



# Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Herausgegeben von K. Hensel und H. Hasse.

Druck und Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35.

Sonderabdruck aus Band 175 Heft 3. 1936.

## Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. II.

Von G. Haenzel in Karlsruhe.

### Inhalt.

	Seite
I. Die Regelscharen dritter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz .....	169
II. Die Regelscharen vierter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz .....	171
III. Ringsysteme und Ketten von Regelscharen zweiter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz .....	175
IV. Konjugierte Richtungen und Polarinvarianz in der Umgebung eines Kongruenzstrahles .....	177

Die erste Abhandlung<sup>1)</sup> behandelte die automorphen Kollineationen, die Involutionen und die Polarentheorie der linearen Strahlenkongruenz, danach allgemeine Theoreme über die in der linearen Kongruenz mit ihren Regelscharen enthaltenen Regelflächen und insbesondere die differentialgeometrischen Eigenschaften dieser Flächen. Im Anschluß hieran ergab sich eine neuartige Bedeutung der Differentialgleichung erster Ordnung für die Geometrie der linearen Kongruenz mit zahlreichen neuen geometrischen Theoremen. Eine sich hieran anschließende Abhandlung über die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes<sup>1)</sup> beschäftigte sich in entsprechender Weise mit der Geometrie dieses Gebildes. Die jetzt vorliegende Arbeit setzt jene Untersuchungen fort. Der erste und zweite Abschnitt bringen eine kurze Theorie der Regelscharen dritter und vierter Ordnung in der linearen Kongruenz auf Grund der früheren Ergebnisse. Der dritte behandelt die hier sogenannten Ringsysteme und Ketten von Regelscharen zweiter Ordnung mit merkwürdigen neuen Sätzen. Im vierten Abschnitt erscheinen die neuen Begriffe der konjugierten Richtungen und der Polarinvarianz in der Umgebung eines Kongruenzstrahles. Ihre Einführung ermöglicht es geradezu, bestimmte Methoden und Ergebnisse der Theorie analytischer Funktionen für die Erforschung der Geometrie der linearen Kongruenz dienstbar zu machen, wodurch neue Ergebnisse gewonnen werden.

Die Darstellung der linearen Strahlenkongruenz als Schnitt zweier Strahlenkomplexe gestattet die Elimination zweier Linienkoordinaten aus der quadratischen Plückerschen Grundgleichung und die Behandlung der hyperbolischen, der elliptischen und der parabolischen linearen Kongruenz als Strahlenfläche, als strahlenlose Fläche und als Kegel zweiten Grades. Eine anschließende stereographische Projektion dieser Flächen bildet die drei Arten der linearen Kongruenz auf die Ebene mit zwei reellen, mit zwei konjugiert imaginären und mit zwei vereinigten Fundamentalpunkten ab. Von diesem Hilfsmittel wird hier, wie früher, häufig Gebrauch gemacht.

### I. Die Regelscharen dritter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz.

1. Die Abbildung der linearen Strahlenkongruenz  $C_1^1$  auf die Ebene mit zwei Fundamentalpunkten  $L, R$  stellt eine Regelschar dritter Ordnung  $\mathfrak{R}^3$  der Kongruenz

<sup>1)</sup> Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik 173 (1935), S. 91—113. — Haenzel, Die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik 174 (1936), S. 226—236.

als ebene Kurve dritter Ordnung  $r^3$  dar mit einem Doppelpunkte in dem einen Fundamentalpunkte  $R$  und einem einfachen Punkte in dem anderen  $L$  (Fig. 1)<sup>2)</sup>. Die Punkte  $L, R$  sind stets reell; sie können zusammenfallen, so daß die Fundamentalgerade der Bildebene die rationale Bildkurve  $r^3$  in ihrem Doppelpunkte berührt.

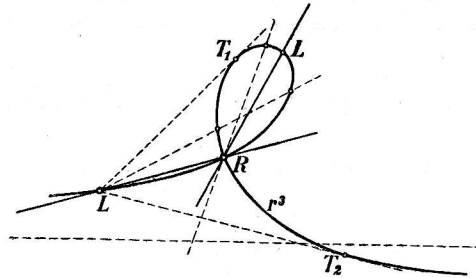


Fig. 1.

Eine rationale ebene Kurve dritter Ordnung ist von vierter Klasse und hat einen Doppelpunkt oder eine Spitze oder einen isolierten Punkt. Im ersten und zweiten Falle besitzt sie einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Wendepunkte, im letzten drei reelle Wendepunkte. Hieraus ist zu ersehen<sup>1)</sup>:

*Die Regelfläche dritten Grades  $R^3$  besitzt eine doppelte Leitgerade und eine zu ihr windschiefe einfache Leitgerade, die sich auch vereinigen können. Ihre Regelschar  $\mathfrak{R}^3$  liegt in einer hyperbolischen oder in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz. Jede Regelfläche dritten Grades ist rational und vom Rang vier. Sie besitzt drei Wenderegelstrahlen, deren oskulierende Regelflächen zweiten Grades Strahlenparaboloide sind.*

~~In der elliptischen linearen Strahlenkongruenz sind keine reellen Regelscharen dritter Ordnung enthalten. In der hyperbolischen linearen Kongruenz liegen zwei Typen von Regelscharen dritter Ordnung.~~

2. Der Doppelpunkt  $R$  einer rationalen ebenen Kurve  $r^3$  in der Bildebene trennt die Schleife der Kurve von der übrigen Kurve. Jede Gerade durch einen gegebenen Punkt  $X$  der Schleife schneidet die Kurve in zwei weiteren reellen Punkten, und aus  $X$  lassen sich zwei konjugiert imaginäre Tangenten an die Kurve legen. Aus einem Kurvenpunkte  $X'$  des übrigen Kurventeiles führen außer der Geraden  $X'R$  und der Tangente in  $X'$  noch zwei weitere reelle Tangenten an die Kurve. Der Strahlenbüschel  $X'$  wird durch diese Tangenten in zwei Teile zerlegt, die Strahlen des einen Teiles enthalten außer  $X'$  zwei reelle Kurvenpunkte, die Strahlen des anderen zwei konjugiert imaginäre.

Der eine Fundamentalpunkt der Bildebene ist der Doppelpunkt  $R$ . Liegt der zweite Fundamentalpunkt  $L$  nicht auf dem Schleifenteile der Bildkurve, so gehen (Fig. 1) aus  $L$  noch zwei reelle einfache Tangenten an die Kurve. Ihre Berührungspunkte  $T_1, T_2$  stellen zwei reelle Torsalstrahlen  $t_1, t_2$  dar<sup>3)</sup>, die beiden reellen Torsalpunkte liegen auf der doppelten Leitgeraden, und die beiden reellen Torsalebene  $\tau_1, \tau_2$  gehen durch die einfache Leitgerade. Die beiden Torsalpunkte begrenzen auf der doppelten Leitgeraden eine Strecke; durch jeden inneren Punkt der Strecke gehen zwei reelle Regelstrahlen, durch jeden äußeren Punkt zwei konjugiert imaginäre Regelstrahlen oder umgekehrt.

Liegt dagegen der zweite Fundamentalpunkt  $L$  auf dem Schleifenteile (Fig. 1), so schneidet jede Gerade durch  $L$  noch in zwei weiteren Kurvenpunkten. Die Geraden

<sup>2)</sup> Haenzel, a. a. O.<sup>1)</sup>, S. 94.

<sup>3)</sup> Haenzel, a. a. O.<sup>1)</sup> S. 106.

durch  $L$  stellen aber die Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung dar, deren Mittelpunkte auf der doppelten Leitgeraden  $l$  liegen und deren Ebenen durch die einfache Leitgerade  $r$  gehen. Durch jeden Punkt von  $l$  gehen in diesem Falle zwei reelle Regelstrahlen der Fläche dritten Grades, und in jeder Ebene durch  $r$  liegen zwei reelle Regelstrahlen. Die Regelfläche besitzt zwei konjugiert imaginäre windschiefe Torsalstrahlen und keine reellen. Die beiden konjugiert imaginären Torsalpunkte liegen auf der doppelten Leitgeraden und die beiden konjugiert imaginären Torsalebene gehen durch die einfache Leitgerade.

Die doppelt berührenden Ebenen einer Regelfläche bilden ihre Doppeltorse. Die Doppeltorse der Regelfläche dritten Grades besteht in beiden Fällen aus dem Ebenenbüschel mit der Achse  $r$ . Insgesamt gilt der Satz:

*Die Regelfläche dritten Grades vom Typus I hat zwei reelle windschiefe Torsalstrahlen, die Regelfläche dritten Grades vom Typus II hat zwei konjugiert imaginäre windschiefe Torsalstrahlen, daher auch konjugiert imaginäre Torsalpunkte und Torsalebene. Die Doppelkurve der Regelfläche besteht in beiden Fällen aus einer reellen doppelten Leitgeraden, die Doppeltorse aus einem reellen Ebenenbüschel erster Ordnung, dessen Achse einfache Leitgerade ist. Die Regelscharen dieser Flächen kommen nur in der hyperbolischen linearen Kongruenz vor.*

Die gegebene Tangentialebene  $\sigma$  der Regelfläche dritten Grades schneidet die Fläche in einem Regelstrahl und in einem mit der doppelten Leitgeraden inzidenten Kegelschnitt  $s^2$ . Die beiden durch die einfache Leitgerade gehenden Torsalebene müssen aber jede Kurve der Fläche und somit den Kegelschnitt  $s^2$  berühren. Deshalb gilt:

*Auf einer Regelfläche dritten Grades vom Typus I schneidet die einfache Leitgerade jede Tangentialebene außerhalb des in der Tangentialebene gelegenen Kegelschnittes; bei einer solchen vom Typus II schneidet sie jede Tangentialebene innerhalb dieses Kegelschnittes.*

**3. Der dritte Typus der Regelfläche dritten Grades ist die Cayleysche Fläche <sup>4)</sup>.** Sie liegt mit ihrer Regelschar in einer parabolischen linearen Kongruenz. Ihre beiden vereinigten Torsalstrahlen sind mit den vereinigten Leitgeraden der Kongruenz zusammengefallen. Wir brauchen auf diese Regelfläche dritten Grades vom Typus III nicht weiter einzugehen.

Jeder der drei Typen ist gegen reelle Kollineationen invariant.

Ein mit den Fundamentalpunkten  $R, L$  inzidenter, oskulierender Kegelschnitt einer rationalen ebenen Kurve enthält keine weiteren Kurvenpunkte. Daraus folgt:

*Ein gegebenes oskulierendes Hyperboloid der Regelfläche dritten Grades enthält außer dem oskulierenden Regelstrahl nur die beiden Leitgeraden der Fläche.*

## II. Die Regelscharen vierter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz.

4. Eine gegebene Regelschar  $n$ -ter Ordnung in der linearen Kongruenz hat die deren eine Leitgerade zum  $\alpha$ -fachen Leitstrahl, die andere zum  $\beta$ -fachen, und es ist  $\alpha + \beta = n$ . Für  $\alpha = \beta$  läßt sich die Regelschar  $n$ -ter Ordnung als vollständiger Schnitt der linearen Kongruenz mit einem Strahlenkomplexe vom Grade  $\frac{n}{2}$  darstellen <sup>5)</sup>. Für  $\alpha \neq \beta$  kann die Regelschar durch Hinzufügung von  $|\alpha - \beta|$  Kongruenzstrahlenbüscheln erster Ordnung zum vollständigen Schnitt der Kongruenz mit einem Strahlenkomplexe ergänzt werden, dessen Grad die größere der Zahlen  $\alpha, \beta$  ist.

<sup>4)</sup> Zuerst entdeckt von M. Chasles, Comptes Rendus 53 (1861), S. 888, Anm. 1.

<sup>5)</sup> Haenzel, a. a. O.<sup>1)</sup>, S. 95.

Infolgedessen teilen sich die Regelscharen vierter Ordnung der linearen Kongruenz vorerst in zwei Arten. Die Regelschar vierter Ordnung *erster Art* hat die beiden Leitgeraden zu doppelten Leitstrahlen. Es ist  $\alpha = \beta = 2$ . Die Regelschar vierter Ordnung *zweiter Art* hat die eine Leitgerade zum einfachen, die andere zum dreifachen Leitstrahl,  $\alpha = 1, \beta = 3$ . Die Regelschar vierter Ordnung *erster Art* ist der vollständige Schnitt der linearen Kongruenz mit einem quadratischen Strahlenkomplexe, und durch sie gehen unendlich viele quadratische Strahlenkomplexe <sup>5)</sup>. Die Regelschar vierter Ordnung *zweiter Art* ist der Teilschnitt der hyperbolischen linearen Kongruenz mit einem kubischen Strahlenkomplexe, der außerdem noch zwei Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung enthält. Die Punkte der einen Leitgeraden sind dreifache, die der anderen einfache Punkte. Der Leser erkennt, daß die Bezeichnungen in Anlehnung an die Theorie der biquadratischen Raumkurven gewählt sind:

Die biquadratische Raumkurve erster Art ist die Schnittkurve von  $\infty^1$  Flächen zweiten Grades; hat dagegen eine reelle Strahlenfläche zweiten Grades  $R^2$  mit einer Regelfläche dritten Grades  $R^3$  zwei Regelstrahlen gemein, so durchdringen sie einander noch in einer biquadratischen Raumkurve zweiter Art  $k^4$ . Die Leitstrahlen von  $R^2$  sind Trisekanten, die Regelstrahlen von  $R^3$  Unisekanten von  $k^4$ . Durch die Raumkurve geht keine einzige weitere Fläche zweiten Grades.

5. Die Regelflächen vierten Grades erster Art. Wird die Regelschar vierter Ordnung erster Art als Schnitt der (hyperbolischen, parabolischen oder elliptischen) linearen Kongruenz mit einem biquadratischen Strahlenkomplexe erzeugt und die Kongruenz als Fläche zweiten Grades gedeutet, so stellt sich die Regelschar vierter Ordnung erster Art auf ihr als biquadratische Raumkurve erster Art dar. Die stereographische Projektion der Fläche zweiten Grades verwandelt dann die Regelschar vierter Ordnung in eine ebene bizirkulare Kurve vierter Ordnung — bizirkular im Sinne der durch die beiden Fundamentalpunkte  $L, R$  in der Bildebene bedingten Metrik.

Setzen wir als Fläche zweiten Grades vorübergehend eine Kugel, was den Realitätsverhältnissen der elliptischen linearen Kongruenz entspricht. Durch die Raumkurve vierter Ordnung erster Art gehen vier Kegel zweiten Grades  $K_1^2, K_2^2, K_3^2, K_4^2$ . Ihre Mittelpunkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sind die Eckpunkte des gemeinsamen Polartetraeders aller  $\infty^1$  durch die Raumkurve gehenden Flächen zweiten Grades. Einen der vier Kegel  $K_i^2$  greifen wir heraus. Seine Tangentialebenen schneiden die Kugel in  $\infty^1$  Kreisen. Die Kreise umhüllen die Raumkurve vierter Ordnung erster Art, jeder von ihnen berührt sie in zwei Punkten. Auch schneiden alle diese Kreise den Berührungskreis  $b_i^2$  des Kegels  $K_i^2$  auf der Kugel senkrecht <sup>6)</sup>. Das gleiche gilt für die übrigen drei Kegel. Die vier Berührungskreise  $b_i^2$  sind die Schnittkreise der Kugel mit den vier Ebenen des Polartetraeders  $P_1P_2P_3P_4$ , erfüllen also gegenseitig die Orthogonalitätsbedingung. Durch stereographische Projektion ergibt sich daraus folgendes Theorem:

Die bizirkulare ebene Kurve vierter Ordnung ist Hüllkurve von  $\infty^1$  Orthogonalkreisen eines festen Kreises  $b_1^2$ . Die Kurve berührt jeden Hüllkreis in zwei für  $b_1^2$  inversen Punkten, ist also für  $b_1^2$  selbstinvers. In der gleichen Beziehung steht die Kurve zu drei weiteren Kreisen  $b_2^2, b_3^2, b_4^2$ . Die vier Inversionskreise  $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2$  sind je zu einander orthogonal. Die  $\infty^1$  Mittelpunkte einer Schar von Hüllkreisen erfüllen je einen Kegelschnitt, den Deferenten. Durch einen Inversionskreis und den zugehörigen Defe-

<sup>6)</sup> Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873, S. 31.



renten ist die bizirkulare Kurve als Hüllkurve bestimmt, und es lassen sich die drei übrigen Inversionskreise nebst Deferenten angeben.

Setzen wir für die Kugel eine Strahlenfläche zweiten Grades, was den Realitätsverhältnissen der hyperbolischen linearen Kongruenz entspricht, so führt die stereographische Projektion auf die gleichen Ergebnisse, wenn die Begriffe Kreis, Inversion, bizirkular und orthogonal auf die durch zwei reelle Fundamentalpunkte bedingte Metrik der Bildebene bezogen werden. **Erinnern wir uns daran <sup>1)</sup>, daß der Kreis der Ebene die Regelschar zweiter Ordnung der linearen Kongruenz wiedergibt, die Orthogonalität zweier Kreise die Polarinvarianz der Regelscharen, so gilt:**

*Eine mit ihrer Regelschar in der linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades erster Art  $R^4$  ist polarinvariant für vier einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades  $R_1^2, R_2^2, R_3^2, R_4^2$ . Jede dieser Regelflächen ist für die übrigen polarinvariant. Die Regelfläche vierten Grades erster Art  $R^4$  ist Hüllfläche von vier Systemen einscharig in der Kongruenz enthaltener Regelflächen zweiten Grades. Diese sind je für eine der vier Flächen  $R_i^2$  polarinvariant.*

Die Mittelpunkte der  $\infty^3$  einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades erfüllen die Fluchtebene  $\mu$  der Kongruenz. Ein gegebener Punkt  $M$  der Fluchtebene ist der Mittelpunkt von  $\infty^1$  solchen konzentrischen Flächen zweiten Grades. Der durch  $M$  gehende Kongruenzstrahl ist der einzige in der Kongruenz enthaltene Durchmesser dieser Flächen. Eine gegebene einscharig in der Kongruenz enthaltene Mittelpunktsfläche zweiten Grades besitzt einen Durchmesser, der Kongruenzstrahl ist. Sie ordnet ihm den unendlichfernen Kongruenzstrahl als reziproke Polare zu.

Wird bei der Abbildung der linearen Kongruenz auf die Ebene der unendlichferne Kongruenzstrahl in das unendlichferne Element der Ebene überführt, so stellt **der Mittelpunkt eines Bildkreises den in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der entsprechenden Regelfläche zweiten Grades dar; zwei für die Regelfläche zweiten Grades reziprok polare Kongruenzstrahlen sind auf zwei inverse Punkte des Bildkreises abgebildet.**

Die bizirkulare ebene Kurve vierter Ordnung umhüllt vier Systeme von Kreisen. Die  $\infty^1$  Kreise je eines Systems sind Orthogonalkreise je einer Inversion, und ihre Mittelpunkte erfüllen je einen Kegelschnitt, den Deferenten. Ein gegebener Kegelschnitt, **der nicht durch die Fundamentalpunkte geht, stellt aber eine Regelschar vierter Ordnung erster Art dar <sup>7)</sup>. Aus alledem folgt:**

*Die in der linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades erster Art umhüllt vier Systeme von Regelflächen zweiten Grades. Die  $\infty^1$  Flächenmittelpunkte der Hüllflächen erfüllen in der Fluchtebene vier ebene Kurven vierter Ordnung (vom Geschlechte 0 oder 1), ihre in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser erfüllen vier Regelscharen vierter Ordnung erster Art.*

6. Klassifikation der Regelflächen vierten Grades in der linearen Kongruenz. Eine in der linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades hat die (reellen, vereinigten oder konjugiert imaginären) windschiefen Leitgeraden  $l, r$  der Kongruenz zu Leitstrahlen. Aus der Bildkurve der Fläche kann man sofort auf ihre geometrischen Eigenschaften schließen <sup>8)</sup>. Es ergeben sich folgende sechs Typen:

<sup>7)</sup> Haenzel, a. a. O. <sup>1)</sup> S. 95.

<sup>8)</sup> Haenzel, a. a. O. <sup>1)</sup>. Insbesondere Abschnitt III, Differentialgeometrische Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen.

I. Die Regelfläche vierten Grades hat die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) windschiefen Strahlen  $l, r$  zu doppelten Leitgeraden. Ihre Doppelkurve besteht aus diesen Geraden, ihre Doppeltorse aus den Ebenenbüscheln erster Ordnung mit den Achsen  $l, r$ . Sie kann erzeugt werden durch eine (2, 2)-Verwandtschaft zwischen den Punktreihen  $l, r$  oder zwischen den Ebenenbüscheln  $l, r$ . Die Bildkurve der Regelschar ist eine ebene bizirkulare Kurve vierter Ordnung vom Geschlechte 1, hat neben den Fundamentalpunkten  $L, R$  keine anderen Doppelpunkte oder Spitzen, 8 Doppeltangenten und 12 Wendetangenten. Da sie von achter Klasse ist, gehen von den Doppelpunkten  $L, R$  außer den Haupttangente noch je vier einfache Tangenten an die Kurve. Diese beiden Tangentenquadrupel haben gleiches Doppelverhältnis. Auf Grund dieser Eigenschaften der Bildkurve<sup>8)</sup> gilt:

*Die Regelfläche vierten Grades vom Typus I hat das Geschlecht 1, acht Torsalregelstrahlen, zwölf Wenderegelstrahlen, keine doppelten oder Rückkehrregelstrahlen. Ihre acht Torsalebene gehen je zu vierten durch die beiden doppelten Leitgeraden  $l, r$  und ihre acht Torsalpunkte liegen je zu vierten auf  $l, r$ . Diese beiden Würfe von Torsalebene und von Torsalpunkten haben gleiches Doppelverhältnis.*

Der Typus I enthält zwei Unterarten, denn die doppelten Leitgeraden sind entweder reelle oder konjugiert imaginäre windschiefe Strahlen.

II. Die Regelfläche vierten Grades hat als Doppelkurve eine doppelte Leitgerade  $r = l$ , längs der die Fläche sich selbst noch berührt. Für die Bildkurve fallen die Fundamentalpunkte  $R, L$  zusammen. Die Untersuchung der Bildkurve führt sofort auf den Satz:

*Die Regelfläche vierten Grades vom Typus II hat das Geschlecht 1; sie besitzt vier Torsalstrahlen zweiter Ordnung erster Art, aber keine doppelten Regelstrahlen. Ihre vier Torsalpunkte und vier Torsalebene sind mit der doppelten Leitgeraden  $r = l$  inzident, längs der die Fläche sich außerdem selbst berührt. Ihre Doppeltorse ist das doppelte Ebenenbüschel mit der Achse  $r = l$ .*

Der Typus I kommt in der elliptischen und der hyperbolischen, Typus II nur in der parabolischen linearen Kongruenz vor.

III. Die Regelfläche vierten Grades hat außer den beiden doppelten Leitgeraden  $r, l$  einen doppelten Regelstrahl  $e$ . Die Bildkurve geht zweimal durch jeden Fundamentalpunkt und besitzt einen dritten Doppelpunkt  $E$ , sechs Wendepunkte, vier Doppeltangenten und ist von der sechsten Klasse. Daraus folgt:

*Die Regelfläche vierten Grades vom Typus III hat das Geschlecht 0, zwei windschiefe doppelte Leitgeraden  $r, l$  und einen doppelten Regelstrahl  $e$  oder isolierten Regelstrahl oder Rückkehrregelstrahl; im ersten und zweiten Falle sind vier, im dritten Falle zwei Torsalregelstrahlen vorhanden, sowie sechs Wenderegelstrahlen. Die Doppeltorse besteht aus den drei Ebenenbüscheln mit den Achsen  $r, l, e$ .*

Es sind zwei Arten dieses Typus zu unterscheiden, je nachdem die Leitgeraden  $r, l$  reell oder konjugiert imaginär sind. Der Typus kommt also in der hyperbolischen und der elliptischen linearen Kongruenz vor.

IV. Rücken die doppelten Leitgeraden  $r, l$  zusammen, so ergibt sich die Regelfläche vierter Ordnung vom Typus IV. Hier gilt auf Grund entsprechender Überlegungen:

*Die Regelfläche vierten Grades vom Typus IV hat das Geschlecht 0. Ihre Doppelkurve besteht aus der doppelten Leitgeraden  $r = l$ , längs der gleichzeitig Selbstberührung stattfindet, und aus einem Regelstrahl  $e$ , der Doppeltangentenregelstrahl, isolierter Regelstrahl oder Rück-*

kehrregelstrahl sein kann. Im ersten und zweiten Falle sind zwei Torsalregelstrahlen zweiter Ordnung erster Art, im letzten Falle ein solcher Torsalregelstrahl vorhanden. Die Doppeltorse besteht aus dem doppelten Ebenenbüschel mit der Achse  $r = l$  und dem einfachen mit der Achse  $e$ .

Dem Typus I—IV gehören die Regelflächen vierten Grades erster Art an (vgl. 4).

V. Die Regelfläche vierten Grades vom Typus V hat eine dreifache und eine einfache Leitgerade. Die Bildkurve geht dreimal durch den einen und einmal durch den andern Fundamentalpunkt. Aus der Betrachtung der Bildkurve ergibt sich ohne weiteres:

*Die Regelfläche vierten Grades vom Typus V ist vom Geschlecht 0; sie hat eine dreifache Leitgerade  $l$  und eine einfache Leitgerade  $r$ , beide stets reell. Ihre Regelschar enthält vier (evtl. paarweise vereinigte) Torsalstrahlen und kommt nur in der hyperbolischen linearen Kongruenz vor. Die Doppeltorse ist das dreifache Ebenenbüschel mit der Achse  $r$ .*

VI. Die beiden reellen Leitgeraden  $r$  und  $l$  vereinigen sich, die Regelschar der Fläche liegt in der parabolischen linearen Kongruenz mit den vereinigten Leitgeraden  $r = l$ . Die Gerade  $r = l$  ist dreifache Gerade der Fläche und Achse des Ebenenbüschels der dreifach berührenden Ebenen. Sie ist zweifache Torsallinie zweiter Ordnung erster Art und einfache Leitgerade der Fläche. Die beiden Kuspidualpunkte auf  $r = l$  sind reell oder konjugiert imaginär. Die Fläche hat das Geschlecht 0. — Einen Sonderfall dieses Typus stellt die Voßsche Regelfläche vierten Grades dar, bei der die dreifache Gerade eine Rückkehrtorsallinie ist<sup>9)</sup>.

Zum Typus V und VI gehören nur Regelflächen vierten Grades zweiter Art (vgl. 4). Die Typen I, III kommen in der hyperbolischen und der elliptischen linearen Kongruenz vor, V nur in der hyperbolischen, II, IV, VI nur in der parabolischen.

Unsere Nr. I—VI entsprechen den Nr. I, II, VII, VIII, X, XII der von R. Sturm<sup>10)</sup> gegebenen Einteilung. Die übrigen sechs Typen von Regelflächen vierten Grades in der Sturmischen Einteilung kommen mit ihren Regelscharen in der linearen Kongruenz nicht vor, sondern sind im (allgemeinen oder speziellen) linearen Strahlenkomplex enthalten.

### III. Ringsysteme und Ketten von Regelflächen zweiten Grades in der linearen Kongruenz.

7. Die im Laufe der Ausführungen häufig benützte Abbildung der linearen Kongruenz besteht aus der Elimination zweier Linienkoordinaten aus der quadratischen Plückerschen Fundamentalbeziehung (mit Hilfe der Gleichungen zweier durch die Kongruenz gehenden linearen Komplexe), aus der Deutung der übrigbleibenden Gleichung als Fläche zweiten Grades und aus der stereographischen Projektion dieser Fläche. Da das Projektionszentrum willkürlich wählbar ist, läßt sich der unendlichferne Kongruenzstrahl in das unendlichferne Element der Bildebene überführen. Dann entsprechen nicht nur die Kreise der Bildebene den Regelscharen zweiter Ordnung, sondern die Geraden den parabolischen Regelscharen, der Mittelpunkt eines Bildkreises stellt den in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der zugehörigen Regelfläche zweiten Grades dar, und konzentrische Kreise sind die Bilder konzentrischer Regelflächen zweiten Grades.

8. Zwei gegebene, einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades  $H_1^2, H_2^2$  werden von zwei Systemen von Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz umhüllt. Eine gegebene Regelschar  $R_n^2$  des ersten Systemes  $S(R_1^2, R_2^2, \dots, R_n^2, \dots)$  berührt  $H_1^2$  längs eines Regelstrahles  $r_1$  und berührt  $H_2^2$  längs

<sup>9)</sup> Voss, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Mathem. Annalen 8 (1875), S. 54—135, insbes. S. 134.

<sup>10)</sup> R. Sturm, Liniengeometrie I, Leipzig 1892, S. 52—61.

eines Regelstrahles  $r_2$ ; die Berührungen von  $H_1^2$  und  $H_2^2$  mit  $R_n^2$  sind ungleichartig. Eine gegebene Regelschar  $R_n'^2$  des zweiten Systemes  $S'(R_1'^2, R_2'^2, \dots, R_n'^2, \dots)$  berührt  $H_1^2$  längs eines Regelstrahles  $r_1'$  und  $H_2^2$  längs eines Regelstrahles  $r_2'$ ; die Berührungen von  $H_1^2$  und  $H_2^2$  mit  $R_n'^2$  sind gleichartig.

Wir kennen die Darstellung der Regelscharsysteme  $S, S'$  und der von ihnen umhüllten Flächen zweiten Grades  $H_1^2, H_2^2$  in der Bildebene (Fig. 2 und 3):

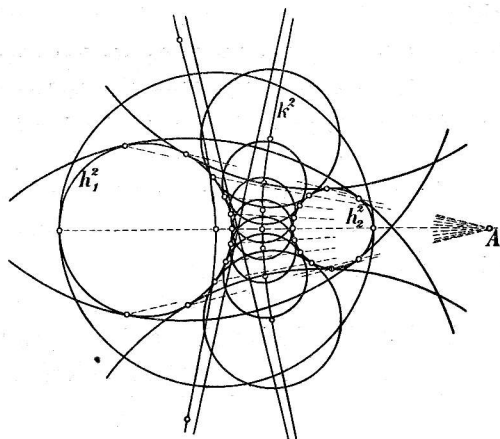


Fig. 2.

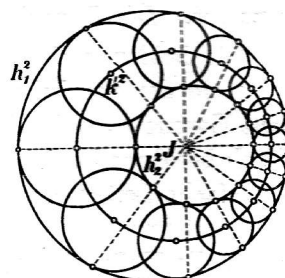


Fig. 3.

Der Mittelpunktort aller Kreise, die zwei gegebene Kreise  $h_1^2, h_2^2$  je gleichartig oder je ungleichartig berühren, sind zwei Kegelschnitte mit den Brennpunkten in den Mittelpunkten von  $h_1^2$  und  $h_2^2$ . Der eine Kegelschnitt  $k^2$  ist Mittelpunktort aller gleichartig berührenden Kreise, seine Hauptachse ist die Radiendifferenz von  $h_1^2$  und  $h_2^2$ . Der andere Kegelschnitt  $k'^2$  ist Mittelpunktort aller ungleichartig berührenden Kreise, seine Hauptachse ist die Radiensumme von  $h_1^2$  und  $h_2^2$ . Die verschiedenen Möglichkeiten, die sich aus der gegenseitigen Lage der Kreise  $h_1^2, h_2^2$  für die Kegelschnitte  $k^2, k'^2$  ergeben, sind durch J. Steiner<sup>11)</sup> bekannt. Jede Verbindungsgerade zweier ungleichartiger Berührungspunkte auf den festen Kreisen  $h_1^2, h_2^2$  geht durch das eine Ähnlichkeitszentrum  $J$  dieser Kreise, jede Verbindungsgerade zweier gleichartiger Berührungspunkte geht durch das andere Ähnlichkeitszentrum  $A$ .

In jedem Falle sind die Mittelpunktorte der beiden Hüllkreissysteme die Bilder zweier Regelscharen vierter Ordnung erster Art. Der Mittelpunkt jedes Hüllkreises stellt den in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der entsprechenden Hüllfläche dar. Die Strahlenbüschel erster Ordnung mit den Ähnlichkeitszentren  $A, J$  als Mittelpunkten geben zwei Büschel von parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung wieder. Werden die beiden Systeme von Flächen zweiten Grades, welche die Hüllregelscharen tragen, als *Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades* bezeichnet, die Flächen zweiten Grades  $H_1^2, H_2^2$  als deren *Leitflächen*, so folgt:

Zwei gegebene Flächen zweiten Grades  $H_1^2, H_2^2$  werden von zwei Ringsystemen von Regelflächen zweiten Grades umhüllt. Die  $\infty^1$  Flächen des einen Ringsystems berühren die beiden Leitflächen  $H_1^2, H_2^2$  gleichartig, die  $\infty^1$  Flächen des andern Ringsystems berühren

<sup>11)</sup> J. Steiner, Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln, herausgegeben von Rud. Fueter, Zürich u. Leipzig 1931, § 32.



sie ungleichartig. Die Mittelpunktsorte der Flächen beider Ringsysteme sind zwei ebene Kurven vierter Ordnung in der Fluchtebene, und die in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der Flächen beider Ringsysteme erfüllen zwei Regelscharen vierter Ordnung. Die  $\infty^1$  Strahlenparaboloide durch die  $\infty^1$  Paare von Berührungsstrahlen der Regelflächen eines Ringsystems mit den beiden Leitflächen bilden einen Büschel.

Sind die beiden umhüllten Leitflächen  $H_1^2, H_2^2$  konzentrisch, so besteht der Mittelpunktsort beider Ringsysteme aus zwei Kegelschnitten, der Ort jener Durchmesser aber aus zwei Regelscharen zweiter Ordnung.

9. Die Ringsysteme von einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades geben zu eigenartigen und interessanten Flächenkonfigurationen Anlaß. Sie drängen sich uns bei der Betrachtung von *Kreisketten* auf <sup>12)</sup>. Wir betrachten  $n$  Kreise  $r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2$ , die zwei feste Kreise  $h_1^2, h_2^2$  (gleichartig oder ungleichartig) berühren; jeder Kreis  $r_i^2$  schneide den folgenden unter rechtem Winkel und der letzte  $r_n^2$  sei zum ersten orthogonal. Wir nennen die Folge der Kreise  $r_1^2, \dots, r_n^2$  eine *zyklisch orthogonale  $n$ -gliedrige Kreiskette*. Von selbst ergibt sich hier der Begriff der *zyklisch autopolaren Kette von Regelflächen zweiten Grades*.

Eine  $n$ -gliedrige zyklisch autopolare  $R^2$ -Kette besteht aus  $n$  einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades  $R_1^2, R_2^2, \dots, R_i^2, \dots, R_n^2$  als Gliedern der Kette ( $n \geq 3$ ). Jede gegebene Regelfläche  $R_i^2$  der Kette ist für die ihr in der Kette vorangehende und für die ihr nachfolgende Regelfläche zweiten Grades autopolar. Es ist auch  $R_n^2$  für  $R_1^2$  autopolar. Die Kette schließt sich also nach  $n$  Gliedern und umhüllt zwei Regelflächen zweiten Grades  $H_1^2, H_2^2$  als Leitflächen in einem oder mehreren Umläufen. Sie ist daher stets in einem Ringsystem von Flächen zweiten Grades enthalten. Eine automorphe Kollineation  $K$  der linearen Kongruenz, die das Kettenglied  $R_1^2$  in  $R_2^2$  überführt, verwandelt auch das Glied  $R_i^2$  in  $R_{i+1}^2$  und das letzte  $R_n^2$  in das erste  $R_1^2$ . Jede zyklisch autopolare  $n$ -gliedrige Kette bedingt eine Kollineation, die zyklisch vom  $n$ -ten Grade ist; ihre  $n$ -malige Wiederholung erzeugt die Identität.

Die beiden Leitflächen  $H_1^2, H_2^2$  der Kette bestimmen einen Büschel von einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades. Jede einzelne Fläche dieses Büschels geht durch die Kollineation  $K$  in sich über. Die  $\infty^1$  Flächen des reziprok polaren Büschels von Flächen zweiten Grades werden dagegen durch die Kollineation ineinander überführt; da die Kollineation  $K$  zyklisch vom  $n$ -ten Grade ist, ordnet sie die Flächen des reziprok polaren Büschels in Gruppen zu je  $n$ .

#### IV. Konjugierte Richtungen und Polarinvarianz in der Umgebung eines Kongruenzstrahles.

10. Durch einen gegebenen Kongruenzstrahl  $s$  der linearen Kongruenz gehen  $\infty^2$  einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades. Sie bilden einen Bündel und lassen sich auf  $\infty^1$  Büschel von Regelflächen zweiten Grades verteilen. Die auf je einen Büschel entfallenden Flächen berühren je einander längs des Strahles  $s$ . Diese  $\infty^1$   $R^2$ -Büschel durch  $s$  sind paarweise reziprok polare  $R^2$ -Büschel im polaren Raume der Kongruenz <sup>13)</sup>. Jeder von ihnen enthält ein und nur ein Strahlenparaboloid. Mit anderen Worten:

<sup>12)</sup> Haenzel, Über eine Klasse von Abelschen Gleichungen, Jahresber. d. deutschen Mathem. Vereinigung **41** (1931), S. 73—79.

<sup>13)</sup> Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. **33** (1931), S. 731—90.

Die  $\infty^1$  durch einen gegebenen Kongruenzstrahl  $s$  gehenden in der Kongruenz einschichtig enthaltenen Strahlenparaboloide sind paarweise füreinander polarinvariant, und ihre in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen bilden in dieser Anordnung eine Involution konjugierter Regelscharen im polaren Raume der Kongruenz.

