Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 3 vom 11. Mai 2017

Aufgabe 1 (orthogonale Komplemente von orthogonalen Komplementen …). Sei $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $A \subset V$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Es gilt $\bigl((A^\perp)^\perp\bigr)^\perp = A^\perp$.

Aufgabe 2 (Orthonormalisierung). Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren eine Basis des Untervektorraums $V(A,0) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$.
2. Wenden Sie nun das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf diese Basis an, um eine Orthonormalbasis von $V(A,0)$ (bezüglich dem euklidischen Skalarprodukt) zu erhalten.

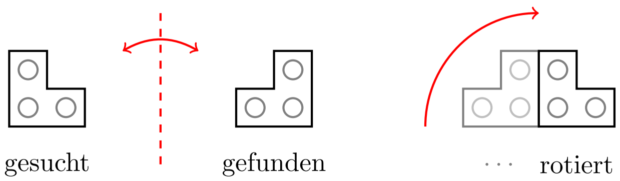
Aufgabe 3 (Eindeutigkeit orthogonaler Projektionen). Sei $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: Es gibt höchstens eine lineare Abbildung $p\colon V \longrightarrow V$ mit

$$\operatorname{im} p \subset U \quad \text{und} \quad \operatorname{im}(p - \mathrm{id}_V) \subset U^\perp.$$

Aufgabe 4 (Spiegelei).

1. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$, so ist $L(A)$ eine Spiegelung (im Sinne von Aufgabe 3 auf Blatt 2).
2. Folgern Sie: Jede lineare Isometrie der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ ist eine Spiegelung oder kann als Komposition von zwei Spiegelungen geschrieben werden.

Bonusaufgabe (Legometrie). Beim Bauen nach einer Lego-Anleitung finden Sie statt des eigentlich gesuchten Teils nur das (an einer Ebene) gespiegelte Teil. Erfreut stellen Sie fest, dass sich dieses durch eine ebene Rotation in das gesuchte Teil überführen lässt. Was können Sie daraus über Ihr Teil schließen?



Abgabe bis zum 18. Mai 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen