

# Differentialgleichungen in der Biologie

Volkmar Liebscher  
Institut für Mathematik und Informatik  
Universität Greifswald

Version 30. September 2022

## **Zusammenfassung**

Die Vorlesung gibt Einblicke in mathematische Grundlagen zur Analyse verschiedener Differentialgleichungsmodelle für biologische Systeme.

Vielen Dank an Frau Janina Esins und Frau Katharina Meyer für die Hilfe bei der Erstellung des ersten Skripts und an Frau Julia Bischof für die Überarbeitung.

Diese Version enthält Modifikationen und Ergänzungen durch Prof. Dr. Roland Pulch.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Einordnung . . . . .	3
1.2	Literatur . . . . .	3
1.3	Beispiele . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Qualitative Theorie gew. Dgl.</b>	<b>8</b>
2.1	Allgemeines und Erinnerungen . . . . .	8
2.2	Differentialgleichungen in einer Variablen . . . . .	14
2.3	Lineare Systeme . . . . .	18
2.4	Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungen in höheren Dimensionen . . . . .	29
2.5	Phasenraum-Techniken . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Bifurkationstheorie</b>	<b>43</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	43
3.2	Die Sattel-Knoten-Bifurkation . . . . .	49
3.3	Transkritische Bifurkation . . . . .	53
3.4	Die Heugabel-Bifurkation . . . . .	55
3.5	Die Hopf-Bifurkation . . . . .	57
3.6	Der multidimensionale Fall . . . . .	60
3.7	Modellierung neuronaler Erregung . . . . .	67

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
<b>4 Verzögerte Differentialgleichungen</b>	<b>73</b>
4.1 Einige Beispiele . . . . .	73
4.2 Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	74
4.3 Stationäre Punkte und Stabilität . . . . .	75
4.4 Hopf-Bifurkation . . . . .	81
<b>5 Reaktions-Diffusionsgleichungen</b>	<b>84</b>
5.1 Modellbildung . . . . .	84
5.2 Beispiele . . . . .	90
5.3 Wellenfronten . . . . .	93
5.4 Gierer-Meinhardt-Modell . . . . .	96
5.5 Weiteres Beispiel . . . . .	101

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Einordnung

Diese Vorlesung ist eingebettet in eine Reihe anderer Vorlesungen:

- Basisvorlesungen: Mathematische Biologie I,II; Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Folgevorlesung: Theoretische Ökologie

### 1.2 Literatur

- M. Braun: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen; Springer, 1991
- B. Aulbach: Gewöhnliche Differentialgleichungen; Spektrum, 1997
- R. Seydel: Practical Bifurcation and Stability Analysis; Springer, 2010
- Y.A.Kuznetsov: Elements of Applied Bifurcation Theory; Springer, 1995
- S. Wiggins: Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos; Springer, 2003
- J.D.Murray: Mathematical Biology I,II; Springer 2002,2003
- N.F.Britton: Essentials in Mathematical Biology; Springer, 2003

## 1.3 Beispiele

Um einen Rahmen für die Vorlesung abzustecken, führen wir eine Reihe von Beispielen ein, von denen einige aus der Vorlesung Mathematische Biologie bekannt sein dürften.

### Beispiel 1.1 Wachstumsmodelle

–) *linear:*

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

- Dabei bezeichnet  $N(t)$  die Populationsgröße oder -dichte.
- Dieses Modell ist das einfachste Wachstumsmodell: freie Population, ohne Ressourcenprobleme.

⇒ Bei Erweiterung des Modells um eine maximale Kapazität  $K$  des Ökosystems wird das Modell...

–) *logistisch:*

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Diese Differentialgleichung heißt auch Pearl-Verhulst-Gleichung.

⇒ Nun kann man das Modell noch an Verzögerungseffekte anpassen:

–) *verzögert logistisch:*

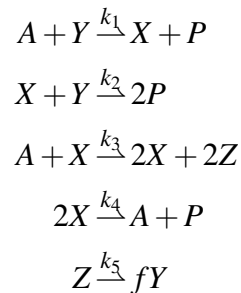
$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t - \tau)\left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K}\right)$$

- Dabei ist  $\tau > 0$  die Zeit, die die Wirkung der Population auf ihr Wachstum benötigt.
- Dies ist eine sogenannte verzögerte oder Delay-Differentialgleichung. Das sieht man daran, dass die Zeitableitung nicht nur von  $N(t)$ , sondern auch von den Werten  $N(t - \tau)$  zu dem früheren Zeitpunkt  $t - \tau$  abhängt.

### Beispiel 1.2 Modelle für oszillierende chemische Reaktionen

Belousov 1959 und Zhabotinski 1964-1973 beobachteten Oszillationen in den Konzentrationen von chemischen Substanzen während chemischer Reaktionen (z.B. durch einen Farbwechsel orange-blau sichtbar). Diese Beobachtung widerspricht der thermodynamischen Regel, dass jedes physikalische System einem Gleichgewicht zustrebt. Deshalb gerieten diese Beobachtungen zunächst in Vergessenheit.

Eine vereinfachte Variante dieser oszillierenden chemischen Reaktionen stellt das Field-Koros-Noyes Modell dar:



Dabei bedeuten:

$X$	$HBrO_2$
$Y$	$Br^-$
$Z$	$Ce^{4+}$
$A$	$BrO_3^-$ (Eingangsprodukt, konst. Konz.)
$P$	$HOBr$ (Produkt)
$f$	stöchiometrischer Faktor ( $\approx 0.5$ )

Nach dem Massenwirkungsgesetz findet man die folgenden Differentialgleichungen für die Stoffkonzentrationen:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= k_1 ay(t) - k_2 x(t)y(t) + k_3 ax(t) - 2k_4 x(t)^2 \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= -k_1 ay(t) - k_2 x(t)y(t) + fk_5 z(t) \\
 \frac{dz(t)}{dt} &= 2k_3 ax(t) - k_5 z(t)
 \end{aligned}$$

Dieses Differentialgleichungssystem heißt auch Oregonator.

Frage: Wie berechne ich, dass Oszillationen möglich sind?

### Beispiel 1.3 SIR-Modell für Epidemien

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= -\beta I(t)S(t) \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t).
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen

$S$	Anzahl der Suszeptiblen
$I$	Anzahl der Infektiösen
$R$	Anzahl der Entfernten/Immunen

Die Lösungen nähern sich jeweils einem Gleichgewichtszustand (stationäre Lösung). Dieses Gleichgewicht hängt von den Parametern  $\beta$  und  $\gamma$  sowie den Anfangswerten ab.

**Beispiel 1.4** Modelle für die Zeitentwicklung elektrischer Potentiale in Nervenzellen Berühmt ist hier das Hodgkin/Huxley-Modell (1952, Nobelpreis 1963).

Wir behandeln hier nur eine vereinfachte Variante, das Fitzhugh-Nagumo-Modell (1961/62).

Dabei sei  $v$  Potential der Zelle  
 $w$  Blockadewirkung der Ionenkanäle

Durch Ladungserhaltungsüberlegungen leitet man folgende Differentialgleichungen ab (siehe auch Abschnitt 3.7)

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= v(t)(a - v(t))(v(t) - 1) - w(t) + i(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= bv(t) - \gamma w(t) \end{aligned}$$

Hier sind zusätzlich

$i$	äußere Anregung
$v = 0$	Ruhezustand
$v = a$	Schwellwert (für positive/negative Rückkopplung)
$v > 1$	vollständige Blockade

**Beispiel 1.5** Aktivator/Inhibitor Modelle für Musterbildung, z.B. im Fell von Tieren Hier handelt es sich um partielle Differentialgleichungen, die um einiges komplizierter als gewöhnliche Differentialgleichungen sind (vgl. Skript gewöhnliche DGL).

Beispielhaft führen wir hier das Gierer-Meinhardt-Modell vor. Die Modellierung erfolgt durch partielle Differentialgleichungen, da neben der zeitlichen auch die räumliche Struktur wesentlichen Einfluss auf die Dynamik hat.

Wir benutzen die Bezeichnungen  $a : D \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  Aktivator-dichte,  
 $i : D \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  Inhibitor-dichte.

Das Gierer-Meinhardt-Modell lautet dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a &= \alpha + \beta \frac{a^2}{i} - \gamma a + d_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} a \\ \frac{\partial}{\partial t} i &= \underbrace{\delta a^2 - \epsilon i}_{\text{Reaktion}} + \underbrace{d_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} i}_{\text{Diffusion}} \end{aligned}$$

Die grundlegenden Fragen in allen diesen Situationen sind nach dem (qualitativen) Verhalten des Systems unterteilt: strebt es gegen ein Gleichgewicht, oszilliert es oder zeigt es chaotisches Verhalten.



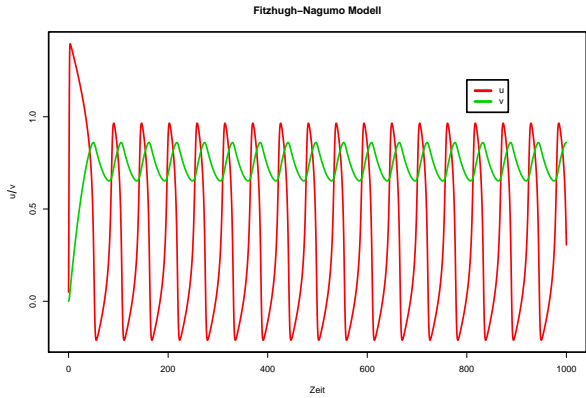
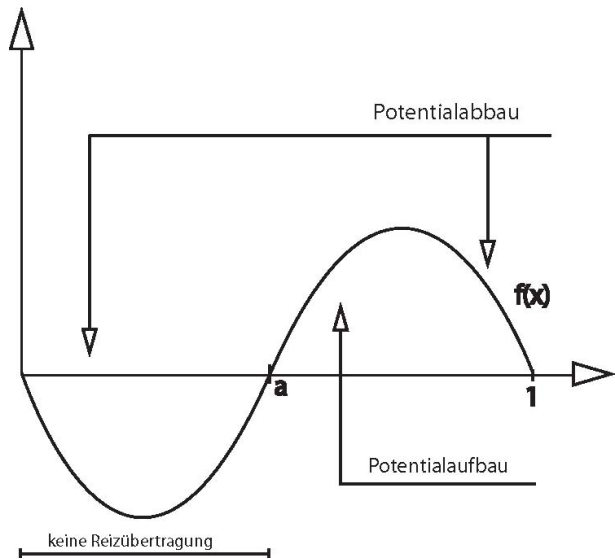


Abbildung 1.1: Fitzhugh-Nagumo-Modell: Schema (oben) und eine Simulation (unten)

# Kapitel 2

## Qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

### 2.1 Allgemeines und Erinnerungen

Wir beschäftigen uns mit Differentialgleichungen bzw. Anfangswertproblemen der Form:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad , \quad x(0) = \xi. \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^k$  (d.h. wir betrachten auch Differentialgleichungssysteme).

Wir interessieren uns dabei für die in  $D$  erzeugte Dynamik, formal

**Definition 2.1** Sei  $D$  eine nichtleere Menge. Dann ist ein Halbfluss in  $D$  eine Familie  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  von Abbildungen  $\varphi_t : D \rightarrow D$ , welche für alle  $\xi \in D$   $\varphi_0(\xi) = \xi$  und für alle  $s, t \geq 0$

$$\varphi_t(\varphi_s(\xi)) = \varphi_{t+s}(\xi) \quad (2.2)$$

erfüllen.

#### Anmerkungen

- ) Man sagt auch, dass  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  ein dynamisches System ist.
- ) Eine Veranschaulichung ist in Abbildung Abb. 2.1 zu finden.

Die erste Frage zu (2.1) betrifft die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung. Für entsprechende Bedingungen an  $F$  erinnern wir uns an die Vorlesung *Gewöhnliche Differentialgleichungen*.

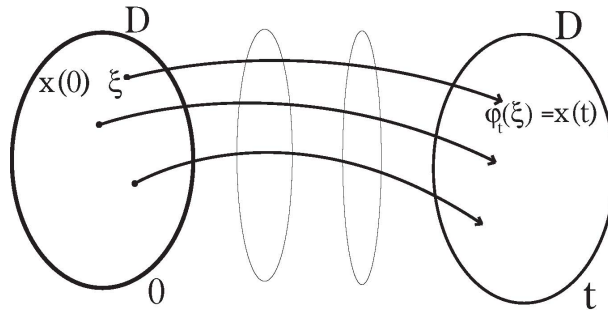


Abbildung 2.1: Darstellung eines Halbflusses

**Definition 2.2** Eine Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  eine offene Menge, heißt lokal Lipschitz-stetig, falls für alle  $\xi \in D$  eine Umgebung  $U(\xi) \subseteq \mathbb{R}^k$  und eine Konstante  $L(\xi) \geq 0$  existieren, so dass:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L(\xi) \cdot \|x - y\|, \quad \text{für alle } x, y \in U(\xi).$$

Für den Beweis der nächsten Sätze verweisen wir auf die Vorlesung *Gewöhnliche Differentialgleichungen*.

**Satz 2.1 (Satz von Picard-Lindelöf, spezielle Variante)** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz stetig.

Dann gibt es für jedes  $\xi \in D$  Zahlen  $-\infty \leq T_-(\xi) < 0 < T_+(\xi) \leq \infty$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Das Anfangswertproblem (2.1) hat genau eine Lösung im Intervall  $]T_-(\xi), T_+(\xi)[$ , genannt  $x_\xi$ .
2. Ist  $\tilde{x} : ]t', t''[ \rightarrow \mathbb{R}^k$  für  $t' < 0 < t''$  auch eine Lösung von Gleichung (2.1), dann gilt  $T_-(\xi) \leq t' < t'' \leq T_+(\xi)$  und  $\tilde{x}(t) = x_\xi(t)$  für alle  $t \in ]t', t''[$ .

**Anmerkung**  $x_\xi$  heißt auch maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad , \quad x(0) = \xi. \tag{2.1}$$

Es könnte die Hoffnung bestehen, dass wir immer eine Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$ , d.h.  $T_-(\xi) = -\infty$ ,  $T_+(\xi) = +\infty$  bekommen. Aber:

**Beispiel 2.1** Wir betrachten die Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1, \quad x(0) = 0.$$

Mit der Methode der Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x^2 + 1} &= dt \\ \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dy}{y^2 + 1} &= \int_0^t ds \\ \arctan x(t) - \arctan x(0) &= t \\ x(t) &= \tan t\end{aligned}$$

Da  $\lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \tan t = \pm \infty$ , ist die maximale Lösung nur im Intervall  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  erklärt. Man sagt auch, dass die Lösung explodiert.

Eine einfache hinreichende, wenn auch nicht notwendige Bedingung für die Nichtexplosion der Lösungen von Gleichung (2.1) liefert folgender Satz.

**Satz 2.2 (Nichtexplosions-Bedingung)** Sei  $D = \mathbb{R}^k$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz-stetig. Desweiteren gebe es  $c_0, c_1 \geq 0$ , so dass für alle  $\xi \in \mathbb{R}^k$  die Beziehung

$$\|F(\xi)\| \leq c_1 \cdot \|\xi\| + c_0$$

gültig ist.

Dann existiert für alle  $\xi \in D$  die maximale Lösung in  $\mathbb{R}$ , d.h. im vorigen Satz ist  $T_-(\xi) = -\infty$  und  $T_+(\xi) = +\infty$ .

### Anmerkungen

- ) Beispielsweise gilt Satz 2.2, wenn  $F$  global Lipschitz-stetig ist (d.h. eine Konstante  $L$  gilt auf ganz  $\mathbb{R}^k$ ).
- ) Es geht allgemeiner.
- ) Meist hat man in biologischen Anwendungen nicht  $D = \mathbb{R}^k$  für  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  als Definitionsbereich, sondern z.B.  $D = [0, \infty[^k$ . Dann müssen wir zusätzlich überprüfen, ob die Lösung während der ganzen Zeit in  $D$  verbleibt.

**Beispiel 2.2** Wir führen Bsp. 1.3, das SIR-Modell für Epidemien, weiter:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta I(t)S(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

mit Konstanten  $\beta, \gamma \geq 0$  und Anfangswerten  $S(0), I(0), R(0) \geq 0$ .

Hier ist es für die Interpretierbarkeit wichtig,  $S(t), I(t), R(t) \geq 0$  für alle  $t \geq 0$  zu zeigen. Aber existiert die Lösung auch für alle  $t$ ?

Zunächst definieren wir  $D = \mathbb{R}^3$ , nicht  $D = [0, \infty]^3$ ,  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$F \left( \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\beta IS \\ \beta IS - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $F$  lokal, aber nicht global Lipschitz-stetig. Damit existiert die maximale Lösung zu jedem Startwert. Wir zeigen nun, dass sie den positiven Orthanten nicht verlässt.

Für  $\xi \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  setzen wir

$$t_c = \sup \{ t \in [0, T_+(\xi)] : \text{für alle } t' \in [0, t] \text{ gilt } S(t') \geq 0 \text{ und } I(t') \geq 0 \}.$$

Wenn  $t_c < T_+(\xi)$ , dann muss aus Stetigkeitsgründen wenigstens eine Komponente zur Zeit  $t_c$  verschwinden:

**Fall 1:**  $I(t_c) = 0$ : Wir definieren  $\tilde{S}(t) = S(t_c)$ ,  $\tilde{I}(t) = I(t_c) = 0$ ,  $\tilde{R}(t) = R(t_c)$ .

Dann löst  $\begin{pmatrix} \tilde{S} \\ \tilde{I} \\ \tilde{R} \end{pmatrix}$  auch Gleichungen (2.3). Damit gilt  $\tilde{S} = S, \tilde{I} = I, \tilde{R} = R$  und  $t_c = \infty$ .

**Fall 2:**  $S(t_c) = 0$  und  $I(t_c) > 0$ : Wir definieren  $\tilde{S}(t) = 0$ ,  $\tilde{I}(t) = e^{-\gamma(t-t_c)} I(t_c)$ ,  
 $\tilde{R}(t) = R(t_c) + \gamma \int_{t_c}^t \tilde{I}(s) ds = R(0) + \gamma \int_0^t I(s) ds$ .

Dann löst  $\begin{pmatrix} \tilde{S} \\ \tilde{I} \\ \tilde{R} \end{pmatrix}$ , auch Gleichungen (2.3). Damit gilt  $\tilde{S} = S, \tilde{I} = I, \tilde{R} = R$ .

Dies zeigt  $\tilde{I} \geq 0$  (weil  $I(t_c) \geq 0$ ) und  $\tilde{R} \geq 0$  (weil  $\tilde{I} \geq 0$  und  $R(0) \geq 0$ ).

Damit gilt  $t_c = \infty$ .

Damit ist  $t_c = T_+(\xi)$  und die Funktionen  $S, I, R$  bleiben nichtnegativ.

Klarerweise ist also  $S$  monoton fallend und somit  $S \leq S(0)$ . Dies impliziert

$$\frac{dI}{dt} \leq (\beta S(0) - \gamma) I(t)$$

oder

$$0 \leq I(t) \leq e^{(\beta S(0) - \gamma)t} I(0).$$

Ebenso findet man eine Schranke an  $R$ . Damit ist  $T_+(\xi) = \infty$  für alle  $\xi \in [0, \infty]^3$ .

**Satz 2.3** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und das Vektorfeld  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  derart, dass in Satz 2.1  $T_+(\xi) = \infty$  für alle  $\xi \in D$ .

Dann gibt es genau einen (den zu  $F$  gehörigen) Halbfluss  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  auf  $D$ , so dass

$$\varphi_t(\xi) = x_\xi(t), \quad t \geq 0,$$

wobei  $x_\xi$  die maximale Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad , \quad x(0) = \xi \quad (2.1)$$

ist.

*Beweis:* Die Wohldefiniertheit ist klar, ebenso  $\varphi_0 = \text{Id}$ . Wir müssen nur Gleichung (2.2) zeigen. Dies sieht man daran, dass für fixiertes  $s \geq 0$  sowohl  $t \mapsto \tilde{x}(t) = \varphi_t(\varphi_s(\xi))$ , als auch  $t \mapsto \hat{x}(t) = \varphi_{t+s}(\xi)$  Lösungen von

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad , \quad x(0) = \varphi_s(\xi) \quad (2.1)$$

sind. Die Differentialgleichung ist trivialerweise erfüllt. Ebenso sieht man leicht, dass  $\tilde{x}(0) = \varphi_0(\varphi_s(\xi)) = \varphi_s(\xi)$ , sowie  $\hat{x}(0) = \varphi_s(\xi)$  gilt. Satz 2.1 zeigt das Verlangte. ■

### Anmerkungen

- ) Unter diesen Bedingungen sagen wir auch, dass der zugehörige Halbfluss existiert.
- ) Was macht man falls  $T_+(\xi) < \infty$ ?: Man dehnt  $D$  zu  $\tilde{D} = D \cup \{\dagger\}$  aus und setzt für  $\xi \in \tilde{D}$

$$\tilde{\varphi}_t(\xi) = \begin{cases} \varphi_t(\xi) & \text{falls } T_+(\xi) > t \text{ und } \xi \in D \\ \dagger & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $(\tilde{\varphi}_t)_{t \geq 0}$  ein Halbfluss in  $\tilde{D}$ .

- ) Umgekehrt definiert jeder Halbfluss  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  für welchen  $t \mapsto \varphi_t(\xi)$  differenzierbar ist für alle  $\xi \in D$  ein zugehöriges Vektorfeld  $F$ . Problematisch ist aber die Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (2.1).

**Definition 2.3** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  ein Halbfluss auf  $D$ . Dann heißt  $x^* \in D$  stationärer Punkt von  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  falls  $\varphi_t(x^*) = x^*$  für alle  $t \geq 0$ .

**Anmerkung** Es gibt in der Literatur auch andere Bezeichnungen: kritischer Punkt, Gleichgewicht.

**Satz 2.4** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz-stetig und  $x^* \in D$ .

Dann ist  $x^*$  genau dann ein stationärer Punkt des zu

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = \xi \tag{2.1}$$

gehörigen Halbflusses falls  $F(x^*) = 0$ .

*Beweis:* 1. Falls  $t \mapsto \varphi_t(x^*)$  konstant ist, so ist sicher auch

$$F(x^*) = \left. \frac{d\varphi_t(x^*)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

2. Sei  $F(x^*) = 0$ . Dann lösen sowohl  $t \mapsto x^*$  als auch  $t \mapsto \varphi_t(x^*)$  (2.1). Nach Satz 2.1 gilt also  $\varphi_t(x^*) = x^*$  für alle  $t \geq 0$ , d.h.  $x^*$  ist stationär. ■

**Definition 2.4** Seien  $(D, \rho)$  ein metrischer Raum und  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  ein Halbfluss auf  $D$ . Dann heißt  $\xi_0 \in D$

1. **Stabilitätspunkt**, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit folgenden Eigenschaften:  
Wenn  $\xi \in D$  und  $\rho(\xi, \xi_0) < \delta$ , dann gilt

$$\rho(\varphi_t(\xi), \varphi_t(\xi_0)) < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

2. **anderenfalls heißt  $\xi_0$  Instabilitätspunkt.**

3. **Attraktivitätspunkt**, wenn es ein  $\varepsilon > 0$  mit der Eigenschaft gibt, dass für alle  $\xi \in D$ ,  $\rho(\xi, \xi_0) < \varepsilon$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\varphi_t(\xi) - \varphi_t(\xi_0)) = 0.$$

4. **asymptotischer Stabilitätspunkt**, falls es Stabilitätspunkt und Attraktivitätspunkt ist.

Ein stationärer Punkt  $x^*$  von  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  heißt  $\left\{ \begin{array}{l} \text{stabil} \\ \text{instabil} \\ \text{attraktiv} \\ \text{asymptotisch stabil} \end{array} \right.$  falls  $x^*$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stabilitätspunkt} \\ \text{Instabilitätspunkt} \\ \text{Attraktivitätspunkt} \\ \text{asymptotischer} \\ \text{Stabilitätspunkt} \end{array} \right.$

ist.

Zur Veranschaulichung siehe Abb. 2.2 und Abb. 2.3.

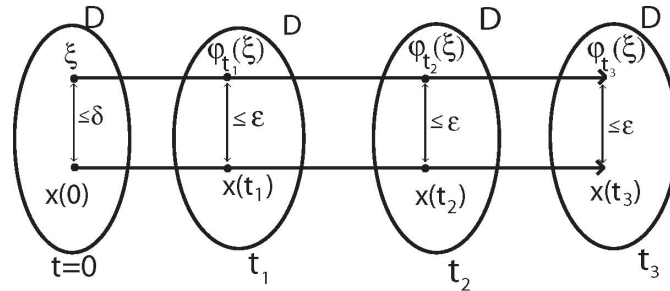


Abbildung 2.2: Zum Begriff der Stabilität

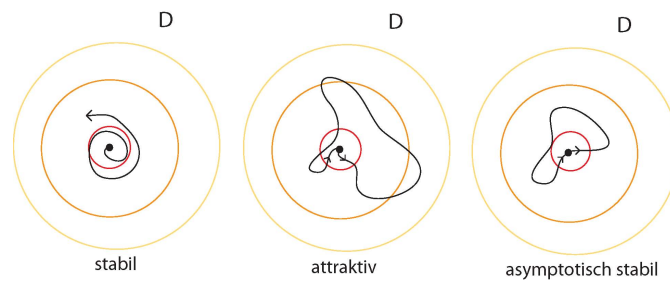


Abbildung 2.3: Zum Vergleich der Stabilitätsbegriffe

## 2.2 Differentialgleichungen in einer Variablen

Wir betrachten nun das qualitative Verhalten von Lösungen von Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \tag{2.4}$$

wenn  $D \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist.

**Satz 2.5** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitz-stetig. Desweiteren seien  $a, b \in D$  derart, dass  $F(x) > 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .

Dann gilt

1. Für alle  $\xi \in ]a, b[$  ist die Lösung von Gleichung (2.4) mit Anfangswert  $\xi$  streng monoton wachsend sofern  $x(t) < b$ .
2. Ist  $F(b) > 0$ , dann gibt es für jedes  $\xi \in ]a, b[$  ein  $t_\xi > 0$  so, dass die maximale Lösung  $x$  von Gleichung (2.4) mit  $x(0) = \xi$  nun  $x(t_\xi) = b$  erfüllt.
3. Ist  $F(b) = 0$ , dann existiert für jedes  $\xi \in ]a, b[$  die maximale Lösung  $x$  von Gleichung (2.4) mit  $x(0) = \xi$  für alle  $t > 0$  und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = b. \tag{2.5}$$



*Beweis:* 1. Mit  $\xi \in ]a, b[$  folgt  $\frac{dx}{dt}(0) = F(x(0)) = F(\xi) > 0$ . Also ist  $x(t)$  streng monoton steigend in einer Umgebung von  $t = 0$ . Gilt  $\frac{dx}{dt}(t') = 0$  für ein  $t' > 0$ , dann folgt  $0 = \frac{dx}{dt}(t') = F(x(t'))$ . Sei  $\hat{t} = \inf\{t > 0 : \frac{dx}{dt}(t) = 0\}$ . Mit der Stetigkeit der Ableitung folgt  $\frac{dx}{dt}(\hat{t}) = 0$  und damit  $F(x(\hat{t})) = 0$ . Somit muss  $x(\hat{t}) \notin ]a, b[$  gelten, d.h.  $x(\hat{t}) \geq b$ .

2. Wegen  $F$  stetig gilt mit  $F(b) > 0$

$$c := \min_{x \in [\xi, b]} F(x) > 0.$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für alle  $s > 0$  mit der Eigenschaft  $x(t) \leq b$  für alle  $0 \leq t \leq s$

$$b \geq x(s) = x(0) + \int_0^s \frac{dx(t)}{dt} dt = \xi + \int_0^s F(x(t)) dt \geq \xi + c \cdot s.$$

Damit ist notwendigerweise  $s \leq \frac{b-\xi}{c}$ . Kontraposition zeigt

$$s > \frac{b-\xi}{c} \Rightarrow \text{es gibt ein } t \in [0, s] \text{ mit } x(t) > b.$$

Dadurch existiert  $t_\xi = \inf\{t > 0 : x(t) \geq b\}$ . Die Stetigkeit der Lösung impliziert  $x(t_\xi) = b$ .

3. i) Zeige:  $x(t) < b$  für alle  $t > 0$ .

Annahme: Es gibt ein  $t_\xi > 0$  mit  $x(t_\xi) = b$ .

O.B.d.A. sei  $t_\xi = \inf\{t > 0 : x(t) = b\}$ , d.h.  $x(t) < b$  für alle  $t \in [0, t_\xi[$ . Es gilt  $t_\xi > 0$ .

Die lokale Lipschitz-Stetigkeit von  $F$  liefert bei  $b$ :

$$|F(x') - F(x'')| \leq L|x' - x''| \quad \text{für alle } x', x'' \in ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[.$$

Speziell für  $x \in ]b - \varepsilon, b[$  folgt

$$F(x) = \underbrace{|F(x) - F(b)|}_{\geq 0} = \underbrace{|F(b) - F(x)|}_{=0} \leq L|x - b| = L(b - x).$$

Sei  $t_{\xi'} = \inf\{t \geq 0 : x(t) \geq b - \frac{\varepsilon}{2}\}$ . Dann ist  $t_{\xi'} < t_\xi$ .

Wir wenden den Lösungsansatz der Trennung der Variablen auf die Dgl. (2.4) mit Anfangswert  $x(t_{\xi'})$  an:

$$t_\xi - t_{\xi'} = \int_{x(t_{\xi'})}^{x(t_\xi)} \frac{dy}{F(y)} \geq \int_{x(t_{\xi'})}^b \frac{1}{L(b-y)} dy = -\frac{1}{L} [\ln(b-y)]_{y=x(t_{\xi'})}^{y=b}.$$

Für  $y \rightarrow b-$  geht der Ausdruck auf der rechten Seite gegen unendlich. Dies steht im Widerspruch zur Endlichkeit von  $t_\xi - t_{\xi'} > 0$ .

ii) Teil 2 angewendet auf  $b_n = b - \frac{1}{n}$  liefert eine Folge  $(t_{\xi, n})_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x(t_{\xi, n}) = b - \frac{1}{n}$ . Somit folgt wieder mit der Stetigkeit der Lösung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_{\xi, n}) = b.$$

Mit Teil 1 ist die Folge  $(t_{\xi,n})_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton steigend. Wäre diese Folge beschränkt, dann gäbe es einen Grenzwert  $\hat{t}_\xi > 0$  mit

$$x(\hat{t}_\xi) = x\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_{\xi,n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_{\xi,n}) = b$$

im Widerspruch zu Teil 3 (i). Also erhalten wir  $t_{\xi,n} \rightarrow \infty$  und somit (2.5) wegen der Stetigkeit und Monotonie von  $x(t)$ . ■

Aus Satz 2.5 folgen direkt die nächsten Aussagen.

**Satz 2.6** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$  offenes Intervall,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitz-stetig und  $\xi \in D$ .

1. Ist  $F(\xi) > 0$  und existiert  $b^* \in D$  mit  $b^* > \xi$  und  $F(b^*) = 0$ , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\xi) = \inf \{ \tilde{b} \in D : \tilde{b} > \xi \text{ und } F(\tilde{b}) = 0 \}$$

streng monoton wachsend.

2. Ist  $F(\xi) > 0$  und  $F(b) > 0$  für alle  $b \in D$  mit  $b \geq \xi$ , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow T_+(\xi)-} \varphi_t(\xi) = \sup D$$

streng monoton wachsend.

3. Ist  $F(\xi) < 0$  und existiert  $a^* \in D$  mit  $a^* < \xi$  und  $F(a^*) = 0$ , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\xi) = \sup \{ \tilde{a} \in D : \tilde{a} < \xi \text{ und } F(\tilde{a}) = 0 \}$$

streng monoton fallend.

4. Ist  $F(\xi) < 0$  und  $F(a) < 0$  für alle  $a \in D$  mit  $a \leq \xi$ , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow T_+(\xi)-} \varphi_t(\xi) = \inf D$$

streng monoton fallend.

5. Ist  $F(\xi) = 0$ , dann gilt  $\varphi_t(\xi) = \xi$  für alle  $t \geq 0$ .

6. Falls  $\varphi_{t_1}(\xi) = \varphi_{t_2}(\xi)$  für  $t_1 < t_2$  gilt, dann gilt auch automatisch  $\varphi_t(\xi) = \xi$  für alle  $t \geq 0$ .

Wir betrachten jetzt eine isolierte Nullstelle von  $F$ , d.h. es gibt eine Umgebung dieser Nullstelle, in der keine andere Nullstelle liegt.

**Satz 2.7** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitz-stetig und  $x^*$  eine isolierte Nullstelle von  $F$  mit oder ohne Vorzeichenwechsel. Entsprechend sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt, dass  $F$  in  $]x^* - \varepsilon, x^*[$  und  $]x^*, x^* + \varepsilon[$  jeweils genau ein Vorzeichen annimmt. Dann ist  $x^*$  asymptotisch stabil, wenn das linksseitige Vorzeichen “+“ und das rechtsseitige Vorzeichen “-“ ist. Ansonsten ist  $x^*$  instabil.

Beweis: Analog. ■

**Anmerkung** Optisch kann man sich das Verhalten der Lösungen sehr schön durch Einmalen von Pfeilen klar machen, siehe Abb. 2.4.

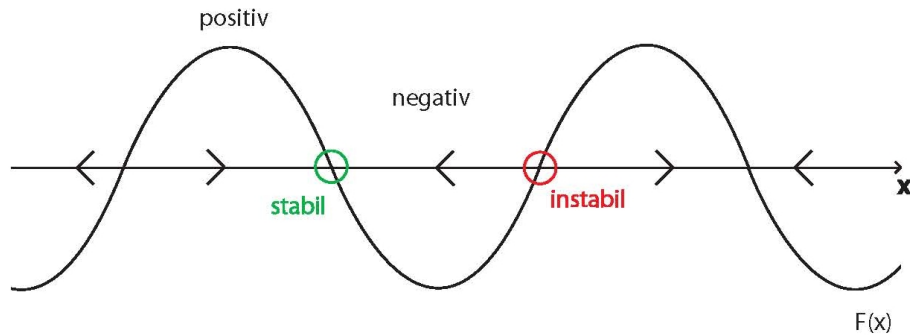


Abbildung 2.4: Visualisierung eindimensionaler dynamischer Systeme. In Bereichen mit  $F > 0$  sind die Trajektorien monoton wachsend bis zum nächsten stationären Punkt, in Bereichen mit  $F < 0$  monoton fallend bis zum nächsten stationären Punkt.

**Beispiel 2.3 (Ökologisches Modell)**

Logistisches Wachstum und Abfischen einer Fischpopulation  
 Modell (Differentialgleichung für Populationsdichte  $N(t)$ ):

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) - A$$

Das Modell hat 3 Parameter:  $r, K, A > 0$  mit  $r$  Basiswachstumsrate  
 $K$  Kapazität  
 $A$  Abfischrate

Das heißt,  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch

$$F(x) = r \cdot x \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - A$$

gegeben.

**Wie ändert sich nun das Verhalten des Systems in Abhängigkeit von der Abfischrate  $A$ ?**

Für  $0 < A < \frac{rK}{4}$  gibt es zwei stationäre Punkte  $0 < x_1^* < \frac{K}{2} < x_2^* < K$ , die Lösung der Gleichung  $r \cdot x^* \left( 1 - \frac{x^*}{K} \right) - A = 0$  sind. Dann ist  $x_2^*$  asymptotisch stabil und  $x_1^*$  instabil, vgl. Abb. 2.5 links.

Ist  $N(0) < x_1^*$ , dann stirbt die Population aus. Allerdings gibt es eine Zeit  $0 < \tau(N(0), A, r, K) < \infty$ , so dass

$$N(\tau(N(0), A, r, K)) = 0 \quad \text{und} \quad N(t) < 0 \quad \text{für alle } t > \tau(N(0), A, r, K)$$

Das heißt, dass das Modell in dieser Situation versagt, weil es eigentlich  $N(t) \geq 0$  für alle  $t \geq 0$  garantieren müsste. Der Grund dafür ist der konstante Fang-Term, der allerdings nicht realistisch ist für kleine Populationen  $N \approx 0$ . Eine Alternative wäre, Fang-Terme der Form  $-EN(t)$  mit einer Konstante  $E > 0$  zu betrachten.

Für  $A = \frac{r \cdot K}{4}$  gibt es nur einen stationären Punkt  $x^* = \frac{K}{2}$ , vgl. Abb. 2.5 Mitte. Dieser ist instabil.

Wenn  $A > \frac{r \cdot K}{4}$  ist  $F(x) < 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und die Population stirbt aus, egal wo der Startpunkt  $N(0)$  sich befindet, vgl. Abb. 2.5 rechts.

⇒ Das Aufspalten  $x^* \rightarrow x_1^*, x_2^*$  für  $A \gtrless \frac{r \cdot K}{4}$  nennt man auch Bifurkation (siehe Kapitel 3). Solche Bifurkationen werden von einem Wechsel des qualitativen Verhaltens begleitet.

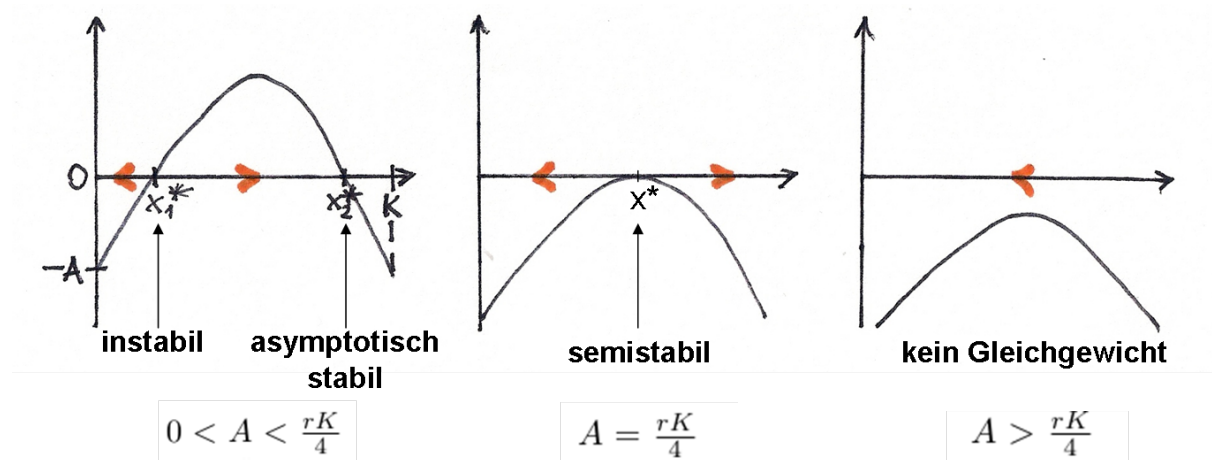


Abbildung 2.5: Stabilitätssituation für zwei, einen oder keinen stationären Punkt

## 2.3 Lineare Systeme

**Motivation** Das Verhalten nichtlinearer Differentialgleichungen in der Umgebung stationärer Punkte lässt sich meist mit linearen Differentialgleichungen beschreiben. Deshalb studieren wir zunächst letztere. Als Modell für biologische Systeme sind lineare Differentialgleichungen meist untauglich.

Im weiteren betrachten wir  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  der Gestalt:

$$F(x) = A \cdot x$$

für  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  und Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{2.6}$$

Wie sehen die Lösungen aus?

**Satz 2.8** Sei  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Dann ist der zu der Differentialgleichung (2.6) gehörige Halbfluss  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  auf  $\mathbb{R}^k$  durch

$$\varphi_t(\xi) = e^{At} \cdot \xi \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^k$$

gegeben.

*Beweis:* Siehe Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“. ■

### Anmerkungen

1. Erinnerung an die Jordan-Zerlegung:

Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$  gibt es eine reguläre Matrix  $T \in \mathbb{C}^{k \times k}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und komplexe Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , so dass  $T^{-1}AT = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ , wobei für jeden Block  $A_i$  entweder  $A_i = (\lambda_i)$  (also  $A_i$  eindimensional ist), oder  $A_i$  von der folgenden Form ist:

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Der Minor (2.7) heißt Jordan-Block.

2. Es reicht also zur Berechnung von  $e^{At}$  aus, das Matrix-Exponential

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

eines Jordan-Blockes der Länge  $k'$  auszurechnen.

3. Es gilt:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \text{Id} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B}$$

4. Es gilt:

$$B^n = \left. \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \right\} n \times \text{Nullen} \quad \text{für } n < k', \quad \text{sowie } B^n = 0 \text{ für } n \geq k'.$$

Daraus ergibt sich:

$$e^{A't} = e^{\lambda \cdot \text{Id} \cdot t} \cdot e^{Bt} = e^{\lambda t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n \cdot t^n}{n!} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t^1 & t^2 & \dots & \frac{t^{k'-1}}{(k'-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^1}{1!} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uns interessiert nun das qualitative Verhalten von linearen Differentialgleichungen.

**Satz 2.9** Sei  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ .

Dann ist ein beliebiges  $\xi_1 \in \mathbb{R}^k$  genau dann  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stabilitätspunkt} \\ \text{Instabilitätspunkt} \\ \text{Attraktivitätspunkt} \\ \text{asymptotischer Stabilitätspunkt} \end{array} \right.$   
 der Differentialgleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax, \tag{2.6}$$

wenn der Nullvektor  $\xi_0 = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{stabil} \\ \text{instabil} \\ \text{attraktiv} \\ \text{asymptotisch stabil} \end{array} \right.$  ist.

*Beweis:* Sei  $\xi_1$  beliebig. Jeder der Stabilitätsbegriffe untersucht  $\varphi_t(\xi)$  für  $\xi$  aus einer Umgebung von  $\xi_1$ . Dann gilt

$$\varphi_t(\xi) - \varphi_t(\xi_1) = \varphi_t(\xi - \xi_1) - \varphi_t(0) = \varphi_t(\xi - \xi_1) - \varphi_t(\xi_0).$$

Letzteres ist die Differenz von der Lösung, die in  $\xi - \xi_1$  startet (in einer Umgebung von Null), und von  $\xi_0$ . Damit übertragen sich die Stabilitätsbegriffe von  $\xi_1$  auf  $\xi_0$  und umgekehrt. ■

**Satz 2.10** Gegeben sei  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ .

1. Erfüllen alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$   $\text{Re}\lambda < 0$ , dann ist die Nulllösung von Gleichung (2.6) asymptotisch stabil.
2. Gibt es einen Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re}\lambda > 0$ , dann ist die Nulllösung von Gleichung (2.6) instabil.

3. Angenommen, alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  erfüllen  $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$  und mindestens ein Eigenwert  $\lambda$  erfüllt  $\operatorname{Re}\lambda = 0$ . Wenn für alle Eigenwerte  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re}\lambda = 0$  kein echter Jordan-Block in der Jordan-Zerlegung existiert, dann ist die Nulllösung von Gleichung (2.6) stabil, aber nicht attraktiv. Anderenfalls ist sie instabil.

*Beweis:* Wir benutzen den Satz 2.9 und beweisen Stabilitäten, Instabilitäten und Attraktivitäten. Zunächst tun wir das aber für beliebiges  $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$  und komplexe  $\xi \in \mathbb{C}^k$ . Der reelle Fall ergibt sich daraus später.

Ist  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathbb{C}^k$  und  $\xi = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_k v_k \in \mathbb{C}^k$ , dann stellt

$$\|\xi\| = \sum_{i=1}^k |\xi_i|$$

eine Vektornorm dar, die wir im folgenden verwenden.

Mit der Jordan-Normalform  $A = TJT^{-1}$  folgt

$$e^{tA} = e^{tTJT^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (TJT^{-1})^n = T \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n \right) T^{-1} = Te^{tJ}T^{-1}.$$

Seien  $\{v_1, \dots, v_k\}$  die Spalten der Matrix  $T$ . Es gilt  $T^{-1}v_i = e_i$  für  $i = 1, \dots, k$  mit den kanonischen Einheitsvektoren  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  (mit 1 in der  $i$ -ten Komponente).

O.B.d.A. sei  $1 \leq i \leq k'$  mit einem Jordan-Block der Dimension  $k'$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Mit der Anmerkung 4 erhalten wir

$$e^{tA}v_i = Te^{tJ}e_i = T \left( \sum_{\ell=1}^i \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!} e^{\lambda t} e_\ell \right) = \sum_{\ell=1}^i \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!} e^{\lambda t} T e_\ell = \sum_{\ell=1}^i \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!} e^{\lambda t} v_\ell$$

für  $i = 1, \dots, k'$ . In der speziellen Vektornorm folgt

$$\|e^{tA}v_i\| = \left\| \sum_{\ell=1}^i \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!} e^{\lambda t} v_\ell \right\| \leq \sum_{\ell=1}^i \left| \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!} \right| \cdot |e^{\lambda t}| \cdot \|v_\ell\| = e^{\operatorname{Re}\lambda t} \sum_{\ell=1}^i \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!}$$

für  $i = 1, \dots, k'$  und  $t \geq 0$  wegen  $\|v_\ell\| = 1$  für alle  $\ell$ .

Wir schätzen den allgemeinen Fall ab

$$\|\varphi_t(\xi)\| = \left\| e^{tA} \left( \sum_{i=1}^k \xi_i v_i \right) \right\| \leq \sum_{i=1}^k |\xi_i| \cdot \|e^{tA}v_i\| \leq M \cdot \|\xi\|$$

für alle  $\xi \in \mathbb{C}^k$  mit dem Supremum (Existenz zu untersuchen)

$$M := \sup_{t \geq 0} \left[ \max_{j=1, \dots, k} \left\| e^{tA} v_j \right\| \right].$$

*Zur Stabilität:* Falls das Supremum  $M$  existiert, dann liegt Stabilität vor. Man kann leicht nachweisen, dass

$$\sup_{t \geq 0} t^m |e^{\lambda t}| = \begin{cases} \left(-\frac{\operatorname{Re} \lambda}{m}\right)^m \cdot e^{-m} & \text{für } m > 0, \operatorname{Re} \lambda < 0 \\ 1 & \text{für } m = 0, \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

In Fall 1 gilt stets  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  mit entweder  $m = 0$  oder  $m > 0$ . In beiden Unterfällen existiert das Supremum. In Fall 3 gilt  $m = 0$  für  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , wodurch das Supremum wieder existiert.

