Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 2 vom 20. April 2018

Aufgabe 1 (Hom)**.** Seien X und Y Moduln über $\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Gilt ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(X,\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(Y,\mathbb{Z})$, so folgt $X \cong_{\mathbb{Z}} Y$.
2. Gilt ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(\mathbb{Z},X) \cong_{\mathbb{Z}} {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(\mathbb{Z},Y)$, so folgt $X \cong_{\mathbb{Z}} Y$.

Aufgabe 2 (Einheitswurzeln)**.**

1. Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists_{n\in\mathbb{N}} \quad z^n = 1\}$ der komplexen Einheitswurzeln und die additive Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isomorph sind.
2. Wie kann man die Familie $(\mathbb{Z}/n)_{n\in\mathbb{N}}$ abelscher Gruppen so zu einem Diagramm (über eine geeignete partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$) erweitern, dass $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n \cong_{\mathsf{Ab}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (eine Wurzel aus -1)**.** Sei

$$R := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/(5^n) \;\middle|\; \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad x_{n+1} \equiv x_n \mod 5^n \right\}.$$

Dann bildet R bezüglich komponentenweiser Addition/Multiplikation einen Ring.

1. Zeigen Sie, dass der durch konstante Folgen gegebene Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ injektiv ist.
2. Wie kann man R als inversen Limes der Form $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/(5^n)$ in Ring auffassen?
3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 2 \mod 5$ und es gebe eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + 1 = 5^n \cdot k$. Zeigen Sie: Dann erfüllt $y := x - 4 \cdot 5^n \cdot k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $y^2 \equiv -1 \mod 5^{n+1}$.
4. Folgern Sie: Es gibt ein $x \in R$ mit $x^2 = -1$.

Aufgabe 4 (darstellbare Funktoren und Limiten)**.** Sei C eine Kategorie und sei $X \in \operatorname{Ob}(C)$. Zeigen Sie, dass der Funktor $\operatorname{Mor}_C(X, \,\cdot\,) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ im folgenden Sinne mit inversen Limiten verträglich ist:

> Ist $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und ist $Y := \varprojlim_{i\in I} X_i$ ein inverser Limes eines I-Diagramms in C, so erfüllt $\operatorname{Mor}_C(X,Y)$ zusammen mit den induzierten Morphismen die universelle Eigenschaft des inversen Limes $\varprojlim_{i\in I} \operatorname{Mor}_C(X,X_i)$ in Set.

Hinweis. Verstehen Sie, was mit „mit den induzierten Morphismen“ gemeint ist? Welche universelle Eigenschaft ist nachzuweisen?

Bonusaufgabe (Polymorphismus)**.** Was haben polymorphe Funktionen in der Programmiersprache $\mathsf{Haskell}$ mit natürlichen Transformationen im Sinne der Kategorientheorie zu tun?
Hinweis. Theorems for free!

Abgabe bis zum 27. April 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen