und damit eine Anregung der Eigenfrequenz des Rades im Resonanzpunkt zu vermeiden.

2.2 Unterschiedliche Modelltypen von technischen Systemen

Betrachtet man technische Systeme und ermittelt für diese mathematische Modelle, so stellt man fest, dass äußerlich sehr unterschiedliche Systeme den gleichen Typ von Übertragungsverhalten zeigen. Das bedeutet, dass solche Systeme, die den gleichen Typ von mathematischen Modell besitzen, auf statische und dynamische Eingangssignale mit vergleichbaren Änderungen der Ausgangssignale reagieren. Dies erleichtert generalisierte Verfahren zur Regelung von Systemen.

In mechatronischen Systemen findet immer eine Regelung der wesentlichen Ausgangsgrößen statt. Eine *Regelung* unterscheidet sich von einer *Steuerung* dadurch, dass anstelle der offenen Wirkkette von Systemen in einer Steuerung (Bild 17a), bei der Regelung ein geschlossener Regelkreis tritt (Bild 17b).

Die Aufgabe einer Regelung wird in DIN 19226 wie folgt definiert:

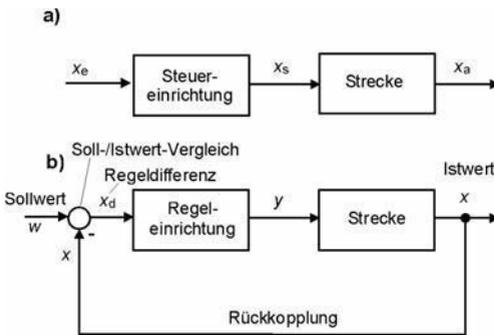


Bild 17. Wirkprinzipien von
a) Steuerung und
b) Regelung

Die *Regelung* ist ein Vorgang, bei dem der vorgegebene Wert einer Größe fortlaufend durch Eingriff aufgrund von Messungen dieser Größe hergestellt und aufrecht erhalten wird. Hierdurch entsteht ein Wirkungsablauf, der sich in einem geschlossenen Kreis (Regelkreis) vollzieht, denn der Vorgang läuft ab aufgrund von Messungen einer Größe, die durch den Vorgang selbst wieder beeinflusst wird. Dieser Wirkungskreis wird *Regelkreis* genannt. Eine selbsttätige Regelung (im folgenden kurz „Regelung“ genannt) liegt vor, wenn dieser Vorgang ohne menschliches Zutun abläuft.

Im Hauptzweig einer Regelung liegt die *Regelstrecke*, ein beliebiges System, dessen Ausgangsgröße $x_a(t)$

geregelt werden soll. Um die Regeleinrichtung (Regler) auslegen zu können, muss man das Übertragungsverhalten der Regelstrecke und damit sein mathematisches Modell kennen.

Für viele technische Systeme kann ein lineares Übertragungsverhalten angenommen werden, oder die Systeme können für bestimmte Arbeitspunkte linearisiert werden. Ein *lineares System* verhält sich folgendermaßen. Reagiert das System auf das Eingangssignal $x_{e1}(t)$ mit dem Ausgangssignal $x_{a1}(t)$ und auf das Eingangssignal $x_{e2}(t)$ mit dem Ausgangssignal $x_{a2}(t)$ so ist es linear, wenn es auf eine Linearkombination der Eingangssignale $x_e(t) = A \cdot x_{e1}(t) + B \cdot x_{e2}(t)$ mit dem Ausgangssignal $x_a(t) = A \cdot x_{a1}(t) + B \cdot x_{a2}(t)$ reagiert. Dieses Verhalten wird auch als *Superpositionsprinzip* bezeichnet.

Es gibt eine relativ kleine Anzahl unterschiedlichen Typen von linearen Systemen, mit deren Kenntnis man schon viele Modelle für technische Systeme erstellen kann. Diese Grundtypen werden in den folgenden Kapiteln 2.2.1-2.2.4 behandelt.

2.2.1 Proportionalglieder

Proportionalglieder oder kurz *P-Glieder* erzeugen ein Ausgangssignal $x_a(t)$, das während der meisten Zeit proportional zum Eingangssignal $x_c(t)$ ist:

$$x_a(t) = K_p \cdot x_c(t) \tag{15}$$

Dabei heißt der Proportionalitätsfaktor K_p *Proportionalitätsbeiwert* oder auch *Verstärkungsfaktor*. Die letzte Bezeichnung wird auch dann verwendet, wenn $K_p < 1$ gilt, also eigentlich eine Abschwächung vorliegt.

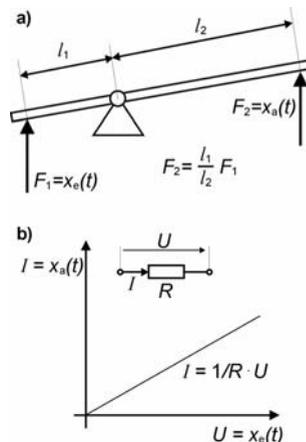


Bild 18. Beispiele für Proportionalglieder a) Hebel
b) elektrischer Widerstand

Beispiele für solche Systeme sind ein mechanischer Hebel (Bild 18a) oder ein elektrischer Widerstand (Bild 18b). Die mathematischen Modelle, die solche Systeme

beschreiben, sind einfache Proportionalgesetze wie das Hebelgesetz oder das Ohm'sche Gesetz. Im Falle des Hebels ergibt sich aus dem Hebelgesetz $K_p = l_1/l_2$, beim elektrischen Widerstand, dessen Eingangsgröße die Spannung U und dessen Ausgangsgröße der Strom I ist, beträgt der Proportionalitätsbeiwert $K_p = 1/R$ entsprechend dem Ohm'schen Gesetz.

Diese mathematischen Modelle beruhen aber auf Vereinfachungen, durch deren Hilfe man für die Mehrzahl der betrachteten Fälle mit niedrigerem Rechenaufwand auskommt. Solche Systeme werden als Proportionalglieder bezeichnet.

Komplexere Systeme stellt man häufig grafisch in Form eines *Blockschaltbildes* dar, in dem alle Einzelsysteme als Blöcke mit bekanntem oder zu ermittelnden Übertragungsverhalten zwischen Eingang und Ausgang dargestellt werden. Der entsprechende Block für ein P-Glied wird, wie in Bild 19a gezeigt, dargestellt. Die Symbolik im Block beruht auf dem Funktionsverlauf der Sprungantwort eines solchen Systems, die in Bild 19b dargestellt ist. Zum Zeitpunkt t eines auf den Eingang gegebenen Sprungsignals der Amplitude „1“ reagiert das P-Glied unmittelbar mit einem Sprung der Amplitude K_p am Ausgang.

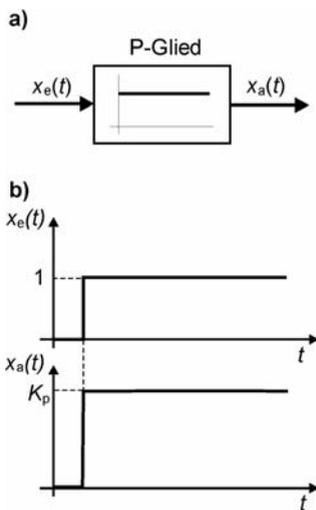


Bild 19. a) Symbol des P-Gliedes im Blockschaltbild
b) Sprungantwort

Reale physikalische Systeme reagieren in einem Zeitintervall nach dem Zeitpunkt t , dessen Länge als *Verzögerungszeit* T bezeichnet wird, abweichend von dem Verhalten einfacher P-Glieder. Dies beruht darauf, dass reale Systeme in der Regel „Energiespeicher“ enthalten, die nach einer dynamischen Änderung des Eingangs zuerst einmal aufgefüllt oder entleert werden müssen. Dies ruft ein entsprechendes dynamisches Verhalten von Systemen hervor, die als *Proportionalglieder mit Verzögerung* bezeichnet werden.

So gilt das einfache Hebelgesetz aus Bild 18a nur unter der Annahme, dass der Hebel ein starrer Körper ist. In Wirklichkeit ist er natürlich ein elastischer Körper, der bei Aufgeben eines Kraftsprungs elastisch nach dem Hooke'schen Gesetz verformt wird. Bis der mechanische Energiespeicher „Feder“ des Hebelarms aufgefüllt ist, gilt nicht das einfache P-Verhalten. Da das System einen Speicher enthält, spricht man von *PT₁-Verhalten* oder von einem *Proportionalglied mit Verzögerung 1. Ordnung*. Den Verlauf der Sprungantwort und das Symbol für ein Blockschaltbild zeigt Bild 20. Diesen Verlauf kann man nach folgender Gleichung berechnen:

$$x_a(t) = K_p \left(1 - e^{-t/T}\right) \cdot x_e(t) \quad (16)$$

Für $t > T$ wird die e-Funktion schnell sehr klein, so dass Gleichung (16) wieder mit Gleichung (15) übereinstimmt. In diesem Zustand beschreibt ein einfaches Gesetz wie das Hebelgesetz das System wieder korrekt als einfaches P-Glied.

Ebenso wie das System „Einmassenschwinger mit Dämpfung“ besitzt das PT₁-Glied eine Eigenfrequenz ω_0 . Diese steht mit der Verzögerungszeit T in folgendem Zusammenhang:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 1/T \quad (17)$$

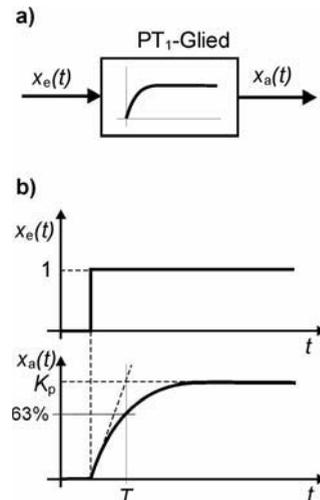


Bild 20. a) Symbol des PT₁-Gliedes im Blockschaltbild
b) Sprungantwort

Das gleiche Systemverhalten gilt auch für das Beispiel „elektrischer Widerstand“, da hier bei Aufgabe eines Spannungssprungs auch erst ein Energiespeicher aufgefüllt werden muss. Weil der Strom ansteigt oder abfällt (je nach Richtung des Spannungssprungs), erwärmt sich der Widerstand oder kühlt sich ab. Der Proportionalbeiwert $1/R$ ist temperaturabhängig (Widerstand

nimmt bei Erwärmung zu), dadurch reagiert das System ebenfalls mit PT_1 -Verhalten.

In der Technik ist auch häufig die Reaktion eines Systems auf sinusförmige Eingangssignale von Bedeutung. Das PT_1 -Glied antwortet auf ein solches Eingangssignal mit einem sinusförmigen Ausgangssignal. Beginnend bei niedrigen Frequenzen ω kann das Signal das PT_1 -Glied fast unverändert passieren (Bild 21). Zu höheren Frequenzen hin wird die Ausgangsamplitude immer kleiner, da das Auffüllen und Entleeren des Energiespeichers dem schnellen Wechsel nicht mehr folgen kann. Das PT_1 -Glied glättet daher ein stark welliges Signal hoher Frequenz. Da es tiefe Frequenzen nahezu ungehindert durchlässt und hohe Frequenzen stark schwächt, wird es auch als *Tiefpass* bezeichnet.

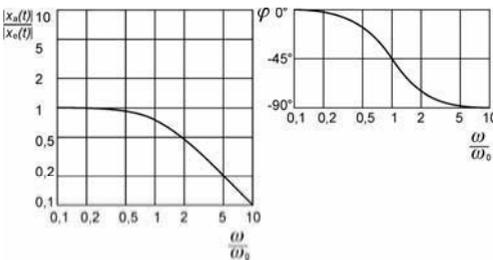


Bild 21. Bode Diagramm eines PT_1 -Gliedes

Da das PT_1 -Glied Eingangssignale verzögert, tritt zusätzlich zu der frequenzabhängigen Amplitudenschwächung auch noch eine frequenzabhängige Phasenverschiebung auf. Die Darstellung dieser Beeinflussung von sinusförmigen Signalen erfolgt beispielsweise mit Hilfe des *Bode-Diagramms*. Es besteht aus zwei Teilbildern, in denen das Amplitudenverhältnis zwischen Aus- und Eingang sowie die Phasenverschiebung in Abhängigkeit vom Verhältnis ω/ω_0 dargestellt werden (Bild 21). Wie dargestellt, nimmt beim PT_1 -Glied für $K_p = 1$ die Ausgangsamplitude für $\omega = 10 \cdot \omega_0$ auf 10% der Eingangsamplitude ab, die maximal mögliche Phasenverschiebung beträgt $\varphi = -90^\circ$.

Weitere Beispiele für Systeme mit PT_1 -Verhalten sind das Füllen eines Druckbehälters durch eine Drosselstelle (Ventil) oder das Laden eines Kondensators über einen Widerstand. Wird auf das Einlassventil des Druckbehälters ein Drucksprung aufgegeben, so erhöht sich der Druck im Behälter entsprechend dem Zeitverhalten eines PT_1 -Gliedes. Ebenso verhält es sich mit der Spannung am Kondensator, nachdem über den Widerstand ein Spannungssprung aufgegeben wurde.

Enthält ein lineares System n Energiespeicher, so wird das dynamische Verhalten in der Regel durch eine Differentialgleichung n -ter Ordnung beschrieben. Beim mathematischen Modell des in Kapitel 2.1.3 beschriebenen Einmassenschwingers ist dies eine lineare, gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, weil das System zwei Energiespeicher in

Form der Feder und des Dämpfers enthält. Dieses System ist ein Proportionalglied mit Verzögerung 2. Ordnung oder kurz PT_2 -Glied, das man sich aus einer Reihenschaltung zweier PT_1 -Glieder zusammengesetzt denken kann. In Bild 22 ist wieder das Blockschaltbildsymbol (Bild 22 a) und die Sprungantwort (Bild 22 b) dargestellt. Die Kurve beginnt mit einer waagerechten Tangente und läuft ebenfalls in einen neuen waagerechten Beharrungszustand. Dazwischen hat die Kurve einen Wendepunkt. Die Wendetangente bestimmt die zwei für das PT_2 -Glied charakteristischen Zeitkonstanten, die *Verzugszeit* T_u und die *Ausgleichszeit* T_g .

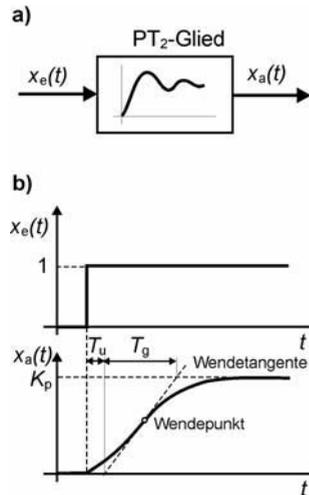


Bild 22. a) Symbol des PT_2 -Gliedes im Blockschaltbild b) Sprungantwort

Wie bereits in Kapitel 2.1.3 erläutert wurde, hängt nun jedoch der prinzipielle Verlauf der Sprungantwort von dem Dämpfungsbeiwert D ab. Für $D \geq 1$ erfolgt der Übergang nach dem Eingangssprung aperiodisch (Bild 22b), bei $D < 1$ erfolgt der Übergang schwingend (Bild 15).

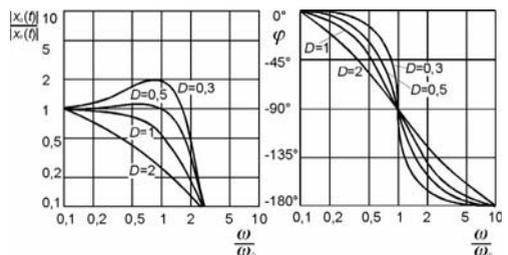


Bild 23. Bode Diagramm eines PT_2 -Gliedes für unterschiedlichen Dämpfungsgrad D

Im Bild 23 ist das Bode-Diagramm für das PT_2 -Glied dargestellt. Auch hierin müssen das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung in Abhängigkeit

vom Parameter D dargestellt werden. Vergleicht man diese Diagramme mit denen des PT_1 -Gliedes, so sieht man, dass im aperiodischen Fall ($D \geq 1$) die Tiefpasswirkung (Amplitudenschwächung) des PT_2 -Gliedes größer ist und das eine maximale Phasenverschiebung von $\varphi = -180^\circ$ auftreten kann. Im Falle geringer Dämpfung ($D < 1$) tritt im Bereich der Frequenz ω_0 Resonanz auf, d. h. das Amplitudenverhältnis $x_a(t)/x_c(t)$ wird für $K_p = 1$ größer als eins.

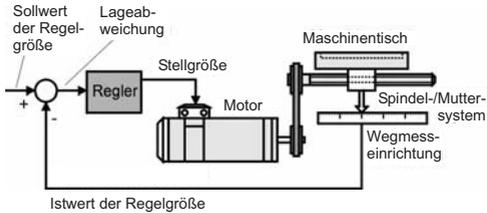


Bild 24. Lageregelkreis einer Werkzeugmaschine

Betrachtet man den Lageregelkreis des Werkzeugmaschinenschlittens in Bild 24, so verhält sich der Anteil aus Spindel-/Muttersystem, Maschinentisch und Führungsbahnen annähernd wie ein PT_2 -Glied. Die Eingangsgröße dieses Teilsystems ist die Drehzahl der Spindel, die Ausgangsgröße die Geschwindigkeit des Maschinentisches. Das elastisch verformbare Spindel-/Muttersystem ist eine Feder, die viskose Reibung zwischen Maschinentisch und Führungsbahnen stellt einen Dämpfer dar und der Tisch mit einem eventuell darauf gespannten Werkstück bildet die Masse des Schwingers. Bei diesem technischen System erkennt man die Bedeutung der richtigen Abstimmung von Masse, Feder- und Dämpfungskonstante, weil bei einem Positioniervorgang (Abbremsen) die Gefahr bestehen würde, dass bei zu kleinem Dämpfungsbeiwert D der Schlitten über die Zielposition hinauschießt und sich dann schwingend der Endposition annähert. Dies würde, wenn bei dem Positioniervorgang das Werkzeug im Eingriff ist, zu einer Zerstörung der zu erzeugenden Geometrie führen.

Das Teilsystem Antriebsmotor (Gleichstrommotor) besitzt ebenfalls PT_2 -Verhalten, da seine Drehzahl bei Aufgabe eines Sprunges der Motorspannung sich verzögert einem neuen Endwert annähert. Je nach Dämpfung kann dies wieder aperiodisch oder schwingend erfolgen.

Das PT_2 -Verhalten kommt nur bei Beschleunigungsvorgängen zum Tragen; bewegt sich der Schlitten mit konstanter Geschwindigkeit, so liegt reines Proportionalverhalten der beiden Systemanteile aus Bild 24 vor. Das Verhalten des Gesamtsystems, einschließlich des Antriebsmotors, ist noch prinzipiell anders.

2.2.2 Integralglieder

Gibt man einen Spannungssprung auf den Antriebsmotor, so erhöht sich seine Drehzahl entsprechend dem zeitlichen Verhalten eines Verzögerungsgliedes.

Betrachtet man jedoch das Gesamtsystem aus Motor, Spindel-/Mutter und Maschinentisch mit der Ausgangsgröße „Position des Maschinentisches“, so liegt ein anders Zeitverhalten vor (Bild 25). Ist die Motorspannung anfangs 0 und wird ein Spannungssprung mit der Amplitude 1 auf den Motor gegeben, so ändert sich die Position des Maschinentisches entsprechend einer linear ansteigenden Funktion. Der Vorgang führt anders als beim Verzögerungsglied nicht zu einem neuen Beharrungszustand, sondern der Ausgangswert ändert sich bis zum Erreichen physikalischer Grenzen (Endposition des Maschinentisches). Man nennt solche Systeme daher auch *Systeme ohne Ausgleich*.

Systeme mit entsprechendem Verhalten heißen *Integralglieder* oder *I-Glieder*, weil das Ausgangssignal dem Integral des Eingangssignals entspricht:

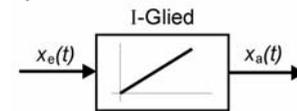
$$x_a(t) = K_I \cdot \int x_c(t) dt \tag{18}$$

Die Konstante K_I heißt integrale Übertragungskonstante oder auch Integrationsbeiwert.

Für den Fall der Sprungantwort (Bild 25) kann man wegen des linearen Anstiegs die Ausgangsgröße $x_a(t)$ besonders einfach berechnen:

$$x_a(t) = K_I \cdot t = 1/T_I \cdot t \tag{19}$$

a)



b)

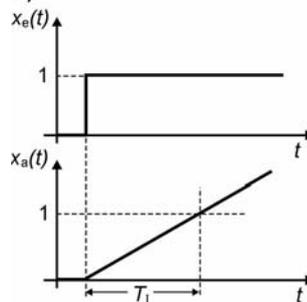


Bild 25. a) Symbol des I-Gliedes im Blockschaltbild
b) Sprungantwort

T_I heißt Integrationszeitkonstante und gibt diejenige Zeit an, die vergeht, bis die Ausgangsgröße nach einem Eingangssprung der Amplitude „1“ ebenfalls den Wert „1“ hat.

Auf ein sinusförmiges Eingangssignal antworten I-Glieder ebenfalls mit einem sinusförmigen Ausgangssignal, das aber mit zunehmender Frequenz ω in der Amplitude geschwächt wird. Wie man am Bode-Diagramm des I-Gliedes in Bild 26 sieht, hat das Amplitudenverhältnis für $\omega = \omega_0$, mit $\omega_0 = 1/T_I$, den Wert

eins und fällt zu hohen Frequenzen im gleichen Maß ab wie beim PT₁-Glied. Für Amplitudenverhältnisse, die dimensionslos sind, verwendet man in der Regel das logarithmische Vergleichsmaß *Dezibel* (1/10 Bel) mit der Abkürzung dB und teilt die Achsen des Bode-Diagramms logarithmisch. Den Betrag des Amplitudenverhältnisses $|A|$ in dB erhält man durch Multiplikation mit dem Maßstabsfaktor 20:

$$|A| = 20 \cdot \log \left| \frac{x_a}{x_e} \right| \tag{20}$$

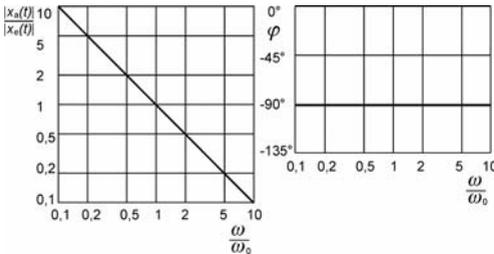


Bild 26. Bode Diagramm eines I-Gliedes

Entsprechend kann man den Amplitudenabfall beim I-Glied mit 20 dB/Dekade angeben, wobei sich *Dekade* auf das Frequenzverhältnis ω/ω_0 bezieht und zwar auf das Intervall zwischen zwei 10-er Potenzen. Die Phasenverschiebung des I-Gliedes beträgt im ganzen Frequenzbereich $\varphi = -90^\circ$.

Weitere Beispiele für integrierend wirkende Systeme sind das Auffüllen oder Entleeren eines Behälters oder das Zählen von Messimpulsen in einen elektronischen Zähler. Beim Behälter ist der zu- oder abfließende Volumenstrom die Eingangsgröße und der Füllstand die Ausgangsgröße, denn diese ist das Integral über den Volumenstrom (Aufsummierung). Beim Zähler sind die Messimpulse die Eingangsgröße und der Zählerstand die Ausgangsgröße.

Ebenso wie reines P-Verhalten in technischen Systemen in der Regel nicht auftritt, ist das I-Verhalten meist mit einem Verzögerungsverhalten verbunden, es liegen dann I/PT₁- oder I/PT₂-Glieder vor.

2.2.3 Differenzierglieder

Ein Differenzierglied oder kurz D-Glied erzeugt ein Ausgangssignal, das dem Differentialquotienten oder der Ableitung des Eingangssignals entspricht:

$$x_a(t) = K_D \cdot \dot{x}_e(t) \tag{21}$$

Dies bedingt, dass der Verlauf des Ausgangssignals der Steigung des Eingangssignals entspricht. Gibt man daher einen Sprung als Eingangssignal auf ein D-Glied, so antwortet dieses am Ausgang mit einem kurzen nadelförmigen Impuls (Bild 27). Auch hier wird sofort deutlich, dass es in technischen Systemen

kein reines D-Verhalten geben kann, es ist immer auch mit einem Verzögerungsverhalten kombiniert. Andernfalls müsste bei einem Eingangssprung, dessen Steigung (Ableitung) zum Zeitpunkt des Sprungs ∞ ist, die Ausgangsamplitude unendlich groß werden. Anteiliges D-Verhalten findet man jedoch in technischen Systemen, was ein sehr schnelles Ansteigen oder Abfallen des Ausgangssignals bei Änderungen des Eingangssignals bewirkt. Dieses Verhalten wird auch als *Vorhalt* bezeichnet, ein Begriff der vom Schießen auf bewegte Ziele abgeleitet ist. Um ein bewegtes Ziel zu treffen, muss der Schütze die Bahn verfolgen und unter einem vorlaufenden Vorhaltwinkel den Schuss auslösen um das Ziel zu treffen. Dabei ist der Vorhaltwinkel der Geschwindigkeit (Ableitung des Weges) proportional, was genau dem D-Verhalten entspricht.

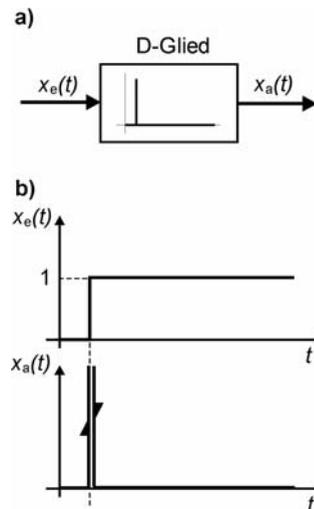


Bild 27. a) Symbol des D-Gliedes im Blockschaltbild
b) Sprungantwort

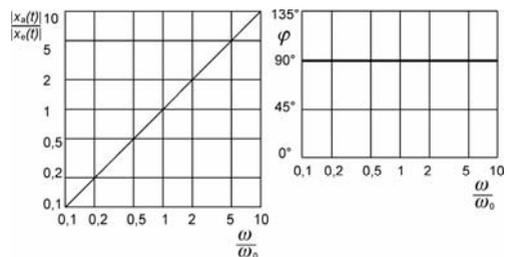


Bild 28. Bode Diagramm eines D-Gliedes

Auf sinusförmige Signale reagiert ein reines D-Glied wie im Bode-Diagramm in Bild 28 dargestellt. Das Amplitudenverhältnis steigt mit 20 dB/Dekade an, was zur Folge hat, dass niedrige Frequenzen stark geschwächt, hohe Frequenzen jedoch sogar verstärkt werden. Aus diesem Grund werden D-Glieder auch als

Hochpässe bezeichnet. Die Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangssignal eines reinen D-Gliedes beträgt im ganzen Frequenzbereich $\varphi = 90^\circ$. Mit Kombinationen in Form von Reihen- oder Parallelschaltungen der Übertragungsglieder mit PT, I und D-Verhalten kann man dann viele technische Systeme modellieren. So lässt sich das Gesamtübertragungsverhalten der Positioniereinrichtung einer Werkzeugmaschine in Bild 24 als Reihenschaltung eines PT₂-Gliedes und eines I-Gliedes modellieren.

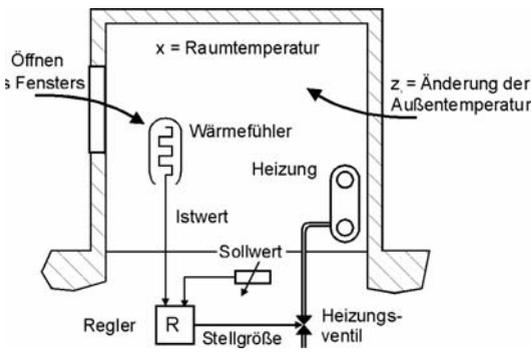


Bild 29. Temperaturregelung eines Raumes

2.2.4 Regler

In Bild 17 b ist ein vollständiger Regelkreis dargestellt. Die *Strecke* ist ein System, dessen Ausgangsgröße x geregelt werden soll. Dazu wird dem Regelkreis ein Sollwert w vorgegeben. Aufgabe des Regelkreises kann es sein, die Ausgangsgröße x der Strecke konstant zu halten und zwar beim durch die Sollwertvorgabe festgelegten Wert. Dies ist beispielsweise bei einer normalen Temperaturregelung wie in Bild 29 der Fall. Der Temperatursollwert wird dem Regelkreis mit einem Potentiometer vorgegeben, die Regelstrecke ist ein Raum mit einem Heizkörper. Äußere *Störgrößen* z wie das Öffnen von Fenstern oder der Wärmestrom durch die Wände lassen die Raumtemperatur (Istwert x) absinken. Die Temperatur wird ständig durch einen Sensor gemessen und der Messwert mit dem Sollwert verglichen, indem der Sollwert vom Istwert abgezogen wird. Das Ergebnis ist die *Regeldifferenz* x_d . Weicht x_d von null ab, so erhält die Regeleinrichtung oder kurz *Regler* ein Eingangssignal, das durch die Übertragungseigenschaften des Reglers in die Stellgröße y umgeformt wird. Dies ist die Eingangsgröße in die Strecke, die aus dem Heizkörper und einem Stellglied (Ventil) besteht. Die Stellgröße öffnet das Ventil wodurch mehr heißes Wasser durch den Heizkörper fließt. Dies wiederum erhöht die Raumtemperatur (Istwert), wodurch die Regelabweichung aufgrund des ständigen Soll-Istwert-Vergleichs langsam wieder auf null absinkt. Dadurch wird das Stellventil erneut gedrosselt, so dass sich ein Gleichgewicht einstellt.

Der Regler kann nun alle Systemeigenschaften aus den Kapiteln 2.2.1-2.2.3 besitzen. Im einfachsten Fall kann dies ein P-Regler sein, d. h. ein Regler mit der Eigenschaft eines P-Gliedes. In Bild 30 ist dargestellt wie eine Strecke mit PT₂-Verhalten ohne und mit verschiedenen Reglercharakteristiken auf einen Störungssprung reagiert. Ohne Regler ist der Ausgangswert der Strecke die typische Sprungantwort eines PT₂-Systems, was zur Folge hat, dass der Ausgangswert sich dauerhaft ändert. Unter Verwendung eines geschlossenen Regelkreises mit P-Regler steigt der Ausgangswert nur auf einen Bruchteil des Wertes ohne Regler, d. h. die dauerhafte Abweichung vom Sollwert ist deutlich geringer. Es ist aber festzustellen, dass die Störung nicht vollständig kompensiert wird, es entsteht eine *bleibende Regelabweichung*.

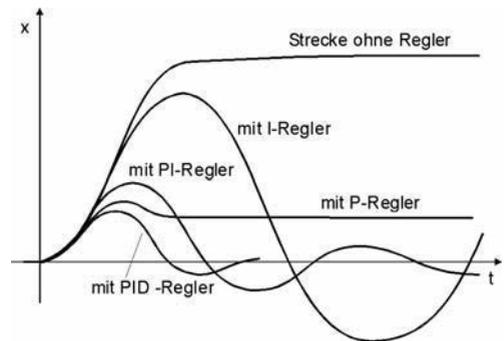


Bild 30. Vergleich des Regelverhaltens verschiedener Reglertypen

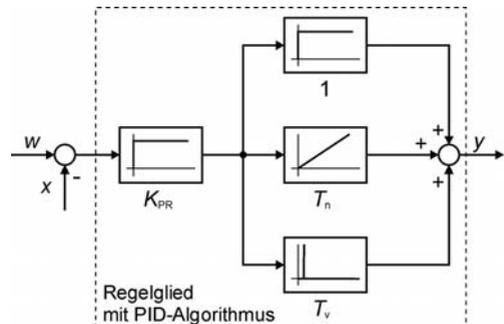


Bild 31. Blockschaltbild eines PID-Reglers

Ist der Regler ein I-Glied, so sieht man in Bild 30, dass dieser zwar keine bleibende Regelabweichung erzeugt und nach vielen Zyklen einer Regelschwingung die Regelabweichung zu Null macht, aber die starken dynamischen Veränderungen bis zum Ausgleich können sehr störend wirken. Kombiniert man die P- und I-Eigenschaften in einem PI-Regler, so haben die Regelschwingungen deutlich kleinere Amplituden und der Ausgleich erfolgt nach kürzerer Zeit. Fügt man dem Regler dann noch einen D-Anteil hinzu, so entsteht ein PID-Regler, der nochmals deutli-

che Verbesserungen des Regelverhaltens zur Folge hat. Im Bild 31 ist als Blockschaltbild dargestellt wie man aus der Zusammenschaltung verschiedener Systeme mit dem geforderten P-, I-, und D-Verhalten einen PID-Regler erhält. Entsprechend lautet die Übertragungsfunktion:

$$x_a(t) = K_{PR} \left(x_c(t) + \frac{1}{T_n} \int x_c(t) dt + T_v \frac{dx_c(t)}{dt} \right) \quad (22)$$

Nach diesem Regelalgorithmus arbeiten viele kommerzielle Regeleinrichtungen. Die Parameter K_{PR} (Verstärkung des P-Anteils), T_n (Nachstellzeit des I-Anteils) und T_v (Vorhaltezeit des D-Anteils) sind in der Regel einstellbar und dienen zur Optimierung des dynamischen Regelverhaltens.

Es gibt jedoch auch Strecken, deren Ausgangsgröße (Istwert) nicht konstant gehalten werden soll, sondern sich nach einem Sollwertsprung konstant ändern soll. Ein Beispiel hierfür ist der Lageregelkreis aus Bild 24. Hierbei ist der Istwert die aktuelle Position des Maschinentisches, die ständig durch ein Wegmesssystem erfasst wird. Wird ein neuer Lagesollwert auf den Regler gegeben, so liegt eine Lageabweichung vor, die eine Stellgröße für den Motor hervorruft. Der sich drehende Motor verschiebt den Maschinentisch, wodurch sich dessen Istwert kontinuierlich ändert. Deshalb muss der Regler hier ein P-Regler sein, da dieser eine bleibende Regelabweichung besitzt, die den Motor kontinuierlich antreibt. Erst wenn Soll- und Istwert gleich sind, die gewünschte Position also erreicht wurde, wird die Regeldifferenz annähernd null und der Schlitten bleibt in dieser Position. Da das Regelverhalten des P-Reglers aber ungünstig ist, muss man mit weiteren Maßnahmen, deren Behandlung hier zu weit führen würde, das Regelverhalten eines Lageregelkreises optimieren.

2.3 Modelle mechanischer Systeme

Die mechanischen Eigenschaften von mechatronischen Systemen sind im Wesentlichen durch Trägheit, Elastizität und Reibungsvorgänge gekennzeichnet, die den durch äußere Kräfte und Stellkräfte und Momente hervorgerufenen Bewegungszustand beeinflussen. Diese Merkmale der Bauelemente des Systems werden durch idealisierte Modelle repräsentiert. Dabei werden Körpermodelle in der Regel als mit Masse und Trägheit behaftet angenommen, jedoch solche Elemente wie Federn und Dämpfer als masse- und trägheitslos. Sich translatorisch oder rotatorisch zueinander bewegende Körper sind durch Gelenke oder Führungen miteinander verbunden, wobei die Einschränkung des Freiheitsgrades der Bewegung von Körpern Reaktionskräfte und -momente zur Folge hat. Bild 32 zeigt eine Zusammenstellung wichtiger verwendeter Ersatzmodelle und die ihnen zugeordneten Eigenschaften.

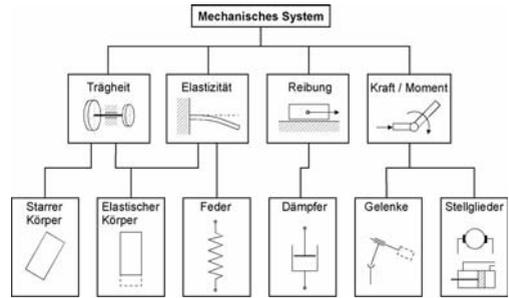


Bild 32. Elemente für Modelle von mechanischen Systemen

Zur Bildung des Modells eines mechatronischen Systems versucht man, die einzelnen realen Objekte durch die in Bild 32 dargestellten Ersatzmodelle zu beschreiben und damit eine kinematische Struktur aufzubauen. Dabei muss man immer beachten, welche Fragen man mit dem Modell beantworten will. Ein kompliziertes technisches System wie beispielsweise ein Personenkraftwagen auf welliger Straße hat nicht einfach eine bestimmte Zahl von Freiheitsgraden, sondern die Anzahl der Freiheitsgrade, die man notwendigerweise einführen muss, hängt davon ab, welche Informationen man benötigt.