*Zur Attraktivität:* In Fall 1 liegt  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  mit entweder  $m = 0$  oder  $m > 0$  vor. Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| e^{tA} v_i \right\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\operatorname{Re} \lambda t} \sum_{\ell=1}^i \frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!} = 0.$$

Somit ist die Nulllösung attraktiv.

*Zur Instabilität:* Hinreichend für Instabilität ist es einen Vektor  $\xi \in \mathbb{R}^k$  (gebildet aus der Basis  $e_1, \dots, e_k$ ) zu finden, mit dem  $|\varphi_t(\xi)_i| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$  für ein  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt. Denn dann folgt gleiches auch für  $\alpha \xi$  mit beliebigem  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , d.h. in jeder Umgebung des Nullpunkts finden wir Vektoren mit dieser Eigenschaft.

In Fall 2 wählen wir einen Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  und ein zugehöriger Eigenvektor sei  $v \in \mathbb{C}^k$ . Es gilt

$$Av = \lambda v \quad \text{und} \quad A\bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v},$$

d.h.  $\bar{v}$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$ . Desweiteren folgt aus

$$e^{tA} v = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right) v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\lambda^n v) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} \right) v = e^{\lambda t} v,$$

d.h.  $v$  ist Eigenvektor zur Matrix  $e^{tA}$  mit Eigenwert  $e^{\lambda t}$ .

O.B.d.A. sei  $\operatorname{Re} v \neq 0$ . Wir rechnen aus

$$e^{tA} \operatorname{Re} v = e^{tA} \frac{1}{2}(v + \bar{v}) = \frac{1}{2}(e^{tA} v + e^{tA} \bar{v}) = \frac{1}{2}(e^{\lambda t} v + e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}) = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \frac{1}{2}(e^{i \operatorname{Im} \lambda t} v + e^{-i \operatorname{Im} \lambda t} \bar{v}).$$

Für  $t_\ell = \frac{2\pi\ell}{\operatorname{Im} \lambda}$  mit  $\ell \in \mathbb{Z}$  oder  $\operatorname{Im} \lambda = 0$  gilt

$$e^{t_\ell A} \operatorname{Re} v = e^{\operatorname{Re} \lambda t_\ell} \frac{1}{2}(v + \bar{v}) = e^{\operatorname{Re} \lambda t_\ell} \operatorname{Re} v.$$

wegen  $e^{i2\pi\ell} = 1$  für  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Alle beteiligten Größen sind jetzt reellwertig. Wegen  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} e^{t_\ell A} \operatorname{Re} v = \infty.$$



Dadurch verlässt diese Folge jede Umgebung des Nullpunkts.

Im Fall 3 sei zu einem Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re}\lambda = 0$  ein echter Jordan-Block der Dimension  $k' \geq 2$  gegeben. O.B.d.A. seien die zugehörigen Basisvektoren  $v_1, \dots, v_{k'} \in \mathbb{C}^{k'}$ . Wir betrachten dann den Vektor  $v_2$ , für den gilt

$$Av_2 = TJT^{-1}v_2 = TJe_2 = T(\lambda e_2 + e_1) = \lambda v_2 + v_1.$$

Es folgt

$$A\bar{v}_2 = \bar{\lambda}\bar{v}_2 + \bar{v}_1.$$

Das weitere Vorgehen ist analog zum obigen Fall 2. ■

Daraus ergibt sich eine systematische Analyse des qualitativen Verhaltens linearer Differentialgleichungen. Wir sehen uns hier den einfachsten Fall  $k = 2$  genauer an:

Wir betrachten eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$  und (möglicherweise verallgemeinerten) Eigenvektoren  $e_1$  und  $e_2$ . Es ergibt sich folgende Fallunterscheidung, die einzelnen Fälle werden auch illustriert.

1. Fall: Eigenwerte sind reell

- A.  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$
- B.  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ 
  - (i) 2 Eigenvektoren
  - (ii) 1 Jordan-Block
- C.  $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$
- D.  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$
- E.  $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$
- F.  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$
- G.  $0 > \lambda_1 = \lambda_2$ 
  - (i) 2 Eigenvektoren
  - (ii) 1 Jordan-Block
- H.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 
  - (i) 2 Eigenvektoren
  - (ii) 1 Jordan-Block

2. Fall: Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  haben nichtverschwindenden Imaginärteil  $\Rightarrow \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

- A.  $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$
- B.  $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$
- C.  $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$

In Abb. 2.6 bis 2.3 wird die Drehrichtung durch die Wahl  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  bestimmt.

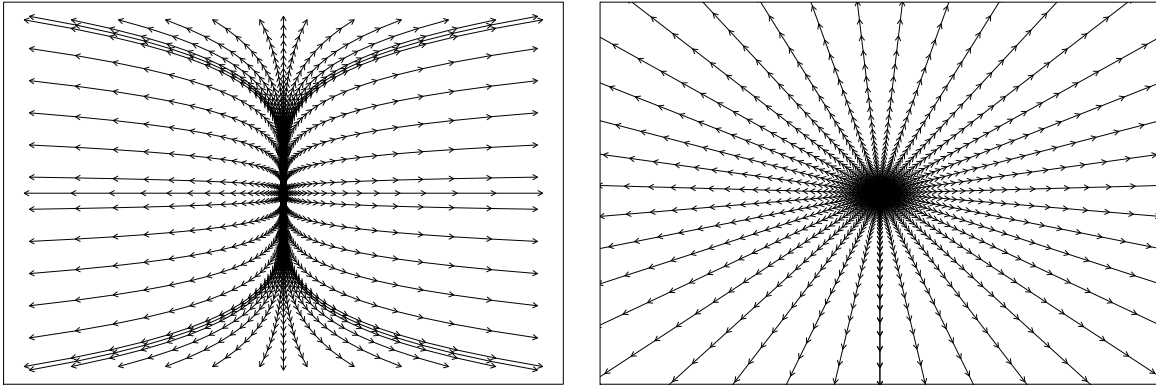


Abbildung 2.6: abstoßender Knoten. links: Für den Fall (1.A). Da  $\lambda_1 > \lambda_2$ , entfernt sich die Kurve in Richtung der  $x$ -Achse viel schneller vom instabilen Fixpunkt als in Richtung der  $y$ -Achse. || rechts: Für den Fall (1.B.i). Da  $\lambda_1 = \lambda_2$ , entfernt sich die Kurve in allen Richtungen gleich schnell.

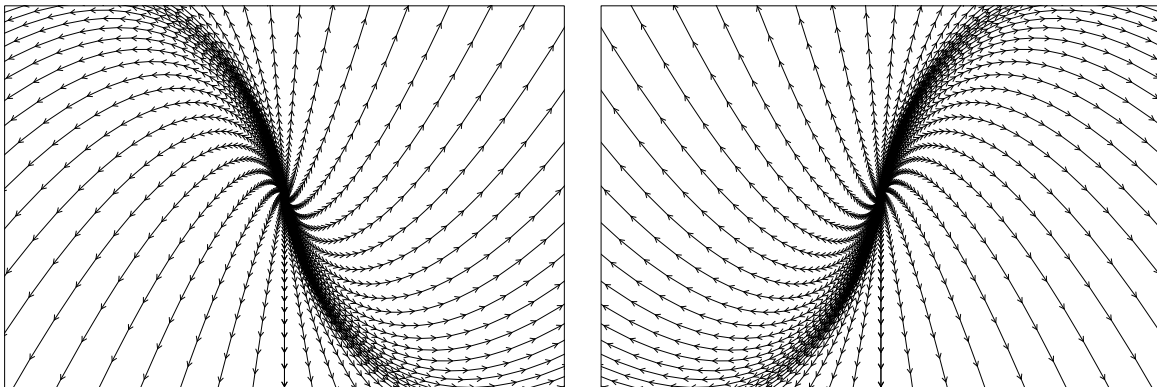


Abbildung 2.7: abstoßender Knoten. Für den Fall (1.B.ii).

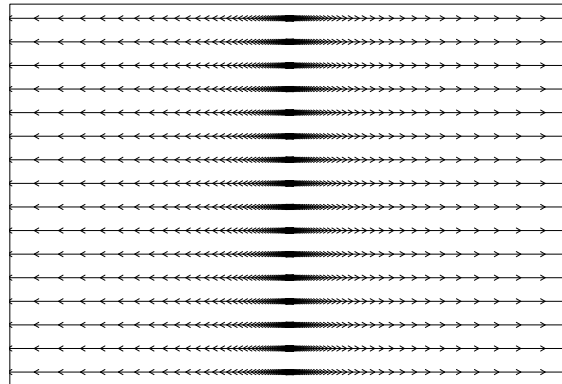


Abbildung 2.8: abstoßende Knoten. Für den Fall (1.C). Da  $\lambda_1 > 0$ , ist die  $x_2$ -Achse abstoßend. Und da  $\lambda_2 = 0$ , bewegt sich die Kurve in dieser Richtung nicht vom instabilen Fixpunkt weg.

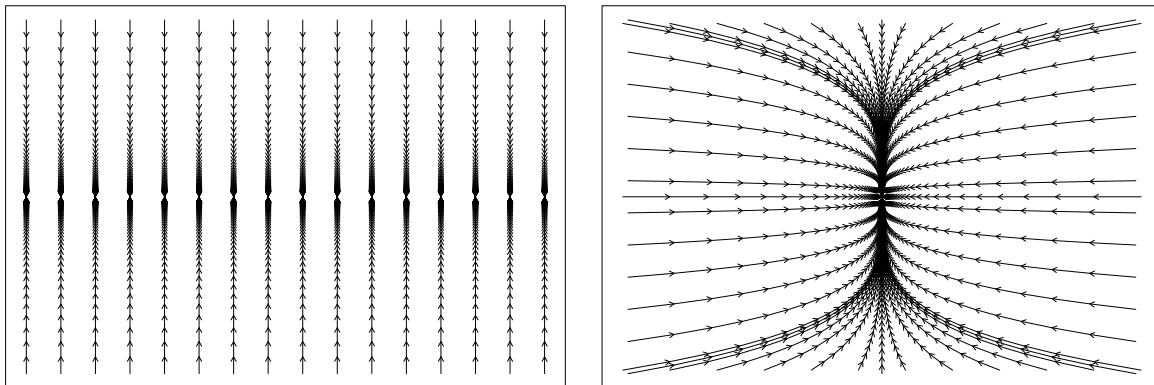


Abbildung 2.9: anziehender Knoten. links: Für den Fall (1.E). Da  $\lambda_2 < 0$ , ist die  $x_1$ -Achse anziehend. Und da  $\lambda_1 = 0$ , bewegt sich die Kurve in dieser Richtung nicht vom instabilen Fixpunkt weg. || rechts: Für den Fall (1.F). Wie in Fall (1.A) aber anziehend statt abstoßend.

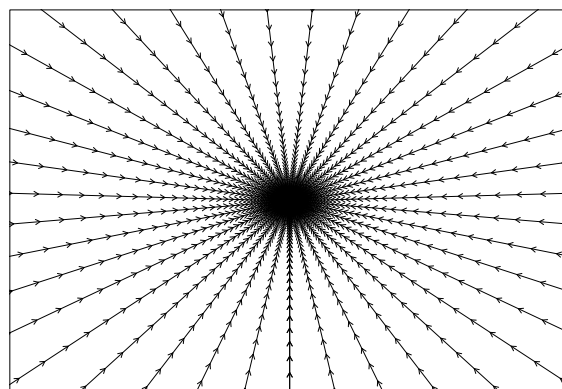


Abbildung 2.10: anziehender Knoten. Für den Fall (1.G.i). Wie im Fall (1.B.i), aber anziehend statt abstoßend.

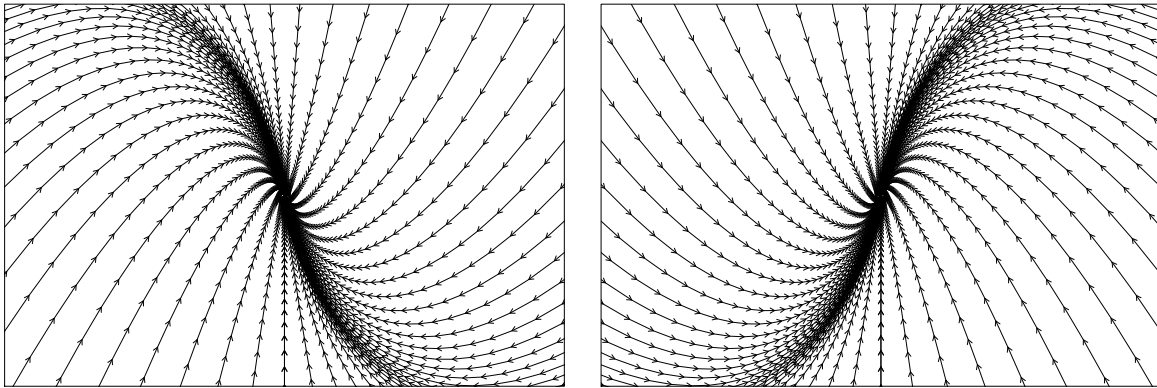


Abbildung 2.11: anziehende Knoten. Für den Fall (1.G.ii). Wie im Fall (1.B.ii), aber anziehend statt abstoßend.

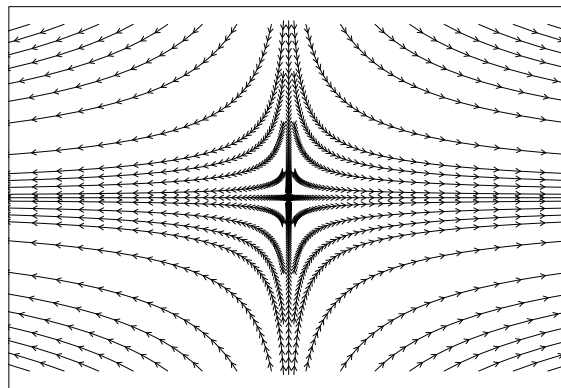


Abbildung 2.12: Sattel. Für den Fall (1.D). Da  $\lambda_2 < 0$ , bewegt sich die Kurve in der zugehörigen Eigenrichtung auf den Fixpunkt zu, aber in der Eigenrichtung, welche zu  $\lambda_1 > 0$  gehört, vom Fixpunkt weg.

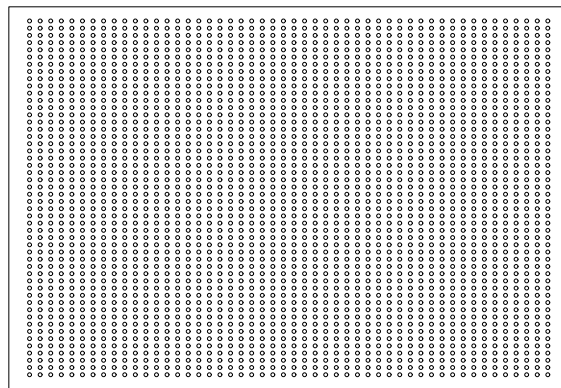


Abbildung 2.13: Knoten. Für den Fall (1.H.i). Jeder Punkt der Ebene ist stationär.

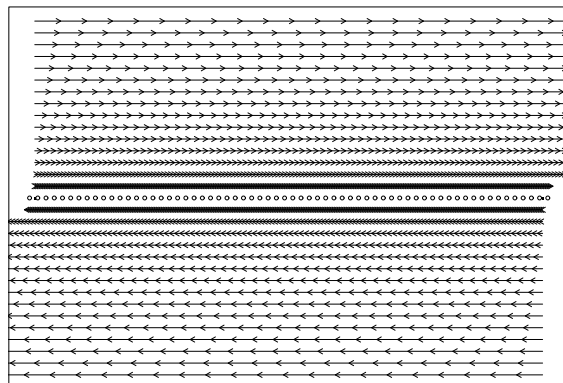


Abbildung 2.14: Für den Fall (1.H.ii). Start auf der  $y$ -Achse und lineares Schieben parallel zur  $x$ -Achse, gibt es auch in  $y$ -Richtung.

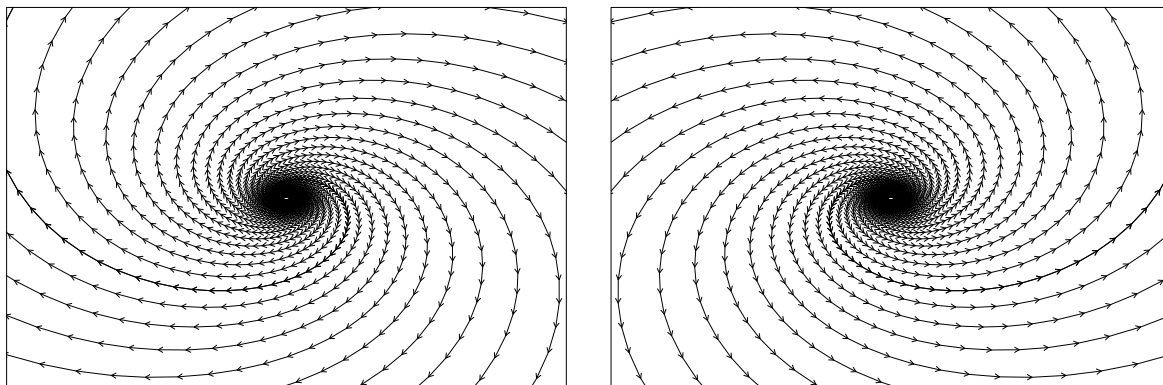


Abbildung 2.15: abstoßender Strudel. Für den Fall (2.A). Der Imaginärteil  $\begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$  der Eigenwerte bestimmt die Drehrichtung.

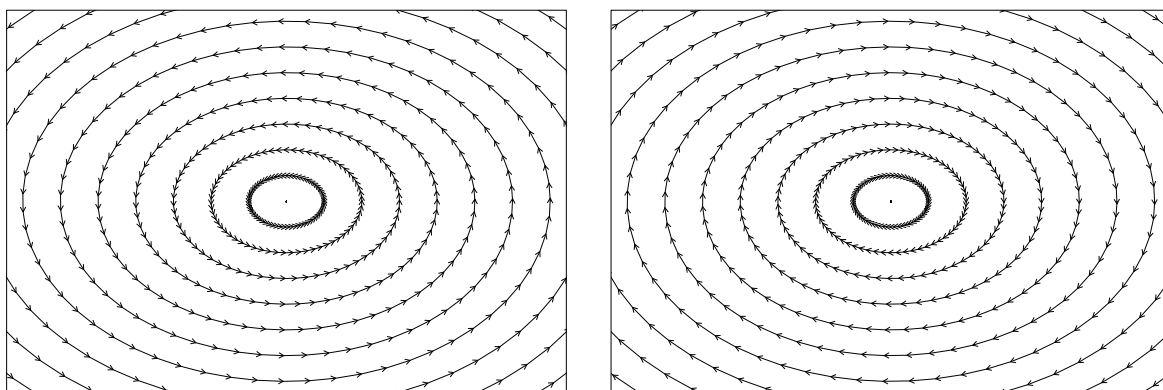


Abbildung 2.16: Zentrum, der Fall (2.B). Der Imaginärteil  $\begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$  der Eigenwerte bestimmt die Drehrichtung.

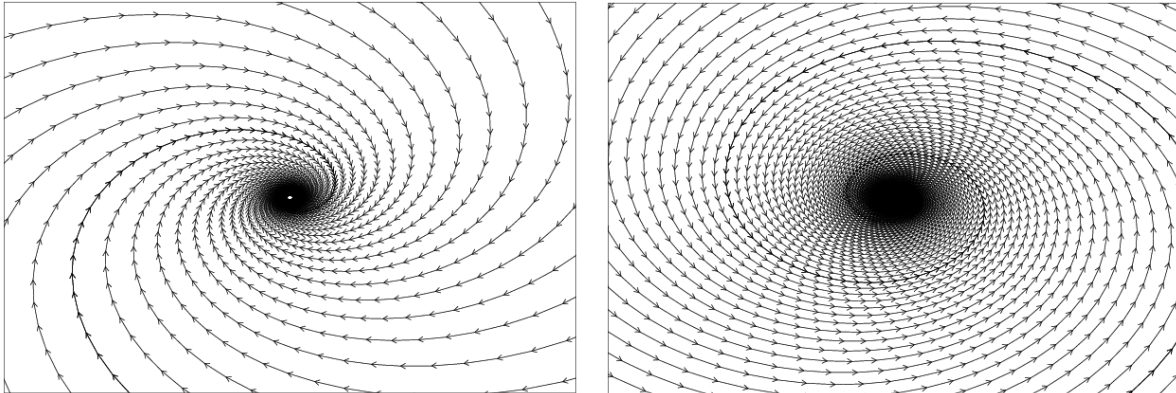


Abbildung 2.17: Lineare Differentialgleichungen: rechts- (oben) und links-drehender(unten) attraktiver Strudel

### Beispiel 2.4 (Dynamik freier, altersgeschichteter Populationen)

Es gibt nicht viele biologisch relevante Beispiele linearer Differentialgleichungen. Hier diskutieren wir ein Modell einer Population von Individuen, deren Reproduktionsrate vom Alter, aber nicht von der Populationsdichte und anderen Faktoren, abhängt.

Der Einfachheit halber strukturieren wir die Population nach dem Alter der Individuen in drei Klassen:  $N$  Nicht-Erwachsene (Kinder),

$E$  Erwachsene,

$S$  Senioren.

Standard-Argumente führen nun zu den folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= -k_1 N + k_3 E & \text{mit } k_1 : \text{Alterungsrate der Kinder} \\ \frac{dE}{dt} &= k_1 N - k_2 E & k_2 : \text{Alterungsrate der Erwachsenen} \\ \frac{dS}{dt} &= k_2 E & k_3 : \text{Reproduktionsrate der Erwachsenen.} \end{aligned}$$

Im folgenden sei stets  $k_1, k_2, k_3 > 0$ .

Es muss untersucht werden, ob die Nulllösung stabil und/oder attraktiv ist. In der Dgl.  $x'(t) = Ax$  lautet die Matrix hier

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & k_3 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -k_1 - \lambda & k_3 & 0 \\ k_1 & -k_2 - \lambda & 0 \\ 0 & k_2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -k_1 - \lambda & k_3 \\ k_1 & -k_2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + k_1(k_2 - k_3)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{k_1 + k_2}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_1 k_3}_{>0}}$$

Da ein Eigenwert null auftritt, ist die Nulllösung niemals attraktiv.

1. Fall:  $k_2 = k_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$

Der doppelte Eigenwert  $\lambda = 0$  tritt auf. Es liegt aber nur ein eindimensionaler Eigenraum mit dem Eigenvektor  $x = (0, 0, 1)^T$  vor. Dadurch entsteht ein echter Jordan-Block und die Nulllösung ist instabil.

2. Fall:  $k_2 > k_3 \Rightarrow \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 = 0$

Die Eigenwerte  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  sind strikt negativ. Der Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  ist damit einfach und besitzt keinen echten Jordan-Block. Die Nulllösung ist stabil. Die Interpretation von  $k_2 > k_3$  lautet, dass die Erwachsenen langsamer Kinder generieren als sie selbst zu Senioren altern.

3. Fall:  $k_3 > k_2 \Rightarrow \lambda_3 < \lambda_1 (= 0) < \lambda_2$

Jetzt tritt mit  $\lambda_2 > 0$  ein strikt positiver Eigenwert auf. Die Nulllösung ist also instabil. Manche Lösungen steigen damit exponentiell an. Die Interpretation von  $k_3 > k_2$  ist hier, dass die Erwachsenen schneller Kinder erzeugen als sie zu Senioren altern.

## 2.4 Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungen in höheren Dimensionen

**Motivation** Das Ziel dieses Abschnittes ist es, ein möglichst allgemeines Kriterium oder Verfahren zu etablieren, mit dem wir die Stabilität von stationären Punkten von (nichtlinearen) Differentialgleichungssystemen berechnen können.

Wir bedienen uns dabei einer Standardmethode der Analysis, der Linearisierung der Differentialgleichung in einer Umgebung des stationären Punktes. Dazu betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{2.4}$$

mit dem stationären Punkt  $x^*$ . Dann gilt natürlich  $F(x^*) = 0$ .

Weiterhin machen wir den Ansatz

$$\tilde{x} = x - x^*, \quad x(t) = x^* + \tilde{x}(t),$$

verknüpft mit der Vorstellung, dass  $\tilde{x}$  klein ist, oder  $x$  ganz in der Nähe des stationären Punktes verläuft. Nun ergibt eine Taylorentwicklung

$$F(x^* + \tilde{x}(t)) = \underbrace{F(x^*)}_{=0} + F'(x^*) \cdot \tilde{x}(t) + o(\|\tilde{x}(t)\|).$$

Dabei ist  $F'(x^*) = (F'(x^*)_{ij})_{i,j=1}^k$  mit  $F'(x^*)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}(F(x)_i)|_{x=x^*}$  die Jacobimatrix von  $F$  in  $x^*$ .

Wenn wir Glück haben, stimmt dann das qualitative Verhalten der Differentialgleichung (2.4) mit dem der Differentialgleichung

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = F'(x^*) \cdot \tilde{x}(t) \quad (2.8)$$

in dem Sinne überein, dass Lösungen  $\tilde{x}$  von Gleichungen (2.8), die nahe genug bei 0 starten, in etwa zu Lösungen  $x = x^* + \tilde{x}$  von Gleichung (2.4) führen.

Das System (2.8) können wir mit Hilfe von Satz 2.10 vollständig analysieren.

**Satz 2.11 (ohne Beweis)** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  eine offene Menge,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz-stetig und  $x^* \in D$  sei stationärer Punkt von Gleichung (2.4). Desweiteren sei  $F$  in einer Umgebung von  $x^*$  differenzierbar,  $F'(x^*)$  die Jacobimatrix in  $x^*$ .

1. Erfüllen alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $F'(x^*)$  die Beziehung  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , dann ist  $x^*$  asymptotisch stabil.
2. Gibt es einen Eigenwert  $\lambda$  von  $F'(x^*)$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , dann ist  $x^*$  instabil.

**Beispiel 2.5** Aussage 3 in Satz 2.10 kann kein Pendant haben.

Wir betrachten in  $\mathbb{R}$ , d.h.  $k = 1$ , die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \pm x^3 \quad \text{mit} \quad x^* = 0$$

also

$$F(x) = \pm x^3 \quad F'(x) = \pm 3x^2 \quad F'(x^*) = 0$$

aus Satz 2.11 gibt hier keine Aussagen über das qualitative Verhalten.

Satz 2.7 sagt: für  $F(x) = -x^3$  ist  $x^*$  asymptotisch stabil und für  $F(x) = +x^3$  ist  $x^*$  instabil, vgl. Abb. 2.18. Das heißt,  $F'(x^*)$  enthält nicht genug Informationen, um das Verhalten der Differentialgleichung sicher zu charakterisieren.

Ein theoretischer Ausweg wäre dann, Terme höherer Ordnung in der Taylor-Entwicklung zu betrachten.

**Beispiel 2.6** Die Modellierung einer SIR-Endemie führt auf die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta \cdot I \cdot S - b \cdot S + b \cdot N \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \cdot I \cdot S - b \cdot I - \gamma \cdot I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma \cdot I - b \cdot R \end{aligned}$$



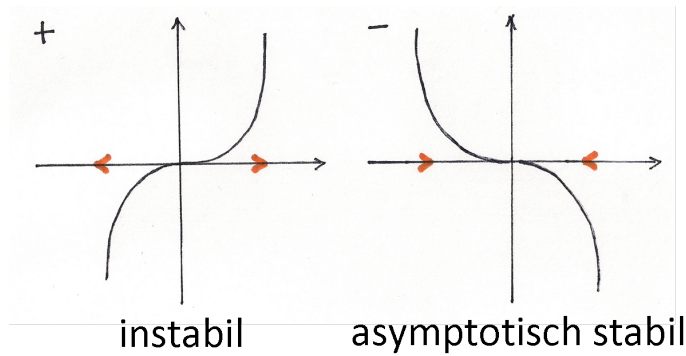


Abbildung 2.18: Stabilitätsverhalten für  $F(x) = \pm x^3$

Dabei bedeuten die Parameter:  $\beta$  Infektionstrate  
 $b$  Sterbe-/Geburtsrate  
 $\gamma$  Gesundungsrate  
 $N = S + I + R$  Gesamtpopulation, es gilt ja  $\frac{dN}{dt} = 0$

Wir setzen

$$x(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix} \quad F \left( \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\beta IS - bS + b(S + I + R) \\ \beta IS - bI - \gamma I \\ \gamma I - bR \end{pmatrix}$$

und erhalten eine Differentialgleichung in  $\mathbb{R}^3$  (oder besser  $[0, \infty)^3$ ). Einfacher wird es, wenn wir die Dimension reduzieren. Dazu ersetzen wir  $R$  durch  $N - S - I$ , weil ja  $N$  konstant bleibt. Dann haben wir  $k = 2$  sowie

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} \quad \hat{F} \left( \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\beta IS - bS + bN \\ \beta IS - bI - \gamma I \end{pmatrix}$$

Als erstes finden wir den stationären Punkt:  $I^* = 0$ ,  $S^* = N$  und bestimmen die Jacobimatrix:

$$\hat{F}' \left( \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\beta I - b & -\beta S \\ \beta I & \beta S - b - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}' \left( \begin{pmatrix} S^* \\ I^* \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -b & -\beta N \\ 0 & \beta N - b - \gamma \end{pmatrix}$$

Nun lösen wir die Eigenwert-Gleichung:

$$\det \begin{pmatrix} -b - \lambda & -\beta N \\ 0 & \beta N - b - \gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-b - \lambda) \cdot (\beta N - b - \gamma - \lambda) = 0$$

Das heißt,

$$\lambda_1 = -b$$

$$\lambda_2 = \beta N - b - \gamma$$

Es gibt wegen  $\lambda_1 < 0$  drei Varianten:

$$\lambda_2 \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow r_0 = \frac{\beta N}{b + \gamma} \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

mit der Basisreproduktionsrate  $r_0$ . Nach Satz 2.11 erhalten wir das folgende Verhalten in Abhängigkeit von der Basisreproduktionsrate:

- ) für  $r_0 > 1$  ist  $x^* = \begin{pmatrix} S^* \\ I^* \end{pmatrix}$  instabil,
- ) für  $r_0 < 1$  ist  $x^*$  asymptotisch stabil,
- ) für  $r_0 = 1$  erhalten wir keine Aussage.

**Beispiel 2.7** Im Eindimensionalen ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ) impliziert Attraktivität eines stationären Punktes seine asymptotische Stabilität, siehe Abschnitt 2.2 und Satz 2.7. In höheren Dimensionen ist dies falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

Wir betrachten für  $D = \mathbb{R}^2$  das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left( 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) - y \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= y \left( 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) + x \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

Wenn wir Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  einführen ( $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ ) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r(1 - r) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \left( \sin \frac{\phi}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für  $r$  ist vom logistischen Typ. Deshalb gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1$ , wenn wir nicht in  $(0, 0)$  starten.

Für die Differentialgleichung von  $\phi$  kann man mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Abschnittes zeigen (siehe Übungsaufgabe), dass für alle Startpunkte  $\phi(0) \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 2 \left\lceil \frac{\phi(0)}{2\pi} \right\rceil \pi.$$

Daraus folgt, dass  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  ein instabiler Fixpunkt, und  $(x^{**}, y^{**}) = (1, 0)$  ein attraktiver Fixpunkt ist, der aber nicht stabil ist.

Das Kriterium aus Satz 2.11 liefert keine Aussage (ein Eigenwert 0).

In Abb. 2.19 sind einige der oben beschriebenen Trajektorien abgebildet.

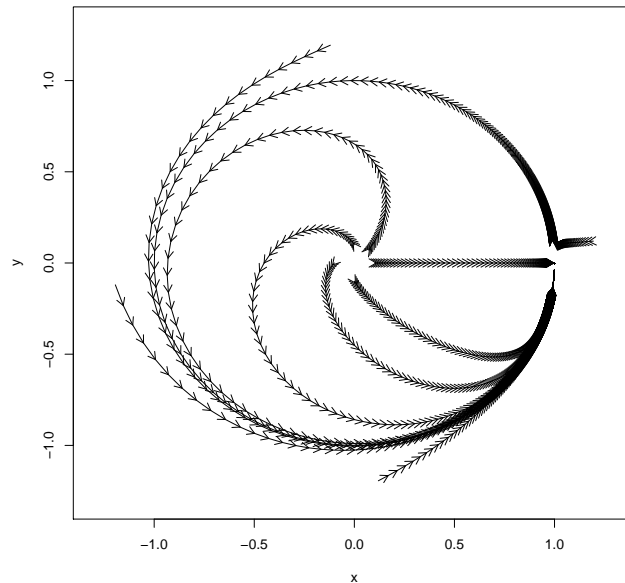


Abbildung 2.19: Beispiel Bsp. 2.7 für einen instabilen, aber attraktiven stationären Punkt.

## 2.5 Phasenraum-Techniken

**Motivation** Unser Ziel ist, aus lokaler Stabilität/Instabilität auf globales Verhalten des dynamischen Systems, das durch den Halbfluss  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  gegeben ist, zu schließen. Dies funktioniert im Allgemeinen nur für  $k = 2$  gut (eventuell auch für  $k < 2$ ).

Wir haben also immer ein Vektorfeld  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  vorliegen und nehmen an, dass der zugehörige Halbfluss  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  existiert. Dann bezeichnet man  $D$  auch als *Phasenraum*.

**Definition 2.5** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  derart, dass  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  existiert. Ist dann  $x : [0, \infty[ \rightarrow D$  eine Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = \xi, \quad (2.1)$$

dann ist die Trajektorie von  $x$  definiert als  $x([0, \infty[) = \{x(t) : t \geq 0\} \subset D$ .

Für  $\xi \in D$  definieren wir die Omega-Grenzmenge von  $\xi$ ,  $\Omega(\xi)$ , durch

$$\Omega(\xi) = \left\{ y \in D : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, 0 \leq t_n \leq t_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(\xi) = y \right\}.$$

**Anmerkung** Die Omega-Grenzmenge ist die Menge der Punkte, die die Lösungskurve für sehr große Zeiten erreicht. Analog gibt es auch eine Alpha-Grenzmenge der Punkte, die die Lösungskurve für sehr große negative Zeiten erreicht.

**Satz 2.12** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  derart, dass  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  existiert. Dann gilt:

1.  $\Omega(\xi) = \bigcap_{T>0} \overline{\{\varphi_t(\xi) : t \geq T\}}$ .

2. Für alle  $t \geq 0$ ,  $\xi \in D$  gilt  $\Omega(\varphi_t(\xi)) = \Omega(\xi)$ .

3. Ist  $\Omega(\xi)$  kompakt und nicht leer, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(\xi), \Omega(\xi)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{y \in \Omega(\xi)} \|\varphi_t(\xi) - y\| = 0.$$

4. Falls  $\Omega(\xi) = \{y\}$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\xi) = y$  und  $y$  ist ein stationärer Punkt.

*Beweis:* Als Abkürzung setzen wir

$$\mathcal{F} = \left\{ (t_n)_{n \in \mathbb{N}} : 0 \leq t_n \leq t_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \right\}.$$

zu 1.: Wir zeigen zunächst  $\Omega(\xi) \subseteq \bigcap_{T>0} \overline{\{\varphi_t(\xi) : t \geq T\}}$ .

Sei  $y \in \Omega(\xi)$ , entsprechend gibt es  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(\xi) = y$ , und  $T > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $t_n \geq T$  für  $n \geq n_0$ , das heißt

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(\xi) \in \overline{\{\varphi_t(\xi) : t \geq T\}}.$$

Jetzt zeigen wir  $\bigcap_{T>0} \overline{\{\varphi_t(\xi) : t \geq T\}} \subseteq \Omega(\xi)$ .

Sei umgekehrt  $y \in \bigcap_{T>0} \overline{\{\varphi_t(\xi) : t \geq T\}}$ . Das heißt, dass für jedes  $T > 0$  und jedes  $\varepsilon > 0$  es ein  $t_\varepsilon \geq T$  gibt mit

$$\|y - \varphi_{t_\varepsilon}(\xi)\| < \varepsilon.$$

Wir wählen nun

$$\begin{aligned} t_1 &\geq 0 && \text{so dass } \|y - \varphi_{t_1}(\xi)\| < 1 \\ t_{n+1} &\geq t_n + n && \text{so dass } \|y - \varphi_{t_{n+1}}(\xi)\| < \frac{1}{n+1} \quad \text{für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(\xi) = y$ . Das bedeutet  $y \in \Omega(\xi)$ .

zu 2.: Es gilt für  $s > 0$

$$\begin{aligned}\Omega(\xi) &= \bigcap_{T>0} \overline{\{\varphi_t(\xi) : t \geq T\}} \\ &= \bigcap_{T>s} \overline{\{\varphi_t(\xi) : t \geq T\}} \\ &= \bigcap_{\substack{T'=T-s \\ t'=t-s}} \overline{\{\varphi_{t'+s}(\xi) : t' \geq T'\}} \\ &= \bigcap_{T'>0} \overline{\{\varphi_{t'}(\varphi_s(\xi)) : t' \geq T'\}} \\ &= \Omega(\varphi_s(\xi)).\end{aligned}$$

zu 3.: Wir nehmen das Gegenteil an, und zwar, dass eine Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$  und ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass

$$\text{dist}(\varphi_{s_n}(\xi), \Omega(\xi)) \geq \varepsilon$$

für unendlich viele  $n$  gilt. O.B.d.A. gelte dies für alle  $n$ . Andererseits gibt es wegen  $\Omega(\xi) \neq \emptyset$  ein  $y \in \Omega(\xi)$  und damit eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_{t_n}(\xi), \Omega(\xi)) = 0.$$

Dadurch existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\text{dist}(\varphi_{t_n}(\xi), \Omega(\xi)) < \varepsilon$$

für alle  $n \geq n_0$ . Zu jedem  $t_n$  gibt es ein  $s_{n'} > t_n$  und zu jedem  $s_{n'}$  gibt es ein  $t_{n''} > s_{n'}$ . Nun ist die Abbildung  $x \mapsto \text{dist}(x, \Omega(\xi))$  stetig, also auch  $t \mapsto \text{dist}(\varphi_t(\xi), \Omega(\xi))$ . Nach dem Zwischenwertsatz für reelle Funktionen ergibt sich

$$\text{dist}(\varphi_t(\xi), \Omega(\xi)) = \varepsilon$$

für jeweils ein  $t \in [t_n, s_{n'}]$  und ein  $t \in [s_{n'}, t_{n''}]$ . Wir können also eine neue Folge  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$  bilden mit  $(\varphi_{\tau_n}(\xi))_{n \in \mathbb{N}} \subset K_\varepsilon$  in der Menge

$$K_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^k : \text{dist}(x, \Omega(\xi)) = \varepsilon \right\}.$$

Da  $\Omega(\xi)$  kompakt, ist auch  $K_\varepsilon$  kompakt. Daher gibt es eine konvergente Teilfolge  $(\varphi_{\tau_{n_k}}(\xi))_{k \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $y' \in K_\varepsilon$ . Damit ist aber  $y' \in \Omega(\xi)$  im Widerspruch zu  $y' \notin \Omega(\xi)$  wegen der Eigenschaft  $\text{dist}(y', \Omega(\xi)) = \varepsilon > 0$ .

zu 4.: Für  $\Omega(\xi) = \{y\}$  gilt

$$\text{dist}(\varphi_t(\xi), \Omega(\xi)) = \text{dist}(\varphi_t(\xi), \{y\}) = \|\varphi_t(\xi) - y\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

da  $\{y\}$  kompakt ist und 3. gilt.

Zusätzlich folgt aus der Stetigkeit der Abbildung  $\xi \mapsto \varphi_t(\xi)$ , dass für  $s > 0$

$$y = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{t+s}(\xi) = \varphi_s(\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\xi)) = \varphi_s(y)$$

$y$  ist also stationär. ■

**Beispiel 2.8** Wir betrachten in  $D = ]0, \infty[$

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = \xi.$$

Dann gilt für alle  $\xi$  hier  $x(t) = \xi e^t \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \infty$ , also  $\Omega(\xi) = \emptyset$ .

**Beispiel 2.9** Ist  $x^*$  stationärer Punkt von Gleichung (2.1), dann ist  $\Omega(x^*) = \{x^*\}$ .

**Beispiel 2.10** Sei  $x$  eine periodische Lösung, das heißt  $x(t + \tau) = x(t)$  für alle  $t \geq 0$  mit einer festen Periode  $\tau > 0$ . Dann finden wir für beliebiges  $t \in [0, \tau[$  mit  $t_n = t + n \cdot \tau$ , dass

$$x(t) = x(t + n \cdot \tau) = \varphi_{t+n \cdot \tau}(x(0)),$$

das heißt

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t+n \cdot \tau}(x(0))$$

und es gilt  $x(t) \in \Omega(x(0))$ .

Analog zeigt ein Kompaktheitsargument, dass jeder Punkt in  $\Omega(x(0))$  die Form  $x(t)$  für  $t \in [0, \tau[$  hat. Also gilt

$$\Omega(x(0)) = \{x(t) : t \in [0, \tau[ \} = \{x(t) : t \geq 0 \}.$$

**Beispiel 2.11** Wir betrachten im  $\mathbb{R}^2$  das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y(1 - x^2 - y^2), \end{aligned}$$

vgl. Abb. 2.20. Die allgemeine Lösung ist

$$\varphi_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\|\xi\|^2 + (1 - \|\xi\|^2) \cdot e^{-2t}}} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t \\ -\xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Für  $\xi \neq 0$  gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(\xi)\| = 1$ ,  $\xi = 0$  ist stationär.

Es gilt

$$\Omega(\xi) = \begin{cases} \{\xi' \in \mathbb{R}^2 : \|\xi'\| = 1\} & \text{für } \xi \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & \text{für } \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

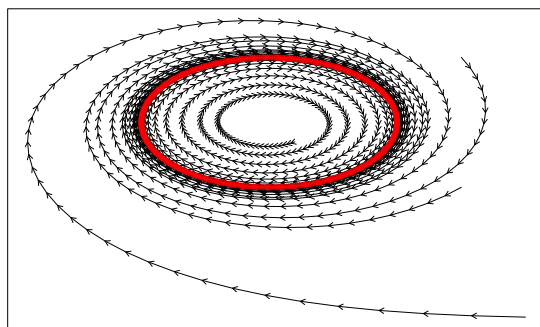


Abbildung 2.20: Zu Bsp. 2.11: Bei Start außen findet Konvergenz von außen gegen den Einheitskreis statt, bei Start innen Konvergenz von innen gegen den Einheitskreis.

**Beispiel 2.12 (Lorenz-Gleichung)** *Fouriertransformation von partiellen Differentialgleichungen zur Wettermodellierung führt zu folgenden Differentialgleichungen im  $\mathbb{R}^3$ :*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y && \text{Parameter } \sigma, r, b > 0 \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

Für gewisse Parameterwerte (siehe Abb. 2.21) gibt es “komische“ Grenzmengen fraktaler Natur mit (Hausdorff-) Dimension  $> 1$ .

Gilt als Musterbeispiel für Chaos, bei Differentialgleichungen ist dieses in Dimensionen  $k \geq 3$  möglich.

**AB JETZT BETRACHTEN WIR DEN FALL  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .**

**Definition 2.6** Wir betrachten  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  lokal Lipschitz-stetig,  $x : \mathbb{R} \rightarrow D$  eine Lösung von  $\frac{dx}{dt} = F(x)$ .

Dann heißt

$$x(\mathbb{R}) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

1. periodischer Orbit, falls  $x$  periodisch.

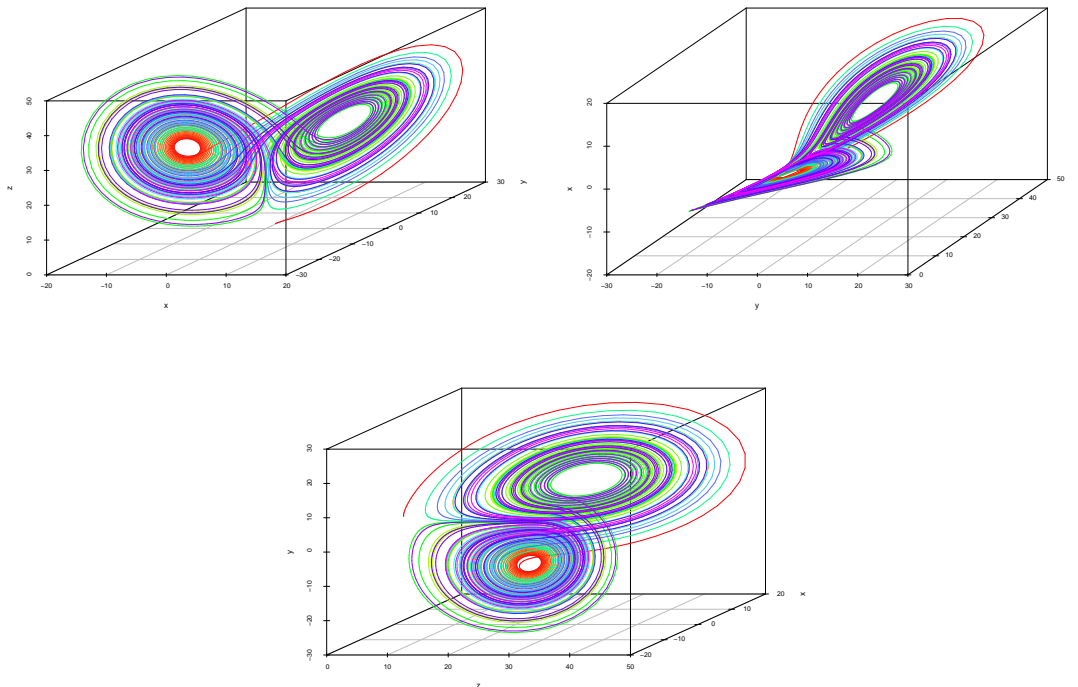


Abbildung 2.21: Simulation der Lorenz-Gleichung mit Parametern  $\sigma = 10$  (oben links),  $r = 28$  (oben rechts),  $b = \frac{8}{3}$  (unten); Farbe codiert Zeit

2. *homokliner Orbit, falls ein stationärer Punkt  $x^* \in D$  existiert, so dass*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x^*.$$

3. *heterokliner Orbit, falls zwei stationäre Punkte  $x_1^*, x_2^* \in D$ ,  $x_1^* \neq x_2^*$  existieren, so dass*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_2^* \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_1^*.$$

**Satz 2.13 (Poincarè-Bendixson, ohne Beweis)** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  lokal Lipschitzstetig und  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  der zugehörige Halbfluss. Zusätzlich sei  $\xi \in D$  derart, dass eine kompakte Menge  $K \subset D$  mit  $\varphi_t(\xi) \in K$  für alle  $t \geq 0$  existiert, in welcher nur endlich viele stationäre Punkte liegen.

