Aufgabenserie für Klasse 11/12
zum Auswahlseminar des BK Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 56. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 21. 1. 2017** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf das Seminar schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Lösungen können Sie **bis zum 11. 1. 2015** an

Prof. B. Kirchheim, Alfred-Kästner-Straße 88, 04275 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Sei V ein *konvexes* Vieleck mit 3000 Ecken und einem Umfang von 3000. Zeigen Sie, dass man in jedem solchen Vieleck V drei Ecken finden kann, sodass das von diesen Ecken aufgespannte Dreieck einen Flächeninhalt F kleiner als $\frac{1}{100}$ hat.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Der Graph einer auf der Menge aller reellen Zahlen definierten Funktion f habe mindestens zwei (verschiedene) Symmetriezentren.

Man beweise, dass sich f als Summe einer linearen und einer periodischen Funktion darstellen lässt.

Hat der Graph jeder periodischen Funktion mindestens ein Symmetriezentrum? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig.

Begriffserläuterungen: Ein Punkt P heißt *Symmetriezentrum* einer Figur, wenn jeder Punkt der Figur bei Spiegelung an P wieder in einen Punkt der Figur übergeht.

Eine Funktion g heißt *linear*, wenn es reelle Zahlen a, b so gibt, dass für alle x gilt $g(x) = a\,x + b$.

Eine Funktion p heißt *periodisch*, wenn es eine positive reelle Zahl k so gibt, dass für alle x gilt $p(x) = p(x + k)$.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Man bestimme alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$, für die gilt

$$x_1{}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + \ldots + (x_{2015} - x_{2016})^2 + (1 - x_{2016})^2 = \frac{1}{2017}\,.$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Vom Polynom

$$p(x) = a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,x + a_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sei bekannt, dass für fünf verschiedene ganzzahlige x der Wert $p(x) = 6$ angenommen wird.

Man beweise, dass dann $p(z) \neq 12$ für alle ganzen Zahlen z gilt.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei A liege auf der Seite $\overline{BC}$ ein Punkt L. Der Umkreis von Dreieck ABL schneide AC in M und der Umkreis von Dreieck CAL schneide AB in N.

Zeigen Sie, dass L, M und N auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Ein konvexer Körper wird ausschließlich von Fünfecken und Sechsecken als Seitenflächen begrenzt, wobei in jeder Ecke genau drei Seitenflächen zusammenstoßen. Jedes Fünfeck hat fünf Sechsecke als Nachbarn, jedes Sechseck drei Fünfecke.

Bestimmen Sie die Anzahl der Ecken, Kanten und Fünfecks- und Sechsecksflächen dieses Körpers.