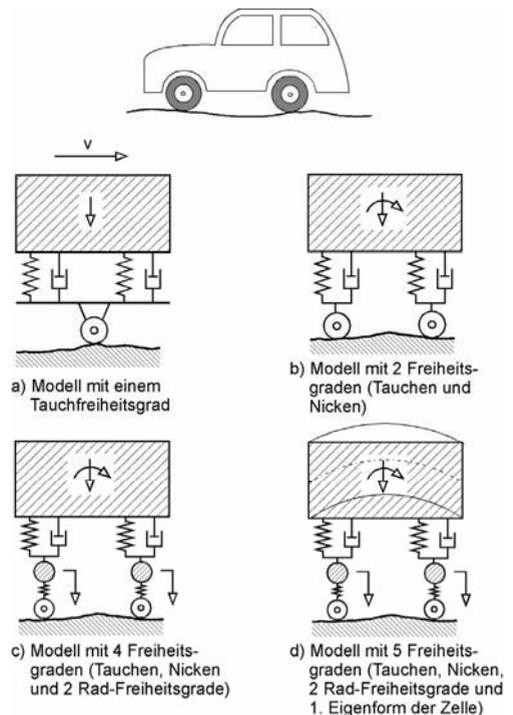


Bild 33. Ebene mechanische Modelle mit unterschiedlicher Anzahl von Freiheitsgraden für einen Personenkraftwagen.

In Bild 33 ist ein Beispiel für die Modellierung eines Personenkraftwagens gegeben, wobei von Stufe zu Stufe immer mehr Freiheitsgrade eingeführt werden. Im sehr einfachen Modell aus Einzelmassen, Federn und Dämpfern in Bild 33 a) mit einem Freiheitsgrad wurde die Reifenfederung und -dämpfung mit der Federung und Dämpfung zwischen Rad und Aufbau zusammengefasst. Das Rad ist als starrer Körper idealisiert. Dieses Modell, das dem Einmassenschwinger entspricht, liefert bezüglich des Tauchfreiheitsgrades vernünftige Aussagen für die Abstimmung des Systems, die im Allgemeinen so erfolgt, dass die Taucheigenfrequenz ω_0 bei etwa 1 bis 2 Hz und der Dämpfungsgrad D bei 0,2 bis 0,3 liegt. Man kann daraus, da die gefederte Masse m bekannt ist, die Dämpfungskonstante d des Dämpfers und die Federkonstante c der Feder bestimmen. Hat beispielsweise ein PKW eine Masse $m = 600$ kg, so entfällt auf ein Federbein eine zu federnde Masse von 150 kg. Sollen die Taucheigenfrequenz des Federbeins bei 2 Hz und der Dämpfungsgrad bei 0,3 liegen, so lassen sich d und c aus den Gleichungen (11) und (12) wie folgt berechnen:

$$c = m \cdot \omega_0^2 = 150 \text{ kg} \cdot 4 \frac{1}{\text{s}^2} = 600 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$d = 2D\sqrt{m \cdot c} = 0,6\sqrt{150 \text{ kg} \cdot 600 \text{ N/m}} = 180 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

Für eine genauere Untersuchung des Fahrkomforts muss zumindest der Nick-Freiheitsgrad (Drehung um die horizontale Querachse) wie in Bild 33 b) mit einbezogen werden. Erst durch ihn kommt der Zeitunterschied, der zwischen Vorder- und Hinterrad beim Überfahren einer Bodenwelle auftritt, zur Geltung. Dieses Modell gibt aber nur unzureichende Auskunft darüber, ob beim Überfahren von Hindernissen Radentlastungen bis hin zu kurzzeitigem Abheben auftreten. Darüber kann erst das in Bild 33 c) dargestellte Modell Aussagen machen, das die Vertikal-Freiheitsgrade der Achsmassen berücksichtigt. Mit diesem Modell erfasst man den Frequenzbereich bis 15 Hz schon sehr gut. Ein Modell, das bis 25 Hz gute Aussagen liefert, muss die Annahme einer starren Karosserie aufgeben und als zusätzlichen Freiheitsgrad die 1. Biegeschwingungsform der Karosserie einbeziehen (Bild 33 d).

Das letzte benutzte Modell ist aber immer noch kein allgemein gültiges Modell des realen Systems, da es zweidimensional ist und nur die Untersuchung von Vertikalschwingungen zulässt. Ein entsprechendes räumliches Modell wird noch über erheblich mehr Freiheitsgrade verfügen müssen. Man sieht an diesem Beispiel jedoch gut, dass die Komplexität des Modells nicht unabhängig von der Fragestellung an das Modell ist.

Ein Beispiel dafür, wie man mit Hilfe solcher mechanischer Modelle ein mechatronisches System mit verbesserten Eigenschaften gegenüber einem konventionellen rein mechanischen System entwerfen und

realisieren kann, ist das im Folgenden beschriebene *aktive Kraftfahrzeug-Fahrwerk*.

Die heute bei Kraftfahrzeugen im Einsatz befindlichen passiven Feder-/Dämpfersysteme haben einen Entwicklungsstand erreicht, der die Möglichkeiten für die gleichzeitige Verbesserungen von Fahrsicherheit und Fahrkomfort nahezu ausschöpft. Jede gewählte Fahrwerksabstimmung stellt dabei immer einen Kompromiss zwischen diesen beiden Kriterien dar, je nach dem, ob eine mehr sportlich-sicherheitstechnische oder eine komfortbetonte Fahrphilosophie beim Fahrzeug im Vordergrund steht. Zusätzlich ändert sich das Federverhalten in Abhängigkeit der Personenzahl. Wie wir im obigen Auslegungsbeispiel für Feder und Dämpfer gesehen haben, sind die optimalen Werte stark von der gefederten Masse abhängig, die sich zwischen Leerzustand und Vollbelastung ohne weiteres um 40 % vergrößern kann.

Eine wesentliche auch vom Fahrzeugnutzer spürbare Verbesserung der Eigenschaften Sicherheit und Komfort über das Optimum der passiven Abstimmung hinaus kann nur durch eine sich aktiv an die äußeren Randbedingungen anpassende Feder-/Dämpfercharakteristik erreicht werden.

Bei konventionellen Fahrwerken verrichten Feder-/Dämpferelemente die Aufgabe, Rad und Karosserie zu führen und zu dämpfen. Bei einem aktiven Fahrwerk werden die Feder-/Dämpferelemente durch aktive Kraftstellglieder, in der Regel Hydraulikzylinder mit elektrohydraulischem Ventil, ersetzt. Um einen geschlossenen Regelkreis herzustellen, benötigt das System außerdem Sensoren zur Erfassung der Federwege und Zylinderdrücke. Diese und weitere Informationen werden dann im Regler zu Stellsignalen für die Ventile in der Art verknüpft, dass Fahrkomfort und Fahrsicherheit des Fahrzeugs in jeder Fahrsituation optimal sind. Bild 34 a) zeigt ein einzelnes Rad mit konventionellem Feder-/Dämpfer-Element (McPherson Federbein) und Bild 34 b) ein Rad mit aktivem Federungssystem.

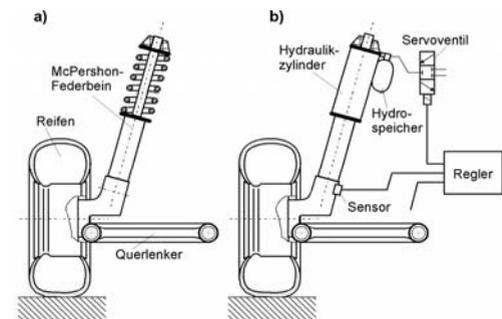


Bild 34. Verschiedenartig gefederte Fahrwerke

- konventionell mit Feder-/Dämpfer-Kombination
- aktive Federung mit Hydraulikzylinder und Servoventil

Um die Auswirkung der aktiven Federung zu untersuchen, wurde ein Viertel des gesamten Fahrwerks und des Federungssystems auf einem Simulationssystem (s. Kap. 2.5) modelliert. Bild 35 zeigt das Modell des Viertelfahrzeugs, in dessen Zentrum zwischen Aufbaumasse und Radmasse das aktive Federungssystem eingefügt werden kann.

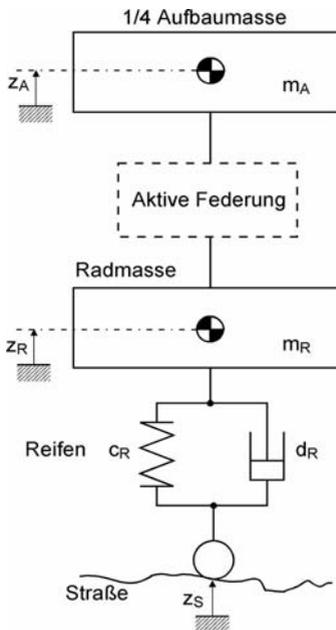


Bild 35. Ersatzmodell eines Viertelfahrzeugs

Das aktive Federungssystem besteht aus einem Hydraulikzylinder in Plungerbauweise, der von einem Servoventil mit Drucköl versorgt wird. Bild 36 zeigt eine schematische Darstellung des Systems und die für die Simulation erforderlichen Größen. Mit dem elektrisch angesteuerten Servoventil kann durch Zuführung von Hydrauliköl ein vorgegebener Druck im Hydraulikzylinder und damit eine gewünschte Zylinderkraft eingestellt werden. Der Hydrospeicher übernimmt bei hohen Kolbengeschwindigkeiten die Ölströme, die nicht vom Ventil geliefert werden können und wirkt somit entlastend für das Ventil. Die Kombination Hydrospeicher/Drossel bestimmt die Grundsteifigkeit, also die Federsteifigkeit bei ausgeschaltetem Regler und geschlossenen Ventilen. Diese Federsteifigkeit ist entscheidend für das Systemverhalten außerhalb des Regelbereichs und wird deshalb hydraulisch weich und komfortabel gewählt. Mit einer weichen Grundabstimmung weist das System auch Notlaufeigenschaften auf, sodass bei Reglerausfall das Fahrzeug weiterhin gute Fahreigenschaften behält. Komfort und Sicherheit sind dann so abgestimmt wie bei einem Fahrzeug mit konventioneller Federung, wodurch ein problemloses Weiterfahren auch ohne Reglerbetrieb möglich ist.