Beschreibt ein Kongruenzstrahl eine (algebraische oder transzendente) Regelschar  $\mathfrak{R}$  und passiert er dabei den Strahl  $s$ , so wird die Regelschar  $\mathfrak{R}$  — unter der Voraussetzung, daß  $s$  für sie ein regulärer Strahl ist — von einer und nur einer durch  $s$  gehenden parabolischen Regelschar zweiter Ordnung berührt. Die parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung durch  $s$  geben die  $\infty^1$  Richtungen an, in denen die  $s$  enthaltenden Regelscharen der Kongruenz durch den Strahl  $s$  hindurchführen. Wir nennen sie die  $\infty^1$  Kongruenzrichtungen durch den Kongruenzstrahl  $s$  und bezeichnen zwei durch konjugierte Regelscharen bedingte Richtungen als konjugierte Kongruenzrichtungen. Mit anderen Worten:

Die  $\infty^1$  Kongruenzrichtungen durch einen gegebenen Kongruenzstrahl  $s$  sind paarweise konjugiert im polaren Raume der Kongruenz und bilden in dieser Anordnung eine Involution konjugierter Richtungen. Führen zwei (algebraische oder transzendente) Regelscharen  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$  der linearen Kongruenz in zwei konjugierten Richtungen durch  $s$ , so ist jede die Regelschar  $\mathfrak{R}_1$  längs  $s$  berührende Regelschar zweiter Ordnung für jede  $\mathfrak{R}_2$  längs  $s$  berührende Regelschar zweiter Ordnung autopolar. Insbesondere gilt das auch von den beiden oskulierenden Regelscharen zweiter Ordnung und den beiden berührenden parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung.

Man erkennt, daß die Involution konjugierter Richtungen eine hyperbolische, parabolische oder elliptische ist, je nachdem die hyperbolische, parabolische oder elliptische Kongruenz vorliegt. Auch werden zwei konjugierte Richtungen durch den Kongruenzstrahl  $s$  in der Bildebene als senkrechte Richtungen durch den Bildpunkt  $S$  dargestellt.

11. Zwei Systeme von Regelscharen der linearen Kongruenz, die sich überall in konjugierten Richtungen durchdringen, bezeichnen wir als konjugierte Systeme von Regelscharen, ihre Trägerflächen als konjugierte Flächensysteme. Als Beispiele konjugierter Systeme von Regelscharen in der linearen Kongruenz seien hier die folgenden angeführt:

a) Zwei reziprok polare<sup>13)</sup> Büschel  $B_I, B_{II}$  von Regelscharen zweiter Ordnung; sie senden durch einen jeden gegebenen Kongruenzstrahl zwei füreinander autopolare Regelscharen zweiter Ordnung; ihre Bilder sind zwei zueinander senkrechte Kreisbüschel.

b) Besteht der eine der beiden reziproken Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung aus parabolischen Regelscharen, so haben diese außer dem unendlichfernen Kongruenzstrahle noch einen im Endlichen liegenden Kongruenzstrahl  $s$  gemein. Die  $\infty^1$  Regelscharen des anderen Büschels liegen dann auf konzentrischen Strahlenhyperboloiden und diese haben den Kongruenzstrahl  $s$  zum gemeinsamen Durchmesser. Als Bild erscheint jetzt der Geradenbüschel durch den Bildpunkt  $S$  des Strahles  $b$  und der Büschel konzentrischer Kreise um  $S$ .

c) Insbesondere lassen sich aus Regelscharen vierter Ordnung erster Art konjugierte Systeme von Regelscharen herstellen. In der Bildebene erscheinen sie im allgemeinen als zwei orthogonale Scharen von ebenen Kurven vierter Ordnung (Fig. Nr. 4)<sup>14)</sup>. Haben die Regelscharen vierter Ordnung der beiden konjugierten Systeme den unend-

<sup>14)</sup> Orthogonale Netze aus Kurven vierter Ordnung behandelte zuerst Darboux, a. a. O.<sup>6)</sup>, S. 58.

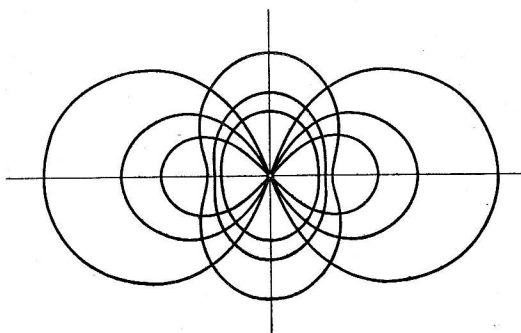


Fig. 4.

lichfernen Kongruenzstrahl zum Doppelregelstrahl oder zum isolierten Regelstrahl, so bilden sie sich als konfokale Kegelschnitte ab.

12. Die nun folgenden Untersuchungen beschränken sich auf die elliptische lineare Kongruenz. Sie läßt sich auf die Kugel und auf die Ebene der gewöhnlichen komplexen Zahlen abbilden. Die in der Theorie der analytischen Funktionen verwendeten Begriffe: Bereich, Weg u. a. sollen daher auf die elliptische lineare Kongruenz übertragen werden.

Eine einfach geschlossene, stückweise aus regulären Regelstrahlen bestehende Regelschar der Kongruenz, die nicht durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl geht, begrenzt einen *einfach zusammenhängenden endlichen Bereich* der elliptischen linearen Kongruenz. Da zwei Kongruenzstrahlen sich niemals reell schneiden, erfüllen die  $\infty^2$  Kongruenzstrahlen des Bereiches das von der Regelschar umgrenzte Raumstück einfach. Zwei gegebene Regelstrahlen des Bereiches lassen sich stets durch *Wege*, d. h. Regelscharen, verbinden, die ganz dem Bereiche angehören. Die Rolle des Kreisbereiches **spielt in diesem Zusammenhange der Hyperboloidbereich**. Der Kreis  $k^2$  der komplexen Zahlenebene entspricht einer hyperbolischen Regelschar  $\mathfrak{R}^2$ , sein Mittelpunkt  $M$  dem in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser  $m$  des zugehörigen Hyperboloides. Dieser Durchmesser  $m$  schneidet das Hyperboloid niemals in reellen Punkten. Der Hyperboloidbereich besteht demnach aus der Menge aller von der hyperbolischen Regelschar umschlossenen Kongruenzstrahlen, die auf derselben Seite des Hyperboloides verlaufen wie der Asymptotenkegel.