Dann ist  $\Omega(\xi)$  entweder ein einzelner stationärer Punkt, Trajektorie einer periodischen Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{2.4}$$

oder eine geschlossene Kurve, die Vereinigung von endlich vielen Trajektorien von Lösungen  $y_i$  von Gleichung (2.4), für welche  $y_i(\pm\infty)$  stationäre Punkte sind, ist.

**Anmerkung** In den letzten beiden Fällen spricht man auch von einem Grenzyklus.



**Beispiel 2.13** Wir beschäftigen uns noch einmal mit Bsp. 2.11. Hier gilt

$$\Omega(\xi) = \left\{ (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) : \tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2 = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

für  $\xi \neq 0$  und  $\Omega(\xi) = \{0\}$  für  $\xi = 0$ .

**Beispiel 2.14** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + x^2, \end{aligned}$$

die von der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x + x^2$$

abgeleitet ist.

Der stationäre Punkt  $(0, 0)$  ist von einer Kurve umgeben, die im Punkt  $(1, 0)$  beginnt und endet (homokliner Orbit). Das Phasenporträt sehen wir in Abb. 2.22.

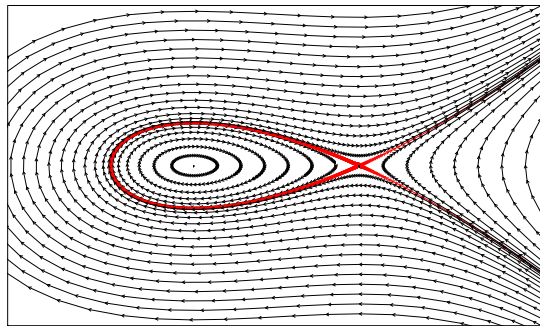


Abbildung 2.22: Phasenbild eines nichtlineardeformierten Oszillators

**Satz 2.14 (Brouwerscher Fixpunktsatz, ohne Beweis)** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  lokal Lipschitz-stetig und  $K \subset D$  kompakt und einfach zusammenhängend. Falls  $\varphi_t(K) \subseteq K$  für alle  $t \geq 0$  (d.h.  $\varphi_t(\xi) \in K$  für alle  $t \geq 0$ ,  $\xi \in K$ ), dann gibt es einen stationären Punkt in  $K$ .

Bemerkung:  $K$  ist einfach zusammenhängend, falls es ein  $x' \in K$  gibt, und  $f : [0, 1] \times K \rightarrow K$ , das stetig ist und

$$\begin{aligned} f(0, x) &= x && \text{für alle } x \in K \\ f(1, x) &= x' && \text{für alle } x \in K \end{aligned}$$

erfüllt. Anschaulich heißt dies:  $K$  hat keine „Löcher“.

**Beispiel 2.15** Der Satz stimmt nicht für nicht einfach zusammenhängende Gebiete. Wir betrachten im Bsp. 2.11 bzw. Bsp. 2.13 mit  $D = \mathbb{R}^2$ :

$$K = \left\{ (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) : \tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \right\}$$

$K$  enthält nicht den einzigen Fixpunkt von  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ , nämlich  $\xi = 0$ .

**Satz 2.15** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  lokal Lipschitz-stetig und  $x$  eine periodische Lösung von Gleichung (2.4). Falls das von  $x$  umrandete Gebiet ganz in  $D$  liegt, gibt es in  $D$  einen Fixpunkt (sogar in diesem Gebiet).

*Beweis:* Sei  $K \subset D$  das von  $x$  umrandete Gebiet. Dann gilt für alle  $\xi \in K$  und  $t \geq 0$ , dass  $\varphi_t(\xi) \in K$ : Falls  $\xi$  auf dem Rand liegt, gilt  $\xi = x(t_0)$  für irgendein  $t_0 \geq 0$ . Daraus folgt:

$$\varphi_t(\xi) = \varphi_t(\varphi_{t_0}(x(0))) = \varphi_{t+t_0}(x(0)) = x(t+t_0),$$

d.h.  $\varphi_t(\xi) \in K$ .

Falls  $\xi$  nicht auf dem Rand liegt, aber für irgendein  $t \geq 0$  gilt, dass  $\varphi_t(\xi) \notin K$  ist, muss für ein  $t_0 < t$  dann  $\varphi_{t_0}(\xi)$  auf dem Rand von  $K$  liegen. Somit liegt nach dem Vorigen auch  $\varphi_t(\xi) = \varphi_{t-t_0}(\varphi_{t_0}(\xi)) \in K$ .  $\rightsquigarrow$  Widerspruch.

Da  $K$  einfach zusammenhängend ist, gibt es nach Satz 2.14 einen Fixpunkt in  $K$ . ■

**Beispiel 2.16 (Lotka-Volterra Räuber-Beute Modell)** Wir modellieren die Interaktion einer Räuberpopulation mit einer Beutepopulation. Seien  $B$  die Beutedichte,  $R$  die Räuberdichte.

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \alpha \cdot B - \gamma \cdot B \cdot R \\ \frac{dR}{dt} &= -\beta \cdot R + \delta \cdot B \cdot R \end{aligned}$$

Es gibt eine geschlossene Lösungskurve, also auch einen stationären Punkt.

**Definition 2.7** Sei  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  für ein offenes  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar. Dann heißt die Funktion  $\operatorname{div}F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{div}F(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$$

die Divergenz von  $F = (F_1, \dots, F_k)^\top$ .

**Anmerkung** Falls  $F$  einen Halbfluss beschreibt, dann ist  $\operatorname{div}F(x)$  die Quellstärke von  $F$  in  $x$ . Dies sieht man am besten an der Greenschen Formel im  $\mathbb{R}^2$ .

Sei  $K$  das von einer geschlossenen, nicht überschneidenden Kurve  $C$  umschlossene Gebiet und für jeden Punkt  $\xi$  auf der Kurve ist  $\eta(\xi)$  der äußere Einheitsnormalenvektor an  $C$  (d.h.  $\|\eta(\xi)\| = 1$ ). Wir definieren ein Integral  $\int_C f(\xi) d\xi$  über die Kurve durch:

$$\int_C f(\xi) d\xi = \int_0^1 f(\tau(s)) \cdot \left\| \frac{d\tau}{ds} \right\| ds$$

für eine (beliebige) Parametrisierung  $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  der Kurve  $C$  (im positiven Drehsinn).

Schließlich findet man die Greensche Formel:

$$\underbrace{\int_C \langle \eta(\xi), F(\xi) \rangle d\xi}_{\text{Ausfluss (Einfluss) über den Rand}} = \underbrace{\int_K \operatorname{div} F(x) dx}_{\text{Quellen im Gebiet}}$$

**Satz 2.16 (Dulac-Kriterium)** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und einfach zusammenhängend,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar und  $M : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere stetig differenzierbare Funktion, sodass  $\operatorname{div} MF > 0$  in ganz  $D$ .

Dann gibt es in  $D$  keine periodische Lösung von Gleichung (2.4).

**Anmerkung** Meist wird das Kriterium mit  $M \equiv 1$  oder  $M \equiv -1$  angewandt. Dies ergibt das sogenannte negative Kriterium von Bendixson. Im Fall  $M \equiv -1$  fordert man also  $\operatorname{div} F < 0$  in ganz  $D$ .

*Beweis:* Angenommen es existiert eine periodische Lösung. Jede periodische Lösung beschreibt eine geschlossene Kurve  $C$  im Phasenraum.

$\frac{d\varphi_t(\xi)}{dt} = F(\varphi_t(\xi))$  zeigt, dass das Vektorfeld  $F$  tangential an  $C$  ist, was

$$\langle \eta(\xi), M(\xi)F(\xi) \rangle = M(\xi) \langle \eta(\xi), F(\xi) \rangle = 0$$

für alle  $\xi \in C$  impliziert. Wir finden für eine solche Kurve mit der Greenschen Formel:

$$0 = \int_C \langle \eta(\xi), M(\xi)F(\xi) \rangle d\xi = \int_K \operatorname{div}(M \cdot F)(x) dx > 0$$

$\rightsquigarrow$  Widerspruch. ■

**Beispiel 2.17** Wir betrachten ein Räuber-Beute Modell mit logistischem Beute-Wachstum in der offenen Menge  $D = ]0, \infty[^2$  für Parameter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, K > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \alpha \cdot B \cdot \left(1 - \frac{B}{K}\right) - \gamma \cdot B \cdot R \\ \frac{dR}{dt} &= -\beta \cdot R + \delta \cdot B \cdot R \end{aligned}$$

$$F \left( \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha \cdot b \cdot \left(1 - \frac{b}{K}\right) - \gamma \cdot b \cdot r \\ -\beta \cdot r + \delta \cdot b \cdot r \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F \left( \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} \right) &= \frac{\partial}{\partial b} (\alpha \cdot b \cdot \left(1 - \frac{b}{K}\right) - \gamma \cdot b \cdot r) + \frac{\partial}{\partial r} (-\beta \cdot r + \delta \cdot b \cdot r) \\ &= \alpha \cdot \left(1 - \frac{b}{K}\right) - \alpha \cdot b \cdot \frac{b}{K} - \gamma \cdot r - \beta + \delta \cdot b \\ &= \alpha - 2\alpha \cdot \frac{b}{K} + \delta \cdot b - \gamma \cdot r - \beta \end{aligned}$$

⇒ Das Kriterium reicht nicht aus, wir benötigen eine geschicktere Wahl von  $M$ .

Neuer Ansatz:

$$\begin{aligned} M \left( \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} \right) &= -\frac{1}{br} \\ M \cdot F \left( \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} -\frac{\alpha \cdot \left(1 - \frac{b}{K}\right)}{\frac{\beta \cdot r}{b}} & \gamma \\ \frac{\beta \cdot r}{b} & -\delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} MF &= \frac{\partial}{\partial b} MF_1 + \frac{\partial}{\partial r} MF_2 \\ &= -\frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\alpha \cdot \left(1 - \frac{b}{K}\right)}{r} + \gamma \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\beta}{b} + \delta \right) \\ &= \frac{\alpha}{K \cdot r} - 0 \\ &= \frac{\alpha}{K \cdot r} > 0 \end{aligned}$$

Nach dem Dulac-Kriterium aus Satz 2.16 besitzt die Differentialgleichung im Bereich  $\{(b, r) : b \geq 0, r \geq 0\}$  keinen Grenzyklus. Damit konvergiert das System immer gegen einen der stationären Punkte.

Diese lassen sich leicht berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \cdot b \cdot \left(1 - \frac{b}{K}\right) - \gamma \cdot b \cdot r = b \cdot \left(\alpha - \alpha \cdot \frac{b}{K}\right) - \gamma \cdot r \\ 0 &= -\beta \cdot r + \delta \cdot b \cdot r = r \cdot (-\beta + \delta \cdot b) \end{aligned}$$

Nun gibt es 4 Möglichkeiten:

$r = b = 0$	der stationäre Punkt ist instabil
$b = 0$ und $-\beta + \delta \cdot b = 0$	Widerspruch, d.h. dieser Fall ist nicht möglich
$\alpha - \alpha \cdot \frac{b}{K} - \gamma \cdot r = 0$ und $r = 0 \Rightarrow b = K$	der stationäre Punkt ist genau dann stabil, wenn $-\beta + \delta K < 0$
$\alpha - \alpha \cdot \frac{b}{K} - \gamma \cdot r = 0$ und $-\beta + \delta b = 0$	nur in diesem Fall sind in einem Gleichgewicht beide Spezies vorhanden (innerer stat. Punkt)

# Kapitel 3

## Bifurkationstheorie

### 3.1 Grundlagen

Wir erweitern nun unseren Blickwinkel und betrachten jetzt parametrisierte Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \alpha), \quad (3.1)$$

wobei  $x : ]0, \infty[ \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $\alpha \in E \subseteq \mathbb{R}^p$ .

**Beispiel 3.1** Seien  $D = E = \mathbb{R}$ ,

$$F(x, \alpha) = \alpha - x^2. \quad (3.2)$$

Die Situation, dass  $\alpha \rightarrow 0$  ist hier von speziellem Interesse, vgl. Abb. 3.1.

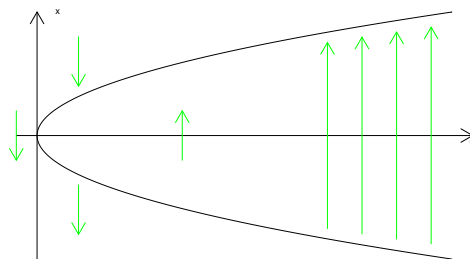


Abbildung 3.1: Bifurkationsdiagramm zu Beispiel (3.1) für  $F(x, \alpha) = \alpha - x^2$

In Abhängigkeit von  $\alpha$  haben wir drei unterschiedliche Situationen für die Anzahl der stationären Punkte von Gleichung (3.1):

- $\alpha < 0 \Rightarrow F(x) < 0$  für alle  $x$ , die Lösung divergiert nach  $-\infty$
- $\alpha = 0 \Rightarrow x = 0$  ist stationärer Punkt, aber instabil
- $\alpha > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\alpha}$  sind stationäre Punkte,  
 $x = +\sqrt{\alpha}$  ist stabil,  $x = -\sqrt{\alpha}$  ist instabil

Das qualitative Verhalten ändert sich also bei Variation von  $\alpha$  über die reelle Achse, siehe auch Abb. 3.1. Das Diagramm heißt auch Bifurkationsdiagramm.

Zunächst stellen wir uns die Frage, wie man die Parameterabhängigkeit der Lösungen in Mathematik fassen kann. Als erstes stellen wir ein Ergebnis zur stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Parametern vor.

**Satz 3.1** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^k, E \subseteq \mathbb{R}^p$  offen,  $F : D \times E \mapsto \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz-stetig und  $x : [0, \tau] \mapsto D$  eine Lösung von Gleichung (3.1) für  $\alpha = \alpha_0, x(0) = x_0, (x_0, \alpha_0) \in D \times E$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $(x_0, \alpha_0)$  und ein  $C > 0$ , sodass für alle  $(\xi, \alpha) \in U$  eine Lösung von Gleichung (3.1) mit  $x(0) = \xi$  im Intervall  $[0, \tau]$  existiert, und diese Lösung  $\tilde{x}$  die Beziehung

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq C \cdot (\|\alpha - \alpha_0\| + \|\xi - x_0\|)$$

erfüllt.

*Beweis:* Man benutzt den Satz über die stetige Abhängigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen von den Startbedingungen:

Wir ergänzen die Differentialgleichungen um  $\alpha$ -Komponenten

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ &\vdots \\ \frac{dx_k}{dt} &= F_k(x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d\alpha_p}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dies definiert eine Differentialgleichung auf  $D \times E$ , stetige Abhängigkeit vom Startwert ergibt die Behauptung (siehe Literatur oder Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“). ■

**Anmerkung** Noch eine Anmerkung zum Bifurkationsdiagramm in Abb. 3.1. Man sieht, dass das Bifurkationsverhalten nicht nur von Stetigkeitseigenschaften, sondern auch vom Verhalten höherer Ableitungen abhängt. Beim Linearisieren von Gleichung (3.2) verschwindet nämlich die Bifurkation.

**Beispiel 3.2** Wir betrachten Störungen der linearen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x\end{aligned}$$

Der stationäre (Null-)Punkt dieser Differentialgleichung ist ein Zentrum, welches stabil aber nicht attraktiv ist (siehe Abb. 2.16). Alle Lösungen sind periodisch.

Die lineare Störung dieser Differentialgleichung führt zum Beispiel auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \varepsilon y\end{aligned}$$

Falls  $\varepsilon < 0$ , so ist der Nullpunkt ein attraktiver Strudel (siehe Abb. 2.17), für  $\varepsilon > 0$  ein repulsiver Strudel (siehe Abb. 2.15) und es existieren keine periodischen Lösungen.

Man könnte auch nichtlinear stören, z.B.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \varepsilon x^2\end{aligned}$$

Dann tritt „aus dem Nichts heraus“ für alle  $\varepsilon \neq 0$  ein zweiter stationärer Punkt und ein homokliner Orbit auf, siehe Abb. 2.22.

Zusammengefasst können wir das Zentrum durch eine kleine Änderung der Differentialgleichung qualitativ stark verändern (das Zentrum ist strukturell instabil, siehe unten). Allerdings stellt sich die Frage, ob die obigen  $\varepsilon$ -Änderungen wirklich klein sind. Was könnte ein gutes Maß für die Größe der Änderung eines Vektorfeldes sein?

**Definition 3.1** Gegeben seien  $D, \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\tilde{F} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz-stetig und die zugehörigen Halbflüsse  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ ,  $(\tilde{\varphi}_t)_{t \geq 0}$ , d.h.  $\varphi_t : D \rightarrow D$ ,  $\tilde{\varphi}_t : \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}$ .

Dann heißen die Halbflüsse  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  und  $(\tilde{\varphi}_t)_{t \geq 0}$  topologisch äquivalent, wenn es eine Bijektion  $H : D \rightarrow \tilde{D}$  gibt, für welche  $H$  und  $H^{-1}$  stetig sind, sowie Trajektorien von  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  auf Trajektorien von  $(\tilde{\varphi}_t)_{t \geq 0}$  abgebildet werden und umgekehrt. Dies bedeutet für alle  $\xi \in D$

$$\{H(\varphi_t(\xi)) : t \geq 0\} = \{\tilde{\varphi}_s(H(\xi)) : s \geq 0\}.$$

### Anmerkungen

- ) Mit anderen Worten, es gibt für alle  $\xi \in D$  eine stetige, streng monoton wachsende Funktion  $\tau_\xi : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  mit  $\tau_\xi(0) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_\xi(t) = \infty$  und  $H(\varphi_t(\xi)) = \tilde{\varphi}_{\tau_\xi(t)}(H(\xi))$  für alle  $t \geq 0$ .

–) Eine Veranschaulichung zeigt Abb. 3.2. Die Phasenbilder können aufeinander abgebildet werden, inklusive der Richtung, in der die Trajektorien durchlaufen werden.

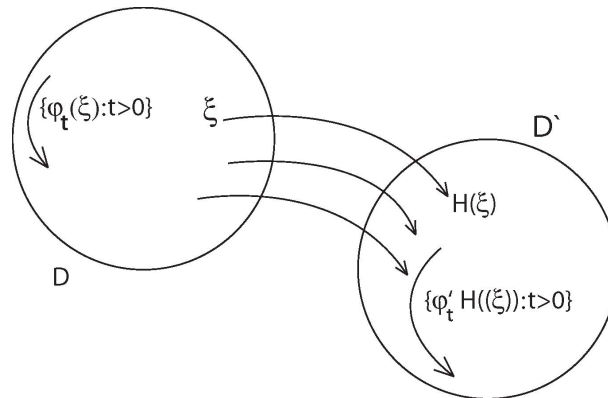


Abbildung 3.2: Zur Definition topologisch äquivalenter dynamischer Systeme

**Definition 3.2** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar. Dann heißt die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \tag{2.4}$$

in  $D_0 \subset D$  strukturell stabil, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für jede differenzierbare Funktion  $\tilde{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ , mit

$$\sup_{\xi \in D} \|F(\xi) - \tilde{F}(\xi)\| + \sum_{i=1}^k \left\| \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi) - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}(\xi) \right\| < \varepsilon \tag{3.4}$$

offene Mengen  $U, V$  mit  $D_0 \subseteq U, V \subseteq D$  existieren, so dass die dynamischen Systeme  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  und  $(\tilde{\varphi}_t)_{t \geq 0}$ , die durch  $F$  bzw.  $\tilde{F}$  in  $U$  bzw.  $V$  bestimmt sind, topologisch äquivalent sind.

**Anmerkungen**

- ) Ein Beispiel für strukturelle Instabilität wird in den Übungsaufgaben diskutiert.
- ) Die Betrachtung der Ableitungen ist wichtig, um die Zahl der stationären Punkte zu kontrollieren:

**Beispiel 3.3** Sei  $D = \mathbb{R}$  und  $F(x) = -x$ , das heißt wir betrachten die Differentialgleichung  $\frac{dx}{dt} = -x$ .

Dann kann die Differentialgleichung (2.4) viele stationäre Punkte besitzen, wenn ausschließlich  $\sup_{\xi} |F(\xi) - \tilde{F}(\xi)| \leq \varepsilon$  gefordert wird, siehe Abb. 3.3.



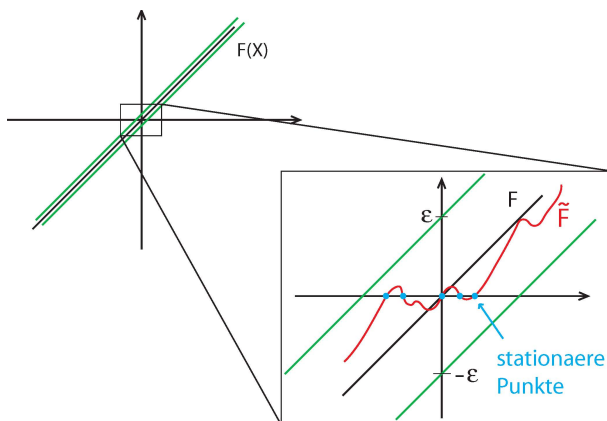


Abbildung 3.3: Zur Definition strukturell stabiler dynamischer Systeme

**Definition 3.3** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^p$  offen,  $F : D \times E \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz-stetig. Dann heißt  $\alpha_0 \in E$  Bifurkationspunkt von

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \alpha), \tag{3.1}$$

falls es in jeder Umgebung  $U$  von  $\alpha_0$  einen Wert  $\alpha'$  gibt, so dass die Halbflüsse  $(\varphi_t^{\alpha'})_{t \geq 0}$  und  $(\varphi_t^{\alpha_0})_{t \geq 0}$ , die zu Gleichung (3.1) mit  $\alpha = \alpha'$  bzw.  $\alpha = \alpha_0$  gehören, in  $D$  nicht topologisch äquivalent sind.

**Anmerkung** Wenn  $F$  genügend oft differenzierbar ist, dann ist zumindest plausibel, dass für  $\alpha'$  nahe an  $\alpha_0$

$$\tilde{F}(x) = \tilde{F}(x, \alpha')$$

Gleichung (3.4) für die Funktion  $F(x) = F(x, \alpha_0)$  erfüllt. Dann könnte die Differentialgleichung  $\frac{dx}{dt} = F(x, \alpha_0)$  nicht strukturell stabil sein. (Strukturelle Instabilität ist notwendig für eine Bifurkation.)

**Satz 3.2 (Flow-Box-Theorem)** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar. Falls für ein  $x_0 \in D$   $F(x_0) \neq 0$ , dann gibt es Umgebungen  $U, V \subset D$  von  $x_0$  so dass die Halbflüsse, die zu

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{2.4}$$

in  $U$  und zu

$$\frac{dx}{dt} = F(x_0)$$

in  $V$  gehören, topologisch äquivalent sind. Insbesondere ist Gleichung (2.4) in  $U$  strukturell stabil.