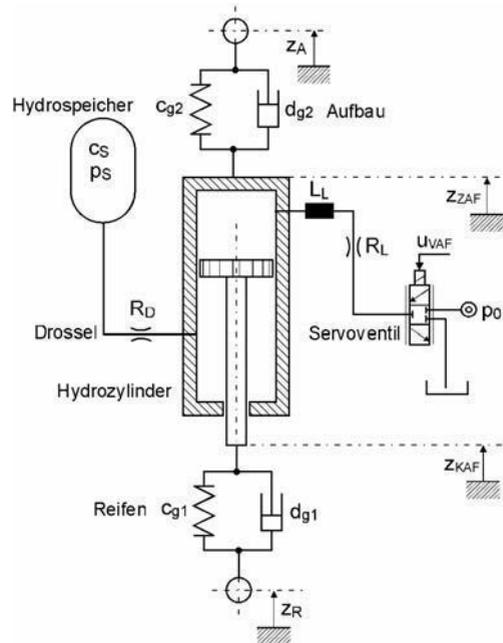


Bild 36. Simulationsmodell des aktiven Federungssystems

Gegenüber einem konventionell gefederten Vergleichsfahrzeug können Fahrkomfort und Fahrsicherheit durch folgende Eigenschaften der aktiven Federung verbessert werden:

- Erhöhung der Aufbaudämpfung,
- Senkung der Aufbaubeschleunigung bis zu 38%,
- Kompensation von Wank- und Nickbewegungen.

Unter *Wanken* versteht man Schwingungen um die Fahrzeuglängsachse, unter *Nicken* Schwingungen um die Querachse.

Das Federungssystem wurde im Labor mittels einer *Hardware-in-the-loop-Simulation* (Kapitel 2.5) erprobt. Dabei werden die Hardware der aktiven Federung auf einem Prüfstand aufgebaut und alle anderen Komponenten simuliert. Zwei zusätzliche Hydraulikzylinder bewegen im Simulationsaufbau den Federungszyylinder so, als wäre er im Fahrzeug eingebaut. Über einen der Zusatzzyylinder werden die vom Rad weitergeleiteten Stöße des Straßenprofils simuliert.

In Bild 37 sind die Amplitudenverläufe verschiedener Federungssysteme über der Anregungsfrequenz aufgetragen. Die mit AF bezeichnete Kurve stellt das Ergebnis der Simulation der aktiven Federung, die mit PF bezeichnete Kurve die Simulation eines konventionellen Fahrwerks dar. An diesen Kurven sieht man, dass die Karosserie mit der konventionellen Federung unterhalb der Radresonanz, die bei etwa 12 Hz liegt, bei gleicher Anregung deutlich höhere Amplituden aufweist. Oberhalb der Radresonanzstelle verlaufen beide Kurven gleich, sodass sich hier keine Verbesserung durch das aktive Fahrwerk mehr ergibt.

Weitere Verbesserungen sind nur noch mit aktiven Schwingungstilgern zu erreichen.

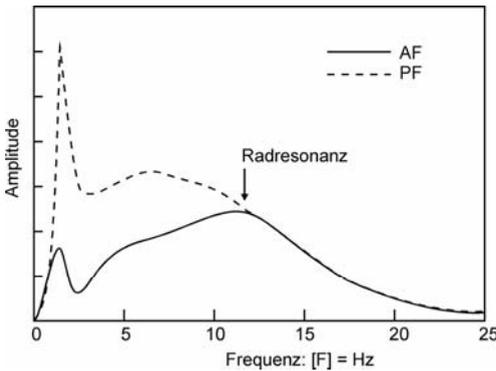


Bild 37. Amplitudenverlauf von aktiver und konventioneller (passiver) Federung AF: aktiv PF: passiv

Das hier vorgestellte aktive Federungssystem ist inzwischen auch schon erfolgreich in Kraftfahrzeugen eingebaut und erprobt worden.

2.4 Modelle elektrischer Systeme

Um ein mathematisches Modell eines elektrischen Systems herzuleiten, benutzt man in der Regel die bekannten Bilanzgleichungen der Elektrotechnik, die Kirchhoff'schen Gesetze. Bild 38 zeigt einen Schaltkreis aus einem Widerstand R , einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator der Kapazität C . Eine erste Gleichung liefert ein Maschenumlauf nach dem 2. Kirchhoff'schen Gesetz:

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) - U_c(t) = 0 \tag{23}$$

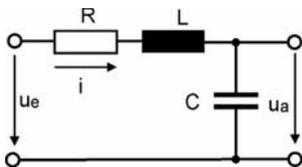


Bild 38. Elektrischer Schaltkreis aus konzentrierten Bauelementen (Schwingkreis)

Unter der Annahme, dass kein Strom aus dem elektrischen System herausfließt ($I_a = 0$), kann man für den Knoten, an dem Spule und Kondensator miteinander verbunden sind, nach dem 1. Kirchhoff'schen Gesetz eine Knotengleichung aufstellen:

$$I_C = I + I_a \Rightarrow I_C = I \tag{24}$$

Für die Spannungen an den verschiedenen Bauteilen gilt:

$$\begin{aligned} U_R &= R \cdot I & R: & \text{ohmscher Widerstand} \\ U_L &= L \cdot \dot{i} & L: & \text{Induktivität} \\ U_C &= 1/C \cdot \int I dt & C: & \text{Kapazität} \end{aligned}$$

Da die Ausgangsspannung gleich der Spannung am Kondensator ist, gilt:

$$\begin{aligned} U_a(t) &= U_C(t) = 1/C \cdot \int I dt \\ \Rightarrow \dot{U}_a(t) &= 1/C \cdot I, \quad \ddot{U}_a(t) = \frac{1}{C} \cdot \dot{i} \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen kann man dann Gleichung (23) folgendermaßen schreiben:

$$LC\ddot{U}_a(t) + RC\dot{U}_a(t) + U_a(t) = U_c(t) \tag{25}$$

Dies ist wieder eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, wie in Gleichung (8) für den Einmassenschwinger.

Das dynamische Verhalten eines solchen Systems muss daher genauso sein wie bei einem Einmassenschwinger. Vergleicht man die Koeffizienten vor den Ableitungen der entsprechenden Zustandsgröße in den Gleichungen (8) und (25), so kann man sogar folgende Analogie aufstellen:

mechanisches System	elektrisches System
---------------------	---------------------

Masse m	$\hat{=}$ Induktivität L
Dämpfungskonstante d	$\hat{=}$ ohmscher Widerstand R
Nachgiebigkeit $k = 1/c$	$\hat{=}$ Kapazität C

Das elektrische System ist auch als Schwingkreis bekannt, was schon andeutet, dass auch dieses System schwingungsfähig ist. Wie schon beim Einmassenschwinger festgestellt, führen solche Systeme in Abhängigkeit des Lehr'schen Dämpfungsmaßes eine Schwingung oder einen Kriechvorgang aus. Analog zum mechanischen Dämpfungsmaß (Gleichung (12)) beträgt die Dämpfung für das elektrische System:

$$D = \frac{R}{2\sqrt{L/C}}$$

Wegen der gleichen Analogien beträgt die Kreisfrequenz entsprechend Gleichung (10):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Man sieht, dass elektrische und mechanische Systeme auf der Ebene der Systembeschreibung mit mathematischen Modellen durchaus gleich behandeln werden

können und dass kein prinzipieller Unterschied zwischen ihnen besteht.

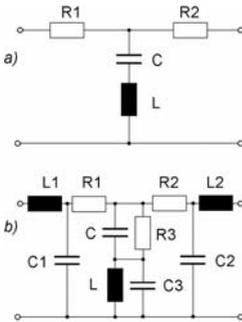


Bild 39. Verschiedene Modelle eines elektrischen Vierpols a) für niedrige Frequenzen b) für hohe Frequenzen

Bei elektrischen Systemen scheint auf den ersten Blick die Modellbildung einfacher vorstatten zu gehen, als bei mechanischen Systemen. Betrachtet man in Bild 39a) den elektrischen Vierpol aus zwei Widerständen, einem Kondensator und einer Spule, so entspricht diese Darstellung exakt den körperlich vorhandenen Bauteilen und ihren Verbindungen. Die Bauteile selber können durch einfache, bekannte, elektrische Grundgleichungen beschrieben werden. Man darf sich aber nicht darüber täuschen lassen, dass auch diese Darstellung nicht einfach ein Lageplan (Schaltplan) der elektrischen Komponenten ist, sondern ein Modell des realen Systems. Dieses Modell hat nämlich nur Gültigkeit, solange in das System eingehende Signale niedrige Frequenz besitzen. Bei hohen Frequenzen kann ein aussagefähiges Modell nicht mehr die Einflüsse gewisser Eigenschaften der Bauteile und vor allem der Verbindungen vernachlässigen. So besitzen die Drahtverbindungen Koppelkapazitäten und Leitungsinduktivitäten, die Spule Windungskapazitäten und der Kondensator dielektrische Verluste oder auch Eigeninduktivität. Ein gültiges Modell des gleichen Vierpols muss daher wie in Bild 39b) dargestellt aussehen. Hier sind die unerwünschten, parasitären Eigenschaften elektrischer Bauelemente als zusätzliche parallel und in Reihe geschaltete konzentrierte Bauelemente eingezeichnet. Die daraus folgenden Modellgleichungen sind entsprechend komplizierter. Bei höchsten Frequenzen sind dann nochmals andere Modellstrukturen erforderlich.

2.5 Simulation

In der Entwicklungs- und Planungsphase mechatronischer Systeme ist es heute vielfach üblich, solche Systeme nicht an körperlich vorhandenen Prototypeneinrichtungen zu erproben und zu optimieren,

sondern sie auf einem Digitalrechner zu simulieren. Die dazu erforderliche Software wird als Simulationssystem bezeichnet. Solche Simulationssysteme gibt es zur Bewegungssimulation der Kinematik (Beispiel Robotersimulationssystem), zur Simulation dynamischer Vorgänge (Beispiel regelungstechnisches Simulationssystem) oder auch zur Belastungssimulation und Ermittlung der Spannungsverteilung in statisch und dynamisch beanspruchten Bauteilen (Beispiel Finite-Element-System, FEM). Auch für die Simulation des elektrischen Verhaltens von Schaltungen und Bewegungssystemen ist entsprechende Software verfügbar.

2.5.1 Simulationssysteme

In den vorherigen Kapiteln wurde schon häufiger die Simulation dynamischer Vorgänge auf Digitalrechnern angesprochen und damit ermittelte Ergebnisse solcher Vorgänge gezeigt. Die Technik der numerischen Simulation bezieht sich auf die mathematischen Modelle realer Systeme, die im Modellbildungsverfahren (s. Kap. 2.1) ermittelt wurden. Hat man als mathematisches Modell eine lineare Differentialgleichung gefunden, so ist die geschlossene Lösung mit konventionellen Methoden ohne Rechneinsatz möglich, aber sehr zeitaufwändig. Insbesondere, wenn man verschiedene Fälle ausrechnen will oder die Auswirkungen von Parameteränderungen studieren möchte, kann der Einsatz eines Simulationssystems auf einem Digitalrechner mit grafischer Ausgabe viel Zeit und Mühe sparen und die Visualisierung der Ergebnisse sehr gut unterstützen.

Eine an die in der Regelungstechnik durchgeführte Modellbildung angelehnte Simulationstechnik ist der Blockschaltbild-Editor. Hier werden auf einer grafischen Oberfläche die in der Regelungstechnik üblichen Blöcke in einem Gesamtschaltbild erfasst. Bei Kenntnis der Übertragungsfunktionen der Blöcke vom Eingang zum Ausgang kann direkt eine Simulation durchgeführt werden. Eines der bekanntesten Systeme in diesem Bereich ist das Programm SIMULINK, das wiederum eine Untermenge der Programmiersprache MATLAB¹ ist.

Im Bild 40 ist das Simulations-Blockschaltbild von SIMULINK für den bereits mehrfach angesprochenen Einmassenschwinger dargestellt. Zu dieser Darstellung gelangt man, wenn man die Gl. (7) wie folgt umschreibt:

$$F_T = F(t) - F_c - F_d = m \cdot \ddot{x} \quad .$$

Auf der linken Seite des Blockschaltbildes befindet sich ein Summierer (Sum), der die Summenbildung aus Erregungskraft (Pulse Generator), Federkraft und Dämpferkraft vornimmt und dabei die Trägheitskraft

¹ Produkt der Firma The Math Works Inc.

errechnet. Teilt man diese durch die Masse m , so erhält man die Beschleunigung \ddot{x} . Mit Integratoren wird diese danach zweifach integriert und liefert am Ausgang den Weg x . Die Multiplikation des Weges mit der Federkonstante c ergibt die Federkraft, die vom ersten Integrator gelieferte Geschwindigkeit \dot{x} multipliziert mit der Dämpfungskonstanten d die Dämpferkraft. Diese beiden Kräfte kann man dann wieder direkt für die Summenbildung auf der linken Seite des Bildes benutzen. Bild 41 zeigt die Scopeanzeige des simulierten Wegverlaufs des Einmassenschwingers aus Bild 40 für unterschiedliche Werte des Dämpfungsgrades D . Durch Eintragen neuer

Werte für m , c und d ins Blockschaltbild und erneute Simulation kann man so leicht die Änderungen im Systemverhalten studieren.

Der Nachteil solcher Blockschaltbild-Editoren ist, dass man sie nur verwenden kann, wenn man das mathematische Modell schon kennt. So genannte objektorientierte Simulationssysteme verwenden direkt die realen Bauelemente (deren einzelnes mathematisches Modell jeweils auch bekannt ist), die man dann so zusammenfügen kann, wie sie untereinander körperlich verbunden sind. Dies erleichtert den Aufbau größerer Simulationsstrukturen.

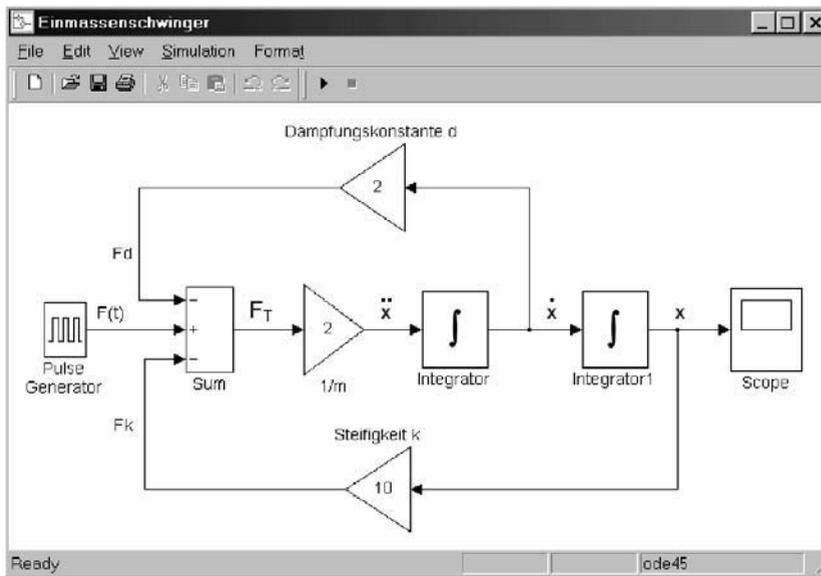


Bild 40. Simulationsblockschaltbild des Einmassenschwingers in SIMULINK

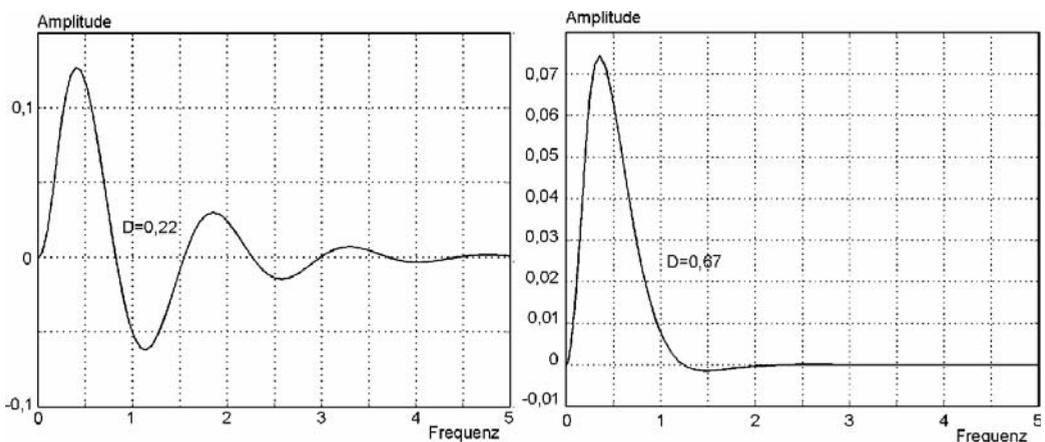


Bild 41. Scopeanzeige des Wegverlaufs bei dem simulierten Einmassenschwinger für unterschiedliches Dämpfungsmaß D

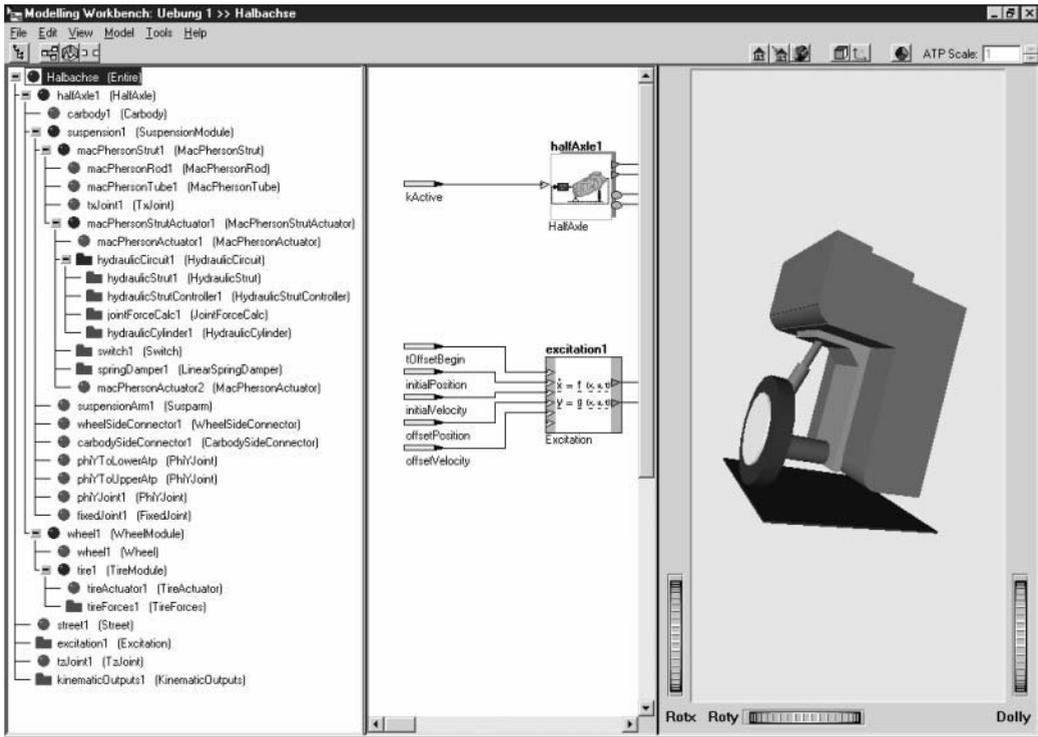


Bild 42. Simulationsumgebung für das Modell „Halbachse des Simulationssystems CAMEL-View

Solche objektorientierten Simulationssysteme sind DYMOLA und CAMEL-View². Bild 42 zeigt die Simulationsumgebung von CAMEL-View und das Modell „Halbachse“, das die Hälfte einer PKW-Achse darstellt. Die Modellierung des Mehrkörpersystems erfolgt so, dass aus einer Bibliothek einfache Elemente wie Stäbe, Federn, Gelenke, usw. entnommen werden, die so zusammengefügt werden können, wie sie im richtigen Fahrzeug räumlich miteinander verbunden sind. Das Generieren des Rechenmodells für die Simulation erfolgt dann mehr oder weniger automatisch. Auf der linken Seite des Bildes ist die Gesamtstruktur des Modells „Halbachse“ dargestellt. Für ausschließlich elektrische Systeme ist vor allem das Simulationssystem SPICE und die daraus abgeleiteten Varianten entwickelt worden.

Für spezielle Simulationaufgaben gibt es außerdem spezielle, zugeschnittene Simulationssysteme. So ist bei Anwendungen von Industrierobotern vor allem eine Simulation der Kinematik ohne Berücksichtigung elastischer Eigenschaften des mechanischen Systems von Bedeutung. Daher kann man in einem Roboter-Simulationssystem wie beispielsweise WORKSPACE wie in einem CAD-System ein kinematisches Robotermodell erstellen und dieses in seiner Applikationsumgebung bewegen. So können Kollisionsbetrachtungen durchführen und Zykluszeiten

ermitteln werden, ohne die Roboterzelle schon zur Verfügung zu haben. Bild 43 zeigt ein Robotermodell eines solchen Simulationssystems.

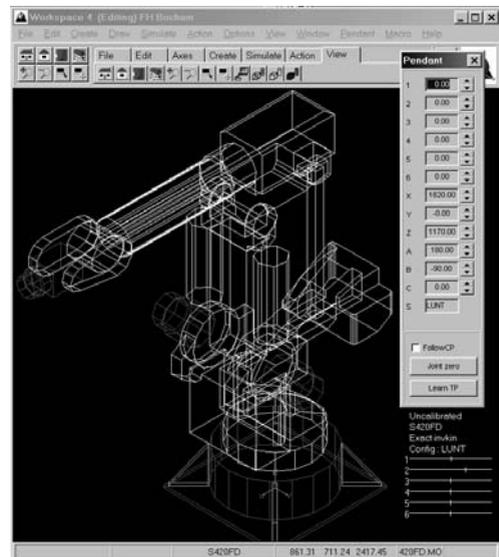


Bild 43. Drahtmodell eines Industrieroboters, der auf dem Simulationssystem Workspace modelliert wurde

² Produkt der Firma iXtronics GmbH, Paderborn

2.5.2 Simulationstechniken

Im Laufe des Entwicklungsprozesses von mechatronischen Systemen wird man nicht alle Baugruppen ausschließlich auf einem Digitalrechner simulieren wollen, da dies aufgrund stets notwendiger Modellvereinfachungen in komplexen Systemen zu falschen Aussagen führen kann. Daher benutzt man auch die Möglichkeiten, entweder körperlich Hardwarekomponenten in eine Simulation einzubeziehen (Hardware-in-the-Loop: HIL) oder eine entwickelte Simulation in ein mechatronisches System einzubinden (Software-in-the-Loop: SIL).

Unter *Hardware-in-the-Loop* versteht man die Integration von realen Komponenten (Bauteilen und Systemmodellen) in eine gemeinsame Simulationsumgebung. Die HIL-Nachbildung (Simulation) dynamischer Systeme durch physikalische und mathematische Modelle muss dabei in Echtzeit und unter Nachbildung der physikalischen Randbedingungen erfolgen. Ein Beispiel ist die Simulation eines Gesamtfahrzeuges am Rechner mit der Anbindung eines realen Steuergerätes und der Aktorik für eine Funktionsregelung zur Fahrstabilitätsregelung. Ein entscheidender Vorteil der HIL ist der Funktionstest des Steuergerätes unter realen Bedingungen bei gleichzeitiger Einsparung von zeit- und kostenintensiven Fahrmanövern. Simulationssysteme, die diese Art der Echtzeit-Simulation erlauben, sind CAMEL-View und dSPACE. Das letztgenannte System verwendet MATLAB/SIMULINK Modelle und erzeugt einen echtzeitfähigen Code, der auf spezieller Hardware lauffähig ist.

Unter *Software-in-the-Loop* versteht man die Integration von Systemmodellen in eine gemeinsame Simulationsumgebung mit dem modellierten Prozess (Regelstrecke); sowohl die zu entwickelnde Funktion als auch der Prozess, auf den die Funktion einwirkt, werden modelliert. Die SIL-Nachbildung (Simulation) dynamischer Systeme durch physikalische und mathematische Modelle muss dabei nicht in Echtzeit erfolgen. Ein entscheidender Vorteil für die SIL ist der Funktionstest unter simulierten Bedingungen bei gleichzeitiger Einsparung von zeit- und kostenintensiven Experimenten (z.B. Fahrmanöver). Ausgehend von der SIL-Umgebung können entweder die Funktion, der Prozess oder beide Teile physikalisch realisiert und im geschlossenen Kreis hinsichtlich ihres Verhaltens analysiert werden.

Will man eine Komponente eines mechatronischen Systems unter Verwendung von HIL und SIL entwickeln, so muss man verschiedene Arbeitsschritte durchlaufen und die Eigenschaften der zu entwickelnden Komponente absichern. In Bild 44 sind die einzelnen Arbeitsschritte am Beispiel der Entwicklung eines Steuergerätes für einen PKW dargestellt.

Dies sind im Einzelnen:

- 1.) **Funktionsnachweis:** Eine neue oder veränderte Funktionalität eines Steuergerätes wird als Modell in einem geschlossenen Regelkreis mit einem Streckenmodell (Prozessmodell) getestet. Diese Untersuchung wird als Software-in-the-Loop bezeichnet.
- 2.) **Adaption:** Die am Streckenmodell überprüfte Funktion kann dann an dem realen Prozess abgestimmt werden (so genannte Applikation).
- 3.) **Zielsoftware-/Schnittstellennachweis:** Durch die Kopplung des realen Steuergerätes mit dem Streckenmodell in einer HIL-Umgebung kann die Fehlerfreiheit der Zielsoftware und der Schnittstellenkommunikation überprüft werden.
- 4.) **Integration:** Die Integration des mit einer neuen Funktionalität ausgestatteten Steuergerätes in den realen Prozess erlaubt die Erprobung des Gesamtsystems und die Anpassung aller relevanten Signal- und Steuerdaten.

Eine solche Kombination aus virtuellen und realen Tests neuer Komponenten eines mechatronischen Systems verkürzt die früher notwendigen langen Entwicklungs- und Erprobungszeiten erheblich.

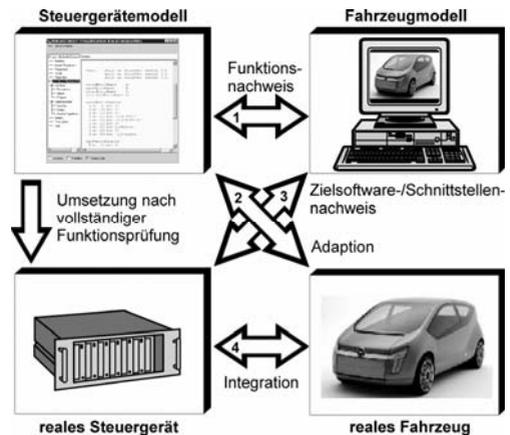


Bild 44. Arbeitsschritte der Eigenschaftsabsicherung einer als Simulationsmodell entwickelten Komponente am Beispiel eines Steuergerätes für ein Kraftfahrzeug

3 Industrieroboter als mechatronisches System

Anfänglich tauchte der Begriff Mechatronik vor allem im Zusammenhang mit Industrierobotern und anderen autonomen Robotersystemen auf. Eine der ersten Buchveröffentlichungen aus dem Jahr 1991 trägt den Titel „Mechatronics & Robotics“ und ist eine Sammlung von Vorträgen einer internationalen Konferenz. Die Robotertechnologie ist seitdem ein wichtiges Anwendungsfeld der Mechatronik.