Die für den Regularitätsbereich einer analytischen Funktion  $w = f(z)$  in der komplexen Zahlenebene bewirkte Abbildung überträgt sich sinngemäß auf die elliptische lineare Kongruenz; insbesondere aber findet das ganze Verfahren der analytischen Fortsetzung längs einer Kreiskette und die bekannte Entwicklung des analytischen Gebildes aus einem Funktionselemente hier wie dort seine Anwendung; dabei ist die Kreiskette der Zahlenebene durch die *Kette von Regelscharen zweiter Ordnung* zu ersetzen.

Weil nun die konformen Abbildungen orthogonale Kurvennetze des Regularitätsbereiches in ebensolche überführen, so verwandelt die durch eine analytische Funktion bedingte Abbildung der elliptischen linearen Kongruenz konjugierte Richtungen (vgl. 10) und konjugierte Systeme von Regelscharen (vgl. 11) in ebensolche; sie erhält die *Polarität im Kleinen*.

Diese Übertragung der Funktionentheorie analytischer Funktionen in die Liniengeometrie liefert u. a. ein sehr allgemeines Verfahren für die Transformation von Regel-  
flächen.

13. Gegeben seien zwei reziprok polare<sup>13)</sup> Büschel  $B_I(\mathfrak{R}^2)$ ,  $B_{II}(\mathfrak{R}^2)$  von Regel-

scharen zweiter Ordnung der elliptischen linearen Kongruenz. Die  $\infty^1$  Regelscharen des einen Büschels  $B_I(\mathfrak{R}^2)$  gehen durch zwei reelle Grundstrahlen  $f_1, f_2$ , die  $\infty^1$  Regelscharen des anderen Büschels  $B_{II}(\mathfrak{R}^2)$  gehen durch zwei konjugiert imaginäre Grundstrahlen. Jede Regelschar des einen Büschels ist für alle Regelscharen des anderen autopolar. Die Bilder in der Ebene sind zwei orthogonale Kreisbüschel  $B_I(k^2), B_{II}(k^2)$ . Die  $\infty^1$  Kreise des einen Büschels  $B_I(k^2)$  gehen durch zwei reelle Grundpunkte, gegeben durch die komplexen Zahlen  $s_1, s_2$ .

Eine automorphe Kollineation der Kongruenz, die den Grundstrahl  $f_2$  in den unendlichfernen Kongruenzstrahl und den Grundstrahl  $f_1$  in einen vorgegebenen Strahl  $\sigma$  überführt, verwandelt den Büschel  $B_I(\mathfrak{R}^2)$  in den Büschel parabolischer Regelscharen zweiter Ordnung durch  $\sigma$  und den Büschel  $B_{II}(\mathfrak{R}^2)$  in den Büschel konzentrischer Regelscharen zweiter Ordnung mit  $\sigma$  als gemeinsamen Durchmesser. In der Bildebene erscheint die Kollineation als gebrochene lineare Transformation der komplexen Zahl  $z$  von der Form:

$$z' = \alpha \frac{z - s_1}{z - s_2} \quad (\alpha \text{ komplexe Konstante}),$$

und jene beiden Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung stellen sich dar als Geradenbüschel  $\arg z' = c$  durch den Anfangspunkt und als konzentrischer Kreisbüschel  $|z'| = c$  um denselben. Die Transformation

$$w = \frac{1}{2} \left( z' + \frac{1}{z'} \right)$$

bildet bekanntlich jene Geraden und Kreise in konfokale Ellipsen und Hyperbeln ab:

$$\frac{u^2}{\left(c + \frac{1}{c}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(c - \frac{1}{c}\right)^2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1.$$

Die analytische Funktion verwandelt also auch die beiden reziprok polaren Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung  $B_I(\mathfrak{R}^2), B_{II}(\mathfrak{R}^2)$  in zwei konjugierte Systeme von Regelscharen vierter Ordnung erster Art, dargestellt durch die angegebenen konfokalen Ellipsen und Hyperbeln (vgl. 11, c).

Die Regelscharen vierter Ordnung des einen konjugierten Systems (sie sind durch konfokale Ellipsen abgebildet) haben den unendlichfernen Kongruenzstrahl zum isolierten Regelstrahl, die Regelscharen des anderen (abgebildet auf die konfokalen Hyperbeln) haben ihn zum Doppelstrahl (vgl. 11, c).

Die Inversion am Kreise vom Radius  $\rho$  um den Anfangspunkt oder auch die Transformation:

$$z = \frac{\rho^2}{w}$$

verwandelt die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln in die beiden orthogonalen Scharen von bizirkularen Kurven vierter Ordnung (Fig. 5) mit den Gleichungen:

$$(x^2 + y^2)^2 \left( c^2 - \frac{1}{c^2} \right)^2 - \frac{\rho^4}{4} (x^2 + y^2) = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 \sin^2 2c - 4\rho^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Der Inversionskreis ist in der elliptischen linearen Kongruenz durch eine Regelschar zweiter Ordnung vertreten, und zwei inverse Punkte durch zwei reziprok polare Kongruenzstrahlen in bezug auf die von den Regelscharen bedeckten Regelflächen



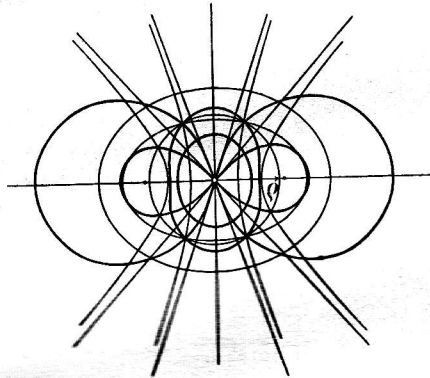


Fig. 5.

**zweiten Grades.** Die Inversion entspricht einer primären Involution in der linearen Kongruenz, und diese verwandelt demnach die speziellen konjugierten Systeme von Regelscharen vierter Ordnung in zwei allgemeine konjugierte Systeme solcher Regelscharen.

Im ganzen werden durch die angegebene Transformation der linearen Kongruenz zwei konjugierte Büschel füreinander polarinvarianter Regelscharen zweiter Ordnung umkehrbar eindeutig in zwei konjugierte Systeme von Regelscharen vierter Ordnung erster Art überführt.

---

Eingegangen 3. Januar 1936.