**Satz 3.3** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $F : D \mapsto \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar und  $x^*$  ein stationärer Punkt von Gleichung (2.4). Falls alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $F'(x^*)$   $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$  erfüllen, dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x^*$ , so dass die Differentialgleichung (2.4) strukturell stabil in  $U$  ist.

*Beweis:*(Idee)

Das Phasenportrait wird im wesentlichen durch die Linearisierung von  $F$  um  $x^*$  bestimmt. Die Existenz eines Fixpunktes für  $\tilde{F}$  nahe an  $F$  folgt aus der Invertierbarkeit von  $F'(x^*)$ . Den Rest bekommt man aus der Stetigkeit der Eigenwerte einer Matrix in Abhängigkeit von den Einträgen. ■

**Anmerkung** Die Umkehrung gilt auch (wenigstens für isolierte Fixpunkte).

**Definition 3.4** Ein stationärer Punkt  $x^*$  der Differentialgleichung (2.4) heißt hyperbolischer Fixpunkt, falls alle Eigenwerte von  $F'(x^*)$  die Bedingung  $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$  erfüllen.

**Beispiel 3.4**  $F(x) = Ax$  für  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , mit Eigenwerten  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$  (0 ist ein Sattel).

**Satz 3.4 (Pontrjagin, Andronov)** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar. Dann ist die Differentialgleichung (2.4) in einem einfach zusammenhängenden offenen Gebiet  $D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$  genau dann strukturell stabil, wenn das Folgendes gilt:

1. Es gibt nur endlich viele stationäre Punkte in  $D_0$ , und diese sind hyperbolisch.
2. Es gibt nur endlich viele periodische Orbits in  $D_0$ , und diese sind exponentiell anziehend oder abstoßend.
3. Es gibt weder homokline noch heterokline Orbits.

### Anmerkungen

- Die Bilder in Abb. 3.4 sind nicht erlaubt.
- Es gibt keine Analogon in höheren Dimensionen.
- Satz 3.2 folgt für  $k = 2$  aus Satz 3.4.

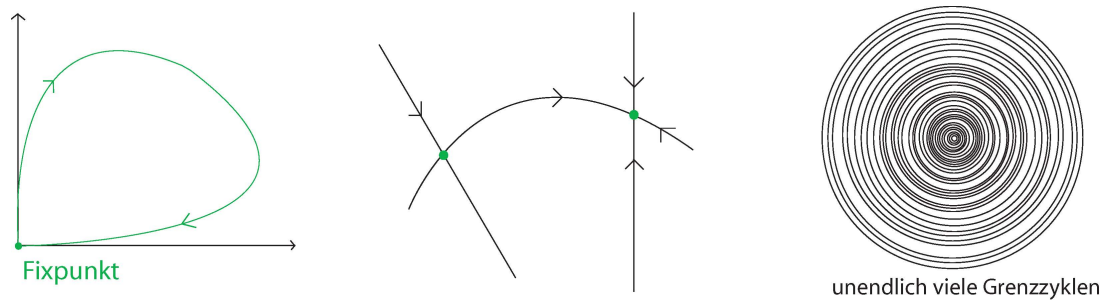


Abbildung 3.4: Verbotene Konfigurationen für strukturell stabile planare dynamische Systeme. Links ist ein *homokliner Orbit*, in der Mitte ein *heterokliner Orbit*.

### 3.2 Die Sattel-Knoten-Bifurkation

Wir suchen einen einfachen Bifurkationspunkt  $\alpha_0$ . Nach Satz 3.2 und Satz 3.3 muss es  $x_0$  geben, sodass  $F(x_0, \alpha_0) = 0$  und  $\frac{\partial}{\partial x}F(x_0, \alpha_0)$  einen Eigenwert  $\lambda$  mit  $\text{Re}\lambda = 0$  besitzt.

Wir betrachten den einfachsten Fall  $k = p = 1$ , d.h.  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt  $F(x_0, \alpha_0) = 0$  sowie  $\frac{\partial}{\partial x}F(x_0, \alpha_0) = 0$ .

Dann ergibt sich nach der Taylor-Formel in einer Umgebung von o.B.d.A.  $(x_0, \alpha_0) = (0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} F(x, \alpha) &= F(0, 0) + x \cdot \frac{\partial}{\partial x}F(0, 0) + \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}F(0, 0) + \frac{1}{2}(x^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}F(0, 0) \\ &\quad + 2x\alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha}F(0, 0) + \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}F(0, 0)) + O(x^3 + \alpha^3) \\ &= \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}F(0, 0) + \frac{1}{2}(x^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}F(0, 0) + 2x\alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha}F(0, 0) \\ &\quad + \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}F(0, 0)) + O(x^3 + \alpha^3) \end{aligned}$$

**Notation:** Im Folgenden seien

$$F_x(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial x}F(x, \alpha), \quad F_{x\alpha}(x, \alpha) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \alpha}(x, \alpha), \quad \text{u.s.w.}$$

**Beispiel 3.5** (siehe Bsp. 3.1)

$F(x, \alpha) = \alpha - x^2$ ,  $x_0 = \alpha_0 = 0 \Rightarrow$  dynamisches Verhalten ändert sich bei Variation von  $\alpha < 0$  zu  $\alpha > 0$ , d.h.  $\alpha_0 = 0$  ist Bifurkationspunkt  $\Rightarrow$  die ist eine sogenannte Normalform der Sattel-Knoten-Bifurkation:

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0 \\ F_x(0, 0) &= -2 \cdot 0 = 0 \\ F_\alpha(0, 0) &= 1 \\ F_{xx}(0, 0) &= -2 \end{aligned}$$

**Satz 3.5 (Sattel-Knoten-Bifurkation)** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $F : D \times E \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und es gelte für  $x_0 \in D$ ,  $\alpha_0 \in E$ :

1.  $F(x_0, \alpha_0) = 0$
2.  $F_x(x_0, \alpha_0) = 0$
3.  $F_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0$
4.  $F_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0$

Dann gibt es Umgebungen  $U \subseteq D$  von  $x_0$  und  $V \subseteq E$  von  $\alpha_0$  sowie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $h : U \rightarrow V$  mit

1.  $h(x_0) = \alpha_0$
2. Es gilt  $\{(x, \alpha) : x \in U, \alpha \in V, F(x, \alpha) = 0\} = \{(x, h(x)) : x \in U\}$ .
3. Der Graph von  $h$  hat in  $x_0$  ein lokales Extremum, d.h.  $h'(x_0) = 0$  und

$$h''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, \alpha_0)}{F_\alpha(x_0, \alpha_0)}.$$

4. Für  $\alpha = \alpha_0$  ist der Fixpunkt  $x^* = x_0$  von Gleichung (2.4) instabil.
5. Für  $\alpha \in V \setminus h(U)$ , besitzt Gleichung (2.4) keinen stationären Punkt in  $U$ .
6. Wenn  $\alpha \in h(U) \setminus \{\alpha_0\}$ , dann besitzt Gleichung (2.4) zwei Fixpunkte  $x^-(\alpha) < x_0 < x^+(\alpha)$ .  
 $\Rightarrow$  Ist  $F_{xx}(x_0, \alpha_0) > 0$ , dann ist  $x^-(\alpha)$  asymptotisch stabil und  $x^+(\alpha)$  instabil.  
 $\Rightarrow$  Ist  $F_{xx}(x_0, \alpha_0) < 0$ , dann ist  $x^+(\alpha)$  asymptotisch stabil und  $x^-(\alpha)$  instabil.

Als Veranschaulichung des Stabilitätsverhaltens dient Abb. 3.1.

*Beweis:* 1. Sei o.B.d.A  $x_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ . Dies können wir durch eine einfache lineare Koordinatentransformation erreichen.

2. Wegen  $F_\alpha(0, 0) \neq 0$  können wir den Satz über die implizite Funktionen anwenden. Damit gibt es Intervalle  $\tilde{U}, V \subseteq \mathbb{R}$ ,  $0 \in U \cap V$  und eine Funktion  $h : \tilde{U} \rightarrow V$ , so dass:

$$F(x, h(x)) = 0 \tag{3.5}$$

und in  $\tilde{U} \times V$  gibt es keine anderen Nullstellen von  $F$  als  $(x, h(x))$ ,  $x \in \tilde{U}$ .

3. Leiten wir Gleichung (3.5) nach  $x$  ab, so finden wir:

$$0 = F_x(x, h(x)) + F_\alpha(x, h(x)) \cdot h'(x).$$

Da  $h$  zweimal stetig differenzierbar ist und  $F_\alpha$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $U \subseteq \tilde{U}$  von 0, so dass  $F_\alpha(x, h(x)) \neq 0$  ist (wir hatten  $F_\alpha(0, 0) \neq 0$  vorausgesetzt).

Dann finden wir:  $h'(x) = -\frac{F_x(x, h(x))}{F_\alpha(x, h(x))}$ .

Damit gilt:  $h'(x) = -\frac{F_x(0, 0)}{F_\alpha(0, 0)} = 0$ .

Desweiteren erhalten wir:

$$\begin{aligned} h''(x) &= -\frac{\frac{d}{dx}F_x(x, h(x))}{F_\alpha(x, h(x))} + \frac{F_x(x, h(x)) \cdot \frac{d}{dx}F_\alpha(x, h(x))}{F_\alpha(x, h(x))^2} \\ &= -\frac{F_{xx}(x, h(x))F_{x\alpha}(x, h(x)) \cdot h'(x)}{F_\alpha(x, h(x))} + \frac{F_x(x, h(x)) \cdot \frac{d}{dx}F_\alpha(x, h(x))}{F_\alpha(x, h(x))^2} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} h''(0) &= -\frac{F_{xx}(0, 0) + F_{x\alpha}(0, 0) \cdot h'(0)}{F_\alpha(0, 0)} + \frac{F_x(0, 0) \cdot \frac{d}{dx}F_\alpha(x, h(x))}{F_\alpha(0, 0)^2} \Big|_{x=0} \\ &= -\frac{F_{xx}(0, 0)}{F_\alpha(0, 0)} \neq 0 \end{aligned}$$

Folglich hat  $h$  in 0 ein striktes Extremum.

4. Für  $\alpha = 0$  ist  $F_x(0, 0) = 0$  und  $F_{xx}(0, 0) \neq 0$ , d.h.  $F(\cdot, 0)$  hat auch in  $x = 0$  ein strenges lokales Extremum, d.h. in einer Umgebung von 0, o.B.d.A.  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , ist  $F(\cdot, 0)$  in  $(-\varepsilon, 0)$  monoton fallend und in  $(0, \varepsilon)$  monoton steigend oder umgekehrt. Damit gilt für alle  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $x \neq 0$  entweder  $F(x, 0) > 0$  oder  $F(x, 0) < 0$ . Nach Satz 2.1 ist damit  $x = 0$  instabiler stationärer Punkt.

5. Für  $\alpha \notin h(U)$ , aber  $\alpha \in V$  gibt es nach Konstruktion von  $U$  und  $V$  keine stationären Punkte von  $F(\cdot, \alpha)$  in  $U$ .

6. Falls  $\alpha \in h(U)$ , dann gibt es zwei Werte  $x^-, x^+ \in U$  mit  $h(x^-) = h(x^+) = \alpha$ , weil  $h$  im Intervall  $U \cap (-\infty, 0)$  und im Intervall  $U \cap (0, \infty)$  streng monoton ist. Die Stabilität von  $x^-$  und  $x^+$  ergibt sich durch Betrachten von  $F_x(x^\pm, h(x^\pm))$ . Falls  $F_{xx}(0, 0) > 0$  und  $F_\alpha(0, 0) > 0$ , dann ist  $h''(0) < 0$ , d.h.  $\alpha = h(x^\pm) < 0$ . Damit ist  $F(0, \alpha) < F(0, 0) = 0$ , daraus folgt  $F_x(x^-, \alpha) < 0$  und  $F_x(x^+, \alpha) < 0$ , d.h.  $x^-$  ist stabil und  $x^+$  ist instabil.

Die anderen drei Fälle für die Vorzeichen von  $F_{xx}(0, 0)$  und  $F_\alpha(0, 0)$  werden analog behandelt.

■

**Anmerkung** Wesentlicher Grundstock des Beweises ist die Existenz von  $h$ , die Nullstellenmenge von  $F$  sieht dann etwa wie in Abb. 3.5 aus.

Durch umkehrbare und differenzierbare Transformation  $\phi : U \times V \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $0 \in W$ ,  $W$  offen, kann man erreichen, dass:

$$F \circ \phi(x, \alpha) = \alpha - \frac{h''(0)}{2} \cdot x^2$$

für alle  $x \in U$ ,  $\alpha \in V$  gilt.

Sogar  $F \circ \phi(x, \alpha) = \alpha \pm x^2$  lässt sich erreichen.

Solche einfachen Formen von  $F$  heißen Normalformen der entsprechenden Bifurkation. Das heißt, in Gleichung (3.2) haben wir (eine) die Normalform der Sattel-Knoten-Bifurkation studiert.

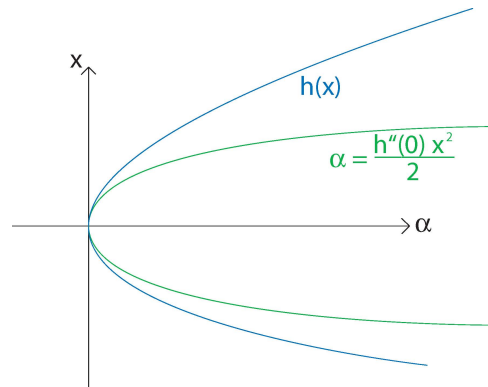


Abbildung 3.5: Nullstellenmenge einer Sattel-Knoten-Bifurkation

**Beispiel 3.6** (Siehe Bsp. 2.3)  $F(x) = r \cdot x(1 - \frac{x}{K}) - A$

Wir variieren nur den Fangterm  $A$  ( $\alpha = A$ ), während die Parameter  $r$  und  $K$  fest bleiben.

Notwendige Bedingungen an eine Sattel-Knoten-Bifurkation sind:

$$F(x^*) = 0$$

$$F'(x^*) = 0$$

$$0 = (r \cdot x(1 - \frac{x}{K}) - A)' = r(1 - \frac{x}{K} + x \cdot (-\frac{1}{K})) = r(1 - \frac{2x}{K})$$

$$\Leftrightarrow x^* = \frac{K}{2}$$

$$0 = r \cdot x^*(1 - \frac{x^*}{K}) - A = r \cdot \frac{K}{2}(1 - \frac{1}{2}) - A = \frac{rK}{4} - A$$

Also kann die Bifurkation nur für  $A = \frac{rK}{4}$  auftreten, dann ist  $x^* = \frac{K}{2}$  einzige Nullstelle von  $F$ .

Die weiteren partiellen Ableitungen sind konstant:

$$\frac{\partial F}{\partial A} = -1 \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2rK \neq 0.$$

Damit können wir Satz 3.5 anwenden: In einer Umgebung von  $x = \frac{K}{2}$ ,  $A = \frac{rK}{4}$  gibt es für  $A > \frac{rK}{4}$  keine stationären Punkte, für  $A = \frac{rK}{4}$  ist  $x = \frac{K}{2}$  instabil und für  $A < \frac{rK}{4}$  gibt es zwei stationäre Punkte  $x^- < \frac{K}{2} < x^+$ , von denen  $x^-$  instabil ist und  $x^+$  stabil ist.

### 3.3 Transkritische Bifurkation

Im Gegensatz zur Sattelknoten-Bifurkation gibt es in einer Umgebung von  $\alpha_0$  eine Kurve  $g$ , sodass  $g(\alpha)$  stationärer Punkt von  $F(\cdot, \alpha)$  ist.

Durch Betrachten von  $\bar{F}(x, \alpha) = F(x + g(\alpha + \alpha_0), \alpha + \alpha_0)$  können wir annehmen, dass  $F(0, \alpha) = 0$  für alle  $\alpha \in V$  ist. Und für die Bifurkation fordern wir  $F_x(0, 0) = 0$ .

O.B.d.A. setzen wir  $g(\alpha) = 0$  (sonst Übergang zu  $\tilde{F}(x, \alpha) = F(x - g(\alpha), \alpha)$ ) und fordern die Nichterfülltheit der Bedingung für die Eindeutigkeit des stationären Punktes für  $\alpha \neq 0$  gemäß des Satzes über die implizite Funktion:

$$F(0, \alpha) = 0 \tag{3.6}$$

$$F_x(0, 0) = 0 \tag{3.7}$$

Aus Gleichung (3.6) folgt:  $F_\alpha(0, 0) = 0$  im Unterschied zur Sattel-Knoten-Bifurkation.

Nun ergibt die Taylor-Entwicklung um  $(0, 0)$ :

$$F(x, \alpha) = \frac{1}{2} \cdot F_{xx}(0, 0) \cdot x^2 + F_{x\alpha} \cdot x \cdot \alpha + O(x^3 + \alpha^2)$$

**Beispiel 3.7** Wir betrachten

$$F(x, \alpha) = x^2 - \alpha \cdot x$$

$x^2 - \alpha x = 0$  wird durch  $x_1^*(\alpha) = 0$  und  $x_2^*(\alpha) = \alpha$  gelöst.

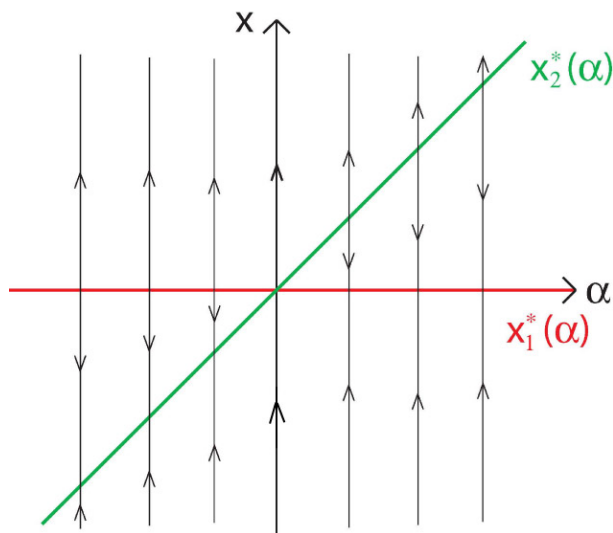


Abbildung 3.6: Bifurkationsdiagramm der Normalform der transkritischen Bifurkation

für  $\alpha < 0$  ist  $x_1^*(\alpha)$  instabil,  $x_2^*(\alpha)$  stabil  
 für  $\alpha = 0$  ist  $x_1^*(\alpha) = x_2^*(\alpha)$  instabil  
 für  $\alpha > 0$  ist  $x_1^*(\alpha)$  stabil,  $x_2^*(\alpha)$  instabil

Stabilität usw. kann aus Abb. 3.6 abgelesen werden, daraus sieht man:

⇒ Wir haben 2 glatte Kurven  $x_1^*, x_2^*$  von stationären Punkten, die sich für  $\alpha = 0$  kreuzen. Dabei findet ein Wechsel der Stabilität der Punkte statt.

Dieses Beispiel ist die (eine) Normalform der transkritischen Bifurkation.

**Satz 3.6** Sei  $F : D \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $0 \in D, E$  zweimal stetig differenzierbar und erfülle für alle  $\alpha \in E$  Gleichung (3.6) sowie Gleichung (3.7). Desweiteren seien  $F_{xx}(0,0), F_{x\alpha}(0,0) \neq 0$ . Dann gibt es Umgebungen  $U$  und  $V$  von 0 und eine einmal stetige differenzierbare Funktion  $h : U \rightarrow V$  mit  $h(0) = 0$  und:

$$F(x, h(x)) = 0 \quad (h(x) \neq 0 \text{ für } x \neq 0)$$

für alle  $x \in U$ .

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

1. Es gilt:

$$\{(x, \alpha) \in U \times V : F(x, \alpha) = 0\} = \{0\} \times V \cup \{(x, h(x)) : x \in U\}.$$

2.  $h$  ist streng monoton, insbesondere gilt:

$$h'(0) = -\frac{1}{2} \frac{F_{xx}(0,0)}{F_{x\alpha}(0,0)} \neq 0.$$

3. Für  $\alpha = 0$  ist der stationäre Punkt  $x = 0$  instabil.

4. Für jedes  $\alpha \in V \setminus \{0\}$  ist  $x_2^* = h^{-1}(\alpha)$  neben  $x_1^* = 0$  ein stationärer Punkt in  $U$ . Dabei ist für  $F_{x\alpha}(0,0) > 0$  und  $\alpha < 0$   $x_1^*$  asymptotisch stabil und  $x_2^*$  instabil, für  $\alpha > 0$  ist  $x_1^*$  instabil und  $x_2^*$  asymptotisch stabil. Für  $F_{x\alpha}(0,0) < 0$  sind die Verhältnisse umgekehrt.

**Beispiel 3.8** logistisches Wachstum mit linearem Abfischen, man vergleiche Bsp. 2.3:

$$F(x) = r \cdot x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex$$

Wir variieren nur die Fangrate  $E$ , die Parameter  $r$  und  $K$  bleiben fest.

Notwendige Bedingungen an eine transkritische Bifurkation sind:

$$\begin{aligned} F(x^*, E) &= 0 \\ F'(x^*, E) &= 0 \end{aligned}$$



Wir setzen also  $x^* = 0$  und finden

$$F'(x^*, E) = r - 2r \frac{x^*}{K} - E = r - E = 0,$$

d.h.  $E = r$ .

Leicht sieht man:

$E < r$ : es existiert ein stabiler stationärer Punkt  $x^* > 0$ , nachhaltige Fischerei

$E > r$ : es existiert nur ein in stabiler stationärer Punkt  $x^* < 0$ ,  $x^* = 0$  ist stabil, Fischpopulation stirbt aus.

### 3.4 Die Heugabel-Bifurkation

Unsere Bedingungen im letzten Abschnitt waren

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0 & F_{xx}(0, 0) &\neq 0 \\ F_x(0, 0) &= 0 & F_{x\alpha}(0, 0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun, was für  $F_{xx}(0, 0) = 0$  passiert.

Taylor-Entwicklung:

$$F(x, \alpha) = F_{x\alpha}(0, 0) \cdot x \cdot \alpha + \frac{1}{6} F_{xxx}(0, 0) \cdot x^3 + O(x^4, \alpha^2)$$

**Beispiel 3.9**  $F(x, \alpha) = x^3 - x\alpha$

stationäre Punkte:  $x_1^*(\alpha) = 0$

noch zu lösen:  $x^2 - \alpha = 0$

$\alpha = 0$ : genau ein stationärer Punkt

$\alpha < 0$ : keine weiteren stationären Punkte

$\alpha > 0$ : zwei weitere stationäre Punkte:  $x_{2,3}^*(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha}$

$\Rightarrow$  Für  $\alpha \leq 0$  ist  $x_1^*$  instabil. Für  $\alpha > 0$  ist  $x_1^*$  stabil,  $x_{2,3}^*$  instabil.

Zusammengefasst: Es spalten sich zwei neue stationäre Punkte ab, und es findet ein Wechsel in der Stabilität des alten stationären Punktes statt. Dies ist die Normalform der Heugabelbifurkation, das Bifurkationsdiagramm ist in Abb. 3.7 gezeigt.

**Satz 3.7** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $0 \in D, E$  und  $F : D \times E \rightarrow \mathbb{R}$  dreimal stetig differenzierbar. Desweiteren sollen die Beziehungen

$$\begin{aligned} F(0, \alpha) &= 0 & \text{für alle } \alpha \in E & & F_{\alpha x}(0, 0) &\neq 0 \\ F_x(0, 0) &= 0 & & & F_{xxx}(0, 0) &\neq 0 \\ F_{xx}(0, 0) &= 0 & & & & \end{aligned}$$

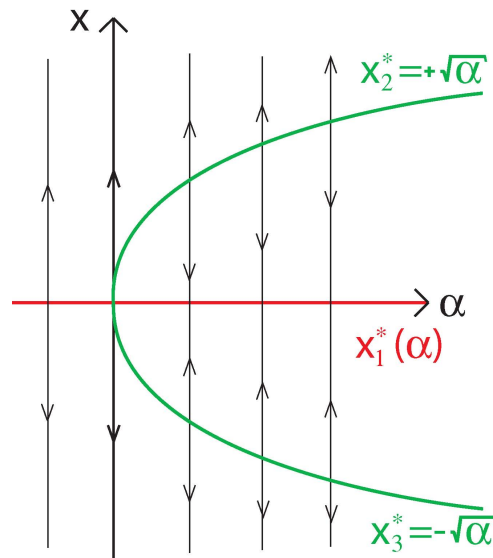


Abbildung 3.7: Bifurkationsdiagramm der Normalform der Heugabel-Bifurkation

erfüllt sein.

Dann gibt es Umgebungen  $U, V$  von  $0$  und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $h : U \rightarrow V$  mit  $h(0) = 0$  und  $F(x, h(x)) = 0$  für alle  $x \in U$ . Diese Funktion erfüllt auch die folgenden Bedingungen:

1. Es gilt  $\{(x, \alpha) \in U \times V : F(x, \alpha) = 0\} = (\{0\} \times V) \cup \{(x, h(x)) : x \in U\}$
2.  $h$  hat in  $0$  ein strenges Extremum. Also gilt  $h'(0) = 0$ , und desweiteren

$$h''(0) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{F_{xxx}(0,0)}{F_{\alpha x}(0,0)} \neq 0.$$

3. Für  $\alpha = 0$  ist der stationäre Punkt  $x^* = 0$  asymptotisch stabil bzw. instabil, je nachdem, ob  $F_{xxx}(0,0) < 0$  oder  $> 0$  ist.
4. Für jedes  $\alpha \in V \setminus h(U)$  gibt es nur den stationären Punkt  $x^* = 0$  in  $U$ .
5. Für  $\alpha \in h(U) \setminus \{0\}$  gibt es drei stationäre Punkte:  $x_-^* < x^* = 0 < x_+^*$  in  $U$ . Dabei sind  $x_-^*$  und  $x_+^*$  asymptotisch stabil, wenn  $x^*$  instabil ist, und umgekehrt.

$x^*$  ist asymptotisch stabil für  $\alpha < 0$  und instabil für  $\alpha > 0$  genau dann, wenn  $F_{\alpha x}(0,0) > 0$ .

Für  $F_{\alpha x}(0,0) < 0$  ist  $x^*$  instabil für  $\alpha < 0$  und asymptotisch stabil für  $\alpha > 0$ .

**Beispiel 3.10** Zurück zu Bsp. 3.9:

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 & F_{\alpha x}(0,0) &= -1 \\ h''(0) &= 2 & F_{xxx}(0,0) &= 6 \end{aligned}$$

Stabilität hatten wir schon diskutiert.

### 3.5 Die Hopf-Bifurkation

**Anmerkung** *historisch gesehen, wurde diese Bifurkation mehrfach entdeckt:*

- ) Poincaré Anfang 20. Jahrhundert
- ) 1929 Andronov - erstmals Satz formuliert und bewiesen
- ) 1942 Hopf - unabhängig publiziert

Wir bleiben weiter bei der Situation, dass durch einen stationären Punkt  $(x, \alpha) = (0, 0)$  eine einparametrische Schar  $(g(\alpha), \alpha)$  von stationären Punkten geht. Bis jetzt haben wir eindimensionale Differentialgleichungen betrachtet. Stabilität der stationären Punkte  $(0, \alpha)$  (o.B.d.A.) ergibt sich aus einer Zahl,  $F_x(0, \alpha)$ . Die Bedingungen  $F_x(0, 0) = 0$  und  $F_{\alpha x}(0, 0) \neq 0$  bedeuten gerade, dass das Vorzeichen von  $F_x(0, \alpha)$  in einer Umgebung von  $\alpha = 0$  wechselt und somit findet ein Stabilitätswechsel statt. Ein ähnliches Bild findet man für höherdimensionale Systeme von Differentialgleichungen, wenn ein reeller Eigenwert der Jacobimatrix  $F_x(0, \alpha)$  das Vorzeichen in einer Umgebung von  $\alpha = 0$  wechselt.

Es gibt eine weitere Möglichkeit, die zu einem Stabilitätswechsel führt: Es kann ein Paar von konjugiert komplexen Eigenwerten mit nicht verschwindendem Imaginärteil das Vorzeichen des Realteils in einer Umgebung von  $\alpha = 0$  wechseln. Dabei bleibt die Jacobimatrix  $F_x(0, 0)$  invertierbar und der stationäre Punkt ist für alle  $\alpha$  aus einer Umgebung von 0 nach dem *Satz über die implizite Funktion* (siehe Anhang) eindeutig.

⇒ In welchem Sinne (außer dem Stabilitätswechsel) gibt es dann eine „Verzweigung“?

**Beispiel 3.11** *Erinnerung: Verallgemeinerung von Bsp. 2.11:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x + y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

In Bsp. 2.11 hatten wir  $\alpha = 1$ , ähnliches Verhalten wie in Abb. 2.20 für alle  $\alpha > 0$ . Für  $\alpha < 0$  verschwinden die Zyklen und  $(0, 0)$  ist asymptotisch stabiler stationärer Punkt, siehe Abb. 3.8.

Den Stabilitätswechsel sieht man an der Jacobimatrix (Differentiation bezüglich  $x, y$ ):

$$F'(0, 0, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$  lösen  $\det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 1 \\ -1 & \alpha - \lambda \end{pmatrix} = 0$ , d.h.:

$$(\alpha - \lambda)^2 + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \alpha.$$

Dies ist (eine) die Normalform der Hopf-Bifurkation.

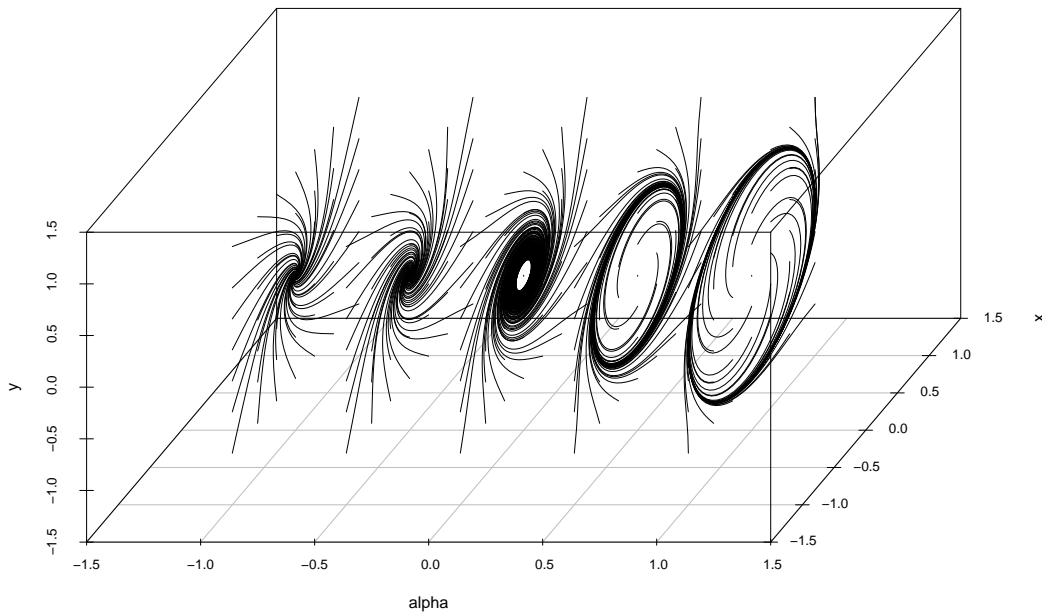


Abbildung 3.8: Simulation und Bifurkationsdiagramm der Normalform der Hopf-Bifurkation (siehe Gleichung (3.8))

Im folgenden betrachten wir rechte Seiten  $F$  der Form:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \alpha\right) = \begin{pmatrix} \mu(\alpha) & v(\alpha) \\ -v(\alpha) & \mu(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \alpha) \\ g(x, y, \alpha) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Vorraussetzungen:

$$f(0, 0, \alpha) = g(0, 0, \alpha) = 0 \quad (\text{somit } (0, 0) \text{ stationär für alle } \alpha)$$

$$f_x(0, 0, \alpha) = f_y(0, 0, \alpha) = g_x(0, 0, \alpha) = g_y(0, 0, \alpha) = 0$$

$$(\text{somit ist } \begin{pmatrix} \mu(\alpha) & v(\alpha) \\ -v(\alpha) & \mu(\alpha) \end{pmatrix} \text{ die Jacobimatrix von } F \text{ in } (0, 0))$$

Stabilitätswechsel:

$$\mu(0) = 0 \quad v(0) \neq 0 \quad \mu'(0) \neq 0$$

Für die Formulierung des Satzes benötigen wir noch zwei komplizierte Ausdrücke in den Ableitungen. Wir setzen als Abkürzungen:

$$f_{ij} := \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0, 0), \quad g_{ij} := \frac{\partial^{i+j} g}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0, 0) \quad \text{für } i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Damit fixieren wir zwei Konstanten  $\sigma_2, \sigma_3$ :

$$\sigma_2 = f_{02}g_{02} - f_{20}g_{20} + f_{11}(f_{20} + f_{02}) - g_{11}(g_{20} + g_{02})$$

$$\sigma_3 = f_{30} + f_{12} + g_{21} + g_{03}$$

**Satz 3.8 (Hopf-Theorem, ohne Beweis)** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}$  offen und  $F : D \times E \rightarrow \mathbb{R}^2$  dreimal stetig differenzierbar sowie in der Form wie in Gleichung (3.9) gegeben. Es gelte weiterhin:

$$\begin{aligned} f(0,0,\alpha) &= g(0,0,\alpha) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in E \\ f_x(0,0,\alpha) &= f_y(0,0,\alpha) = g_x(0,0,\alpha) = g_y(0,0,\alpha) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in E \\ \mu(0) &= 0 \\ \nu(0) &\neq 0 \\ \mu'(0) &\neq 0 \\ \frac{\sigma_2}{\nu(0)} + \sigma_3 &\neq 0. \end{aligned}$$

Unter diesen Bedingungen gibt es eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  von  $(0,0)$  und eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}$  von 0 derart, dass gilt:

1.  $\{(x,y,\alpha) \in U \times V : F(x,y,\alpha) = (0,0)\} = \{(0,0,\alpha) : \alpha \in V\}$
2. Falls  $\mu'(0) > 0$ , dann ist der stationäre Punkt  $x^* = (0,0)$  für  $\alpha < 0$  asymptotisch stabil und für  $\alpha > 0$  instabil. Falls  $\mu'(0) < 0$ , dann umgekehrt.
3. Für  $\alpha = 0$  ist  $x^*$  asymptotisch stabil bzw. instabil genau dann, wenn  $\frac{\sigma_2}{\nu(0)} + \sigma_3 < 0$  bzw.  $> 0$ .
4. Im Fall  $(\frac{\sigma_2}{\nu(0)} + \sigma_3) \cdot \mu'(0) > 0$  gibt es für jedes  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \in V$  keine periodische Lösung in  $U$  und für  $\alpha < 0$ ,  $\alpha \in V$  genau eine periodische Lösung in  $U$ . Diese umschließt  $(0,0)$  und besitzt eine Periode  $\tau(\alpha)$  mit einer stetigen Funktion  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\tau(0) = \frac{2\pi}{|\nu(0)|}$ . Die periodische Lösung ist attraktiv für  $\mu'(0) < 0$  und repulsiv für  $\mu'(0) > 0$ .
5. Im Fall  $(\frac{\sigma_2}{\nu(0)} + \sigma_3) \cdot \mu'(0) < 0$  gibt es für jedes  $\alpha \leq 0$ ,  $\alpha \in V$  keine periodische Lösung in  $U$  und für  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in V$  genau eine periodische Lösung in  $U$ . Diese umschließt  $(0,0)$  und besitzt eine Periode  $\tau(\alpha)$  mit einer stetigen Funktion  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\tau(0) = \frac{2\pi}{|\nu(0)|}$ . Die periodische Lösung ist attraktiv für  $\mu'(0) > 0$  und repulsiv für  $\mu'(0) < 0$ . ■

### Anmerkungen

- ) Anschaulich: vom stationären Punkt zweigt eine periodische Lösung ab, welche die Stabilität des stationären Punktes “erbt“. Der stationäre Punkt wechselt die Stabilität
- ) Praktisch wichtig: Aussage über die Periode.
- ) Neben Poincaré-Bendixson ist dies die einzige Methode, um Existenz periodischer Lösungen zu zeigen (vor allem ab  $k \geq 3$ ).

**Beispiel 3.12** Wir berechnen die Parameter bzw. die Form wie in Gleichung (3.9):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x + y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y - x - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Dadurch gilt  $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ .

Damit müssen wir  $\mu(\alpha) = \alpha$  und  $\nu(\alpha) = 1$  setzen. Folglich gilt  $\mu(0) = 0$ ,  $\mu'(0) = 1 \neq 0$ ,  $\nu(0) = 1 \neq 0$ .

Zu den  $\sigma$ -Termen:

Es gilt  $\sigma_2 = 0$ , da alle Ableitungswerte in  $\sigma_2$  null sind, weil  $x(x^2 + y^2)$  und  $y(x^2 + y^2)$  jeweils aus Monomen vom Grad (genau) 3 besteht und  $\sigma_2$  nur Ableitungen der Ordnung (genau) 2 enthält. Für  $\sigma_3$  finden wir:

$$f_{30} + f_{12} + g_{21} + g_{03} = -6 - 2 - 2 - 6 = -16$$

Damit sind alle Voraussetzungen für den Satz 3.8 erfüllt.

Die Periode der entstehenden Oszillation ist  $\tau(\alpha) \approx 2\pi$  für  $\alpha \approx 0$ .

## 3.6 Der multidimensionale Fall

**Motivation** Wir haben bis jetzt immer Bifurkationen mit minimalen Dimensionen betrachtet:

- ) Sattel-Knoten, transkritische, Heugabel,  $k = 1$ : nur Wechsel in den Orten bzw. Stabilitäten stationärer Punkte,
- ) Hopf,  $k = 2$ : Verzweigung einer periodischen Lösung, deshalb mindestens zweidimensional.

Nun wollen wir wissen, was passiert, wenn diese Art von Bifurkationen in höherdimensionale Systeme eingebettet sind.

Wir betrachten zunächst also  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $F$  lokal Lipschitz-stetig. Die zugehörige Dgl. lautet

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)). \quad (3.10)$$

Für einen stationären Punkt  $x^* \in D$  ist  $F(x^*) = 0$ . O.B.d.A. sei im folgenden  $x^* = 0$ .

Sei  $F$  in  $x^*$  differenzierbar mit der Jacobimatrix  $F'(x^*)$ . In einer geeigneten Basis hat  $F'(x^*)$  Block-Diagonalform:

$$F'(x^*) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \} k_0 \text{ Komponenten} \\ \} k_{\pm} \text{ Komponenten} \end{matrix}$$

mit  $k_0 + k_{\pm} = k$ . Dies folgt aus der Jordan-Zerlegung.

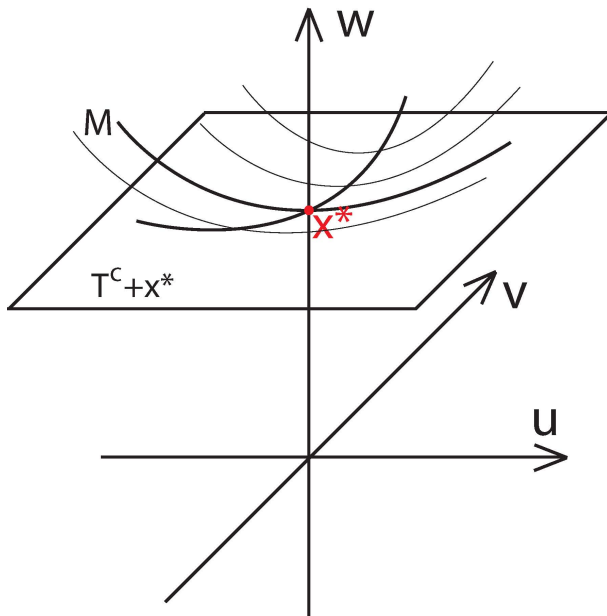
Wir können dabei erreichen, dass alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $B$   $\operatorname{Re}\lambda = 0$  und alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $C$   $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$  erfüllen. Ist die entsprechende Basis  $e_1, \dots, e_k$ , dann heißt  $T^c = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{k_0}\}$  der *kritischer Eigenraum* von  $F'(x^*)$ .

**Satz 3.9** *Mit den vorigen Bezeichnungen gibt es eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^{k_0}$  des Nullvektors und eine Funktion  $H : U \rightarrow \mathbb{R}^{k_{\pm}}$ , so dass*

1.  $H$  differenzierbar ist mit  $H(0) = 0, H'(0) = 0$ ,
2. die Menge  $M = \{(y, H(y)) : y \in U\} \subset D$  ist, sowie
3.  $M$  lokal invariant unter der Gleichung (3.10) ist. Das heißt für alle  $x \in M$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\varphi_t(x) \in M$  für alle  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

**Anmerkungen**

–)  $M$  ist eine Art Oberfläche in  $\mathbb{R}^k$ .



–) Speziell in  $\mathbb{R}^3$  und  $k_{\pm} = 1$ :  $M = \{(u, v, H(u, v)) : (u, v) \in U\}$  mit  $U \subset \mathbb{R}^2$   
 Beispiel: Teil der Kugeloberfläche  $= \{(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) : u^2 + v^2 < 1\}$ .

–)  $H$  definiert die Fläche  $M$ .  $M$  heißt *Zentrumsmannigfaltigkeit*.

–)  $H'(0) = 0$  heißt, dass die *Zentrumsmannigfaltigkeit* in  $0$  tangential in Richtung von  $T^c$  liegt.

–) Mit den Komponenten  $F_0, F_{\pm}$  von  $F$  findet man

$$H'(y)F_0(y, H(y)) = F_{\pm}(y, H(y)).$$

Dies ist im Allgemeinen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, also schwerer zu lösen als die Ausgangsgleichung.

–) Die Zentrumsmannigfaltigkeit ist nicht eindeutig, vgl. Bsp. 3.13.

### Beispiel 3.13

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u^2 \\ \frac{dv}{dt} &= -v \\ F' \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der kritische Eigenraum ergibt sich zu

$$T^c = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine Variante:  $M = T^c$  (mit  $H(u) = 0$ )

$$\text{Weitere Varianten: } H(u) = \begin{cases} \beta \cdot e^{\frac{1}{u}} & u < 0 \\ 0 & u \geq 0 \end{cases}$$

Die erste Variante ergibt sich für  $\beta = 0$ .

Diese Formel für  $H(u)$  kann aus der Dgl.  $H'(u)F_0 = -F_1$  hergeleitet werden mit den zusätzlichen Bedingungen  $H(0) = H'(0) = 0$ . Es folgt  $H'(u)u^2 = -H(u)$  und eine Lösung ist mit der Methode der Trennung der Veränderlichen möglich.

Die Darstellung findet sich in Abb. 3.9.

### Wie wirkt sich die Zentrumsmannigfaltigkeit auf das qualitative Verhalten des durch Gleichung (3.10) gegebenen dynamischen Systems aus?

Dazu betrachten wir die Differentialgleichung in der Basisdarstellung von  $e_1, \dots, e_k$ . Dann haben wir zwei Komponenten:  $u : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^{k_0}$ ,  $v : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^{k_{\pm}}$ , welche

$$\frac{du}{dt} = B \cdot u + g(u, v) \tag{3.11}$$

$$\frac{dv}{dt} = C \cdot v + h(u, v) \tag{3.12}$$

erfüllen.

O.B.d.A. sei  $x^* = (0, 0)$ , d.h.  $g(0, 0) = 0$ ,  $h(0, 0) = 0$ ,  $g'(0, 0) = 0$ ,  $h'(0, 0) = 0$ .



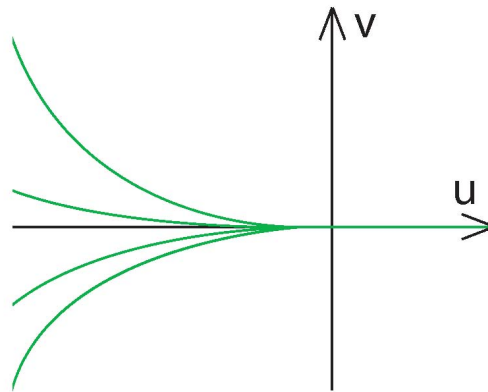


Abbildung 3.9: Zentrumsmannigfaltigkeiten in Bsp. 3.13

**Satz 3.10** Sei  $M$  eine Zentrumsmannigfaltigkeit für Gleichung (3.11), (3.12) mit Funktion  $H$  und Umgebung  $U$ . Dann gibt es eine Umgebung  $V$  von  $(0,0) \in \mathbb{R}^{k_0} \times \mathbb{R}^{k_{\pm}}$ , sodass das dynamische System zur Dgl. (3.11), (3.12) in  $U$  topologisch äquivalent zu dem in  $V$  von

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= B \cdot u + g(u, H(u)) \\ \frac{dv}{dt} &= C \cdot v\end{aligned}$$

erzeugtem dynamischen System ist.

### Anmerkungen

- )  $u, v$  sind unabhängig voneinander,  $v$  erfüllt lineare Differentialgleichung.
- ) Kritisches Verhalten passiert nur auf der Zentrumsmannigfaltigkeit, die meist niedrigdimensional ist.

### Wie behandelt man parametrisierte Differentialgleichungen?

Man ergänzt weitere Differentialgleichungen, siehe Gleichung (3.3):

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \alpha) \tag{3.13}$$

mit  $x : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  wird erweitert in die Form

$$\frac{dy}{dt} = G(y) \tag{3.14}$$

mit  $y : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^{k+p}$ .

Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x, \alpha) \\ &\vdots \\ \frac{dx_k}{dt} &= F_k(x, \alpha) \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d\alpha_p}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten  $x^*, \alpha^*$  mit  $F(x^*, \alpha^*) = 0$ . Somit ist  $y^* = (x^*, \alpha^*)$  stationärer Punkt von Dgl. (3.14):

$$G'(y^*) = \begin{pmatrix} F_x(x^*, \alpha^*) & F_\alpha(x^*, \alpha^*) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir diskutieren die Eigenwerte von  $G'(y^*)$ :

$$0 = \det(G'(y^*) - \lambda \cdot \text{Id}) = (-\lambda)^p \cdot \det(F_x(x^*, \alpha^*) - \lambda \cdot \text{Id})$$

Das heißt,  $\lambda = 0$  ist mindestens  $p$ -facher Eigenwert. Alle Eigenwerte von  $F_x(x^*, \alpha^*)$  sind auch in gleicher Vielfachheit zusätzlich Eigenwerte von  $G'(y^*)$ . Da die letzten  $p$  Zeilen von  $G'(y^*)$  null sind, gilt  $\text{rang}(G'(y^*)) \leq k$ . Der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda = 0$  hat somit eine Dimension mindestens  $p$ . Insgesamt hat  $G'(y^*)$  dann  $p + q$  Eigenwerte  $\lambda$  mit  $\text{Re } \lambda = 0$  ( $q \geq 0$ ). Im allgemeinen gilt bei Bifurkationen  $q \geq 1$ .

Nach Satz 3.9 existiert eine Zentrumsmannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^{k+p}$  der Dimension  $p + q$ , falls  $q$  Eigenwerte von  $F_x(x^*, \alpha^*)$  Realteil null haben. Für jedes  $\alpha$  aus der vom Satz gegebenen Umgebung können wir die Menge

$$M_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^k : (x, \alpha) \in M\}$$

betrachten. Diese Mengen sind wieder lokal invariant für das System (3.13). Satz 3.10 gibt uns eine Zerlegung von  $\mathbb{R}^{k+p}$  in zwei Komponenten  $u, v$  und ein topologisch äquivalentes System

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= B \cdot u + g(u, H(u)) \\ \frac{dv}{dt} &= C \cdot v. \end{aligned}$$

Alle  $\alpha$ -Komponenten gehören zum  $u$ -Teil. Damit ist das System (3.14) topologisch äquivalent zu einem System der Form

$$\begin{aligned}\frac{du_1(t)}{dt} &= \tilde{B} \cdot u_1 + \tilde{g}(u_1, u_2, \tilde{H}(u_1, u_2)) \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dv(t)}{dt} &= C \cdot v,\end{aligned}$$

welches zu einer „minimalen“ Bifurkation gehört. ( $q = 1$  oder  $q = 2$  für die behandelten Bifurkationen).

**Zusammengefasst:** Es reicht im Wesentlichen aus, sich auf die kritischen Eigenwerte und Eigenräume zu beschränken.

Das heißt:

1. Ein stationärer Punkt taucht aus dem „Nichts“ auf  $\Rightarrow$  *Sattel-Knoten-Bifurkation*
2. Zwei stationäre Punkte kreuzen sich  $\Rightarrow$  *transkritische Bifurkation*
3. Aus einem stationären Punkte entstehen zwei weitere  $\Rightarrow$  *Heugabel-Bifurkation*
4. Zwei rein imaginäre Eigenwerte der Jacobimatrix  $\Rightarrow$  *Hopf-Bifurkation*

**Beispiel 3.14** *Sattel-Knoten-Bifurkation im  $\mathbb{R}^2$ ,  $p = 1$ ,  $k = 2$ ,  $q = 1$*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha - x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y \\ \frac{d\alpha}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{3.15}$$

(3.16)

Die Simulation ist in Abb. 3.10 gezeigt.

**Beispiel 3.15** *Wir betrachten wieder die SIR-Endemie aus Bsp. 2.6, diesmal in der dimensionslosen Form. Das heißt, die Variablen sind*

$$\begin{aligned}u &= \frac{S}{N} && \text{Anteil der Suszeptiblen} \\ v &= \frac{I}{N} && \text{Anteil der Infektiösen} \\ w &= \frac{R}{N} && \text{Anteil der Resistenten (Immunen)}\end{aligned}$$

Laut Modell gilt also  $0 \leq u, v, w \leq 1$  und  $u + v + w = 1$ .

Als Differentialgleichungen erhält man mit  $r_0 = \frac{\beta N}{\gamma + b}$  (die rechte Seite wird noch durch  $\gamma + b$

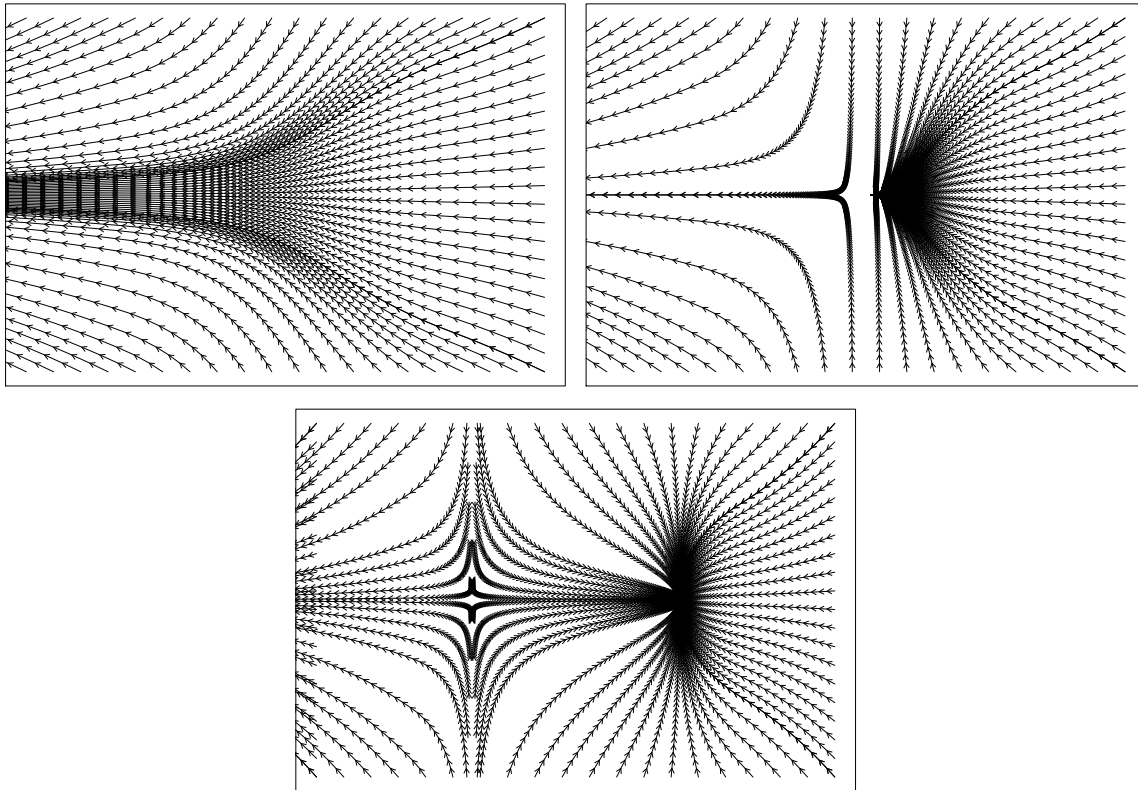


Abbildung 3.10: Simulation an der Sattel-Knoten-Bifurkation in  $\mathbb{R}^2$ , Gleichung (3.15): für  $\alpha < 0$  (oben links),  $\alpha = 0$  (oben rechts),  $\alpha > 0$  (unten)

dividiert, was einer Streckung der Zeitachse entspricht):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{b}{\gamma+b} \cdot (1-u) - r_0 \cdot u \cdot v \\ \frac{dv}{dt} &= (r_0 \cdot u - 1) \cdot v \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\gamma}{\gamma+b} \cdot v - \frac{b}{\gamma+b} \cdot w \end{aligned}$$

Wir betrachten diese Differentialgleichung für beliebiges  $u, v, w$  mit  $u + v + w = 1$ . Wir können die Dgl. für  $w$  weglassen, da die Dgln. für  $u$  und  $v$  nicht von  $w$  abhängen und  $w = 1 - u - v$  ist. Zunächst ermitteln wir die stationären Punkte:

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{r_0}, & v_1^* &= \frac{b}{\gamma+b} \left(1 - \frac{1}{r_0}\right), \\ u_2^* &= 1, & v_2^* &= 0. \end{aligned}$$

Für  $r_0 = 1$  fallen die stationären Punkte zusammen. Wenn wir  $r_0$  variieren, splitten sich diese stationären Punkte auf. Dies ist das typische Verhalten bei einer transkritischen Bifurkation. Beim Wechsel von  $r_0 < 1$  zu  $r_0 > 1$  kommt es zu einem Wechsel in der Stabilität der stationären Punkte:  $(u_2^*, v_2^*)$  wird instabil und  $(u_1^*, v_1^*)$  wird asymptotisch stabil, vgl. Abb. 3.11.

Sinnvoll sind nur Punkte  $\{(u, v) : u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$ . Bei Einschränkung auf diese Teilmenge geht für  $r_0 < 1$  ( $u_1^*, v_1^*$ ) verloren.

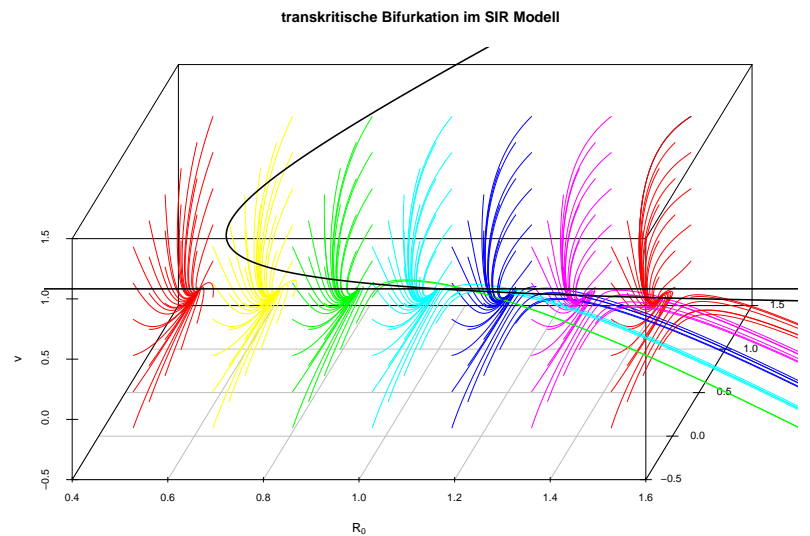
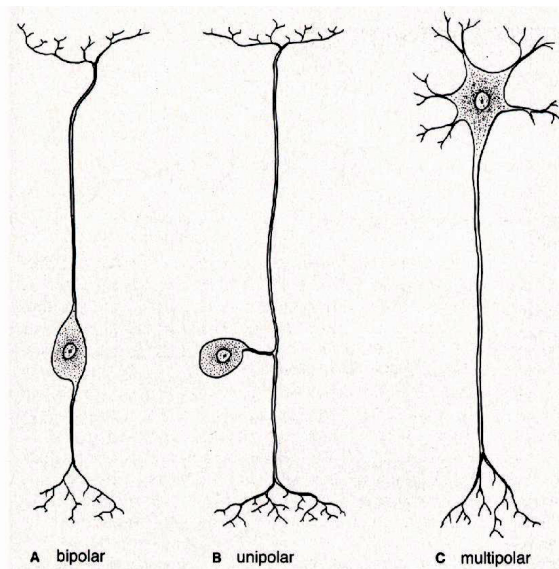


Abbildung 3.11: transkritische Bifurkation im SIR-Modell

### 3.7 Modellierung neuronaler Erregung

**Ziel:** Beschreibung des zeitlichen Verlaufs elektrischer Potentiale in Nervenzellen.



Diese Potentiale werden im Wesentlichen durch  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $Cl^-$ -Ionen erzeugt. Unterschiede in

den Konzentrationen werden durch Ionenkanäle aufrechterhalten. Zeitlich veränderlich bekommen wir dadurch einen Strom von Ladungen in die Zelle. Dieser Strom wird durch den Ladungszustand der Zelle gesteuert.

**Zustrom:**

$$I_i = I_{Na} + I_K + I_R = \alpha_1 \cdot m^3 \cdot h(v - v_{Na}) + \alpha_2 \cdot n^4 \cdot (v - v_K) + \alpha_3 \cdot (v - v_R)$$

Ansatz von Hodgkin und Huxley (1952) (aus experimentellen Daten gefittet):

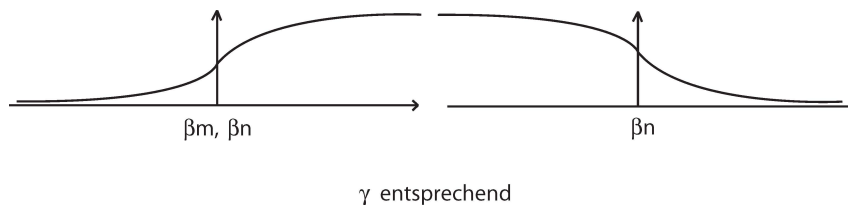
$m, n, h$  sind Funktionen, die Differentialgleichungen des Types:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \beta_m(v)(1 - m) - \gamma_m(v) \cdot m \\ \frac{dn}{dt} &= \beta_n(v)(1 - n) - \gamma_n(v) \cdot n \\ \frac{dh}{dt} &= \beta_h(v)(1 - h) - \gamma_h(v) \cdot h \end{aligned}$$

lösen.

⇒ Typischerweise gilt:  $0 \leq m, n, h \leq 1$

⇒  $\beta$  und  $\gamma$  sind Funktionen vom sigmoidalen Typ, die fixiert werden.



Für die **Spannung**  $V$  erhält man:

$$c \cdot \frac{dv}{dt} = -\alpha_1 \cdot m^3 \cdot h(v - v_{Na}) - \alpha_2 \cdot n^4 \cdot (v - v_K) - \alpha_3 \cdot (v - v_R) + I_a$$

Eine Vereinfachung des Hodgkin-Huxley-Modells wurde von Fitzhugh entwickelt:

Wir fassen  $m, n, h$  zu  $w$  zusammen.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= v(a - v)(v - 1) - w + I_a & 0 < a < 1, & \quad I_a : \text{Anregungsstrom} \\ \frac{dw}{dt} &= bv - cw & b, c > 0 & \end{aligned}$$

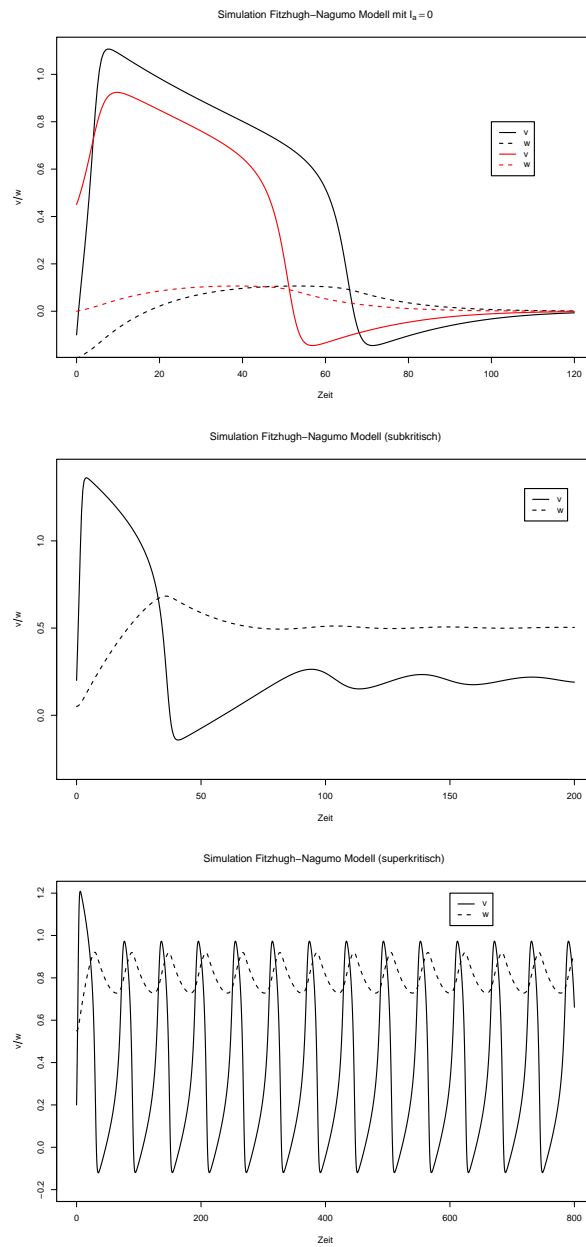


Abbildung 3.12: Simulationen des Fitzhugh-Nagumo-Modells

Es gibt ein Experiment, das diese Dynamik nachvollzieht (Nagumo), deshalb heißt es *Fitzhugh-Nagumo-Modell*. Eine Simulation sieht man in Abb. 3.12.

Wir führen nun eine Phasenraum-Diskussion dieses Modelles durch. Zunächst betrachten wir den Fall  $I_a = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= v(a-v)(v-1) - w \\ \frac{dw}{dt} &= bv - cw \end{aligned}$$

Das Phasenportrait ist in Abb. 3.13 veranschaulicht.

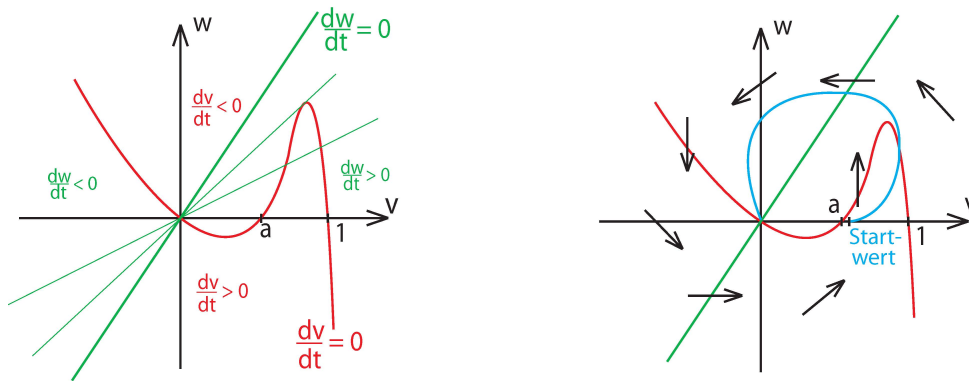


Abbildung 3.13: Phasenportrait des Fitzhugh-Nagumo-Modells für  $I_a = 0$

$$bv - cw = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = d \cdot v \quad \text{mit} \quad d = \frac{b}{c}$$

Jeder Schnittpunkt der Isoklinen ist ein stationärer Punkt (und umgekehrt).

Je nach Größe von  $d$  gibt es 1, 2 oder 3 stationäre Punkte.

Für  $I_a > 0$  kann man ähnlich diskutieren, siehe Abb. 3.14.

**Stationäre Punkte:**

$$\begin{aligned} v^*(a - v^*)(v^* - 1) - w^* + I_a &= 0 \\ dv^* - w^* &= 0 \\ v^*(a - v^*)(v^* - 1) - dv^* + I_a &= 0 \end{aligned}$$

⇒ Es gibt höchstens 3 und mindestens 1 stationären Punkt.

**Jacobi-Matrix:**  $f(v) := v(v - a)(1 - v)$

$$F' \left( \begin{pmatrix} v^* \\ w^* \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f'(v^*) & -1 \\ b & -c \end{pmatrix}$$



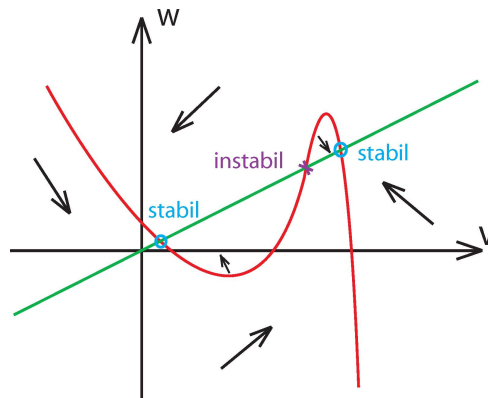


Abbildung 3.14: Phasenportrait des Fitzhugh-Nagumo-Modells für  $I_a > 0$

**Identifikation von Bifurkationen:** Wir suchen Punkte, wo nichttriviale kritische Eigenräume existieren.

**Eigenwert 0:**

$$\det(F'(v^*, w^*) - \lambda \cdot \text{Id}) = \det \begin{pmatrix} f'(v^*) - \lambda & -1 \\ b & -c - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow f'(v^*)(-c) = -b$$

$$f'(v^*) = d$$

$$f'(v^*) - d = (f(v^*) - d \cdot v + I_a)'$$

$\Rightarrow v^*$  ist Nullstelle von  $v \mapsto f(v) - dv + I_a$  und  $v \mapsto (f(v) - dv + I_a)'$ . Dann ist  $v^*$  eine doppelte Nullstelle.  $v^*$  ist nicht Nullstelle von  $v \mapsto (f(v) - dv + I_a)''$ .

$\Rightarrow$  Hier findet eine *Sattel-Knoten-Bifurkation* statt.

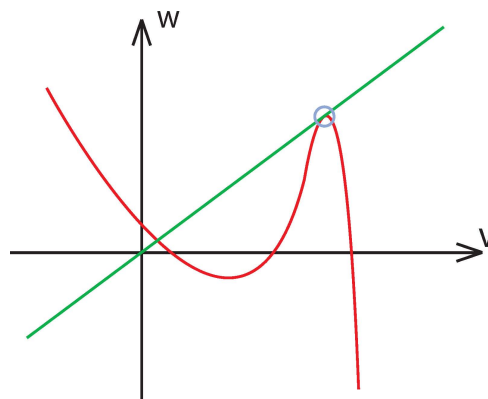


Abbildung 3.15: Sattel-Knoten-Bifurkation im Fitzhugh-Nagumo-Modell

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda = 0, \operatorname{Im}\lambda \neq 0 \quad \lambda = i\mu \\ (f'(v^*) - i\mu)(-c - i\mu) + b = 0 \\ f'(v^*)(-c) - \mu^2 + b + i\mu(c - f'(v^*)) = 0 \end{aligned}$$

Es muss Real- und Imaginärteil null sein.

$$\begin{aligned} \text{Imaginärteil:} \quad c = f'(v^*) = -3v^2 + 2(a+1)v - a \\ \Rightarrow v_{1,2}^* = \frac{a+1}{3} \pm \sqrt{\frac{(a+1)^2}{9} - \frac{a+c}{3}} \\ \text{Realteil:} \quad f'(v^*)(-c) - \mu^2 + b = 0 \\ b - c^2 = \mu^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Für genügend großes  $b$  und kleines  $c$  sowie einem positivem obigen Radikanden existiert ein Paar rein imaginärer Eigenwerte.

Wann hat  $v^*$  die speziellen Werte?:

$$\begin{aligned} f(v^*) - dv^* + I_a = 0 \\ I_1 = -f(v_1^*) + dv_1^* \quad v_1^* < v_2^* \\ I_2 = -f(v_2^*) + dv_2^* \quad \Rightarrow I_2 > I_1 \end{aligned}$$

Zwei kritische Werte von  $I_a$ , an denen *Hopf-Bifurkation* stattfindet.

$I_a$  als Steuerparameter definiert drei Bereiche (o.B.d.A.  $I_1 < I_2$ ):

$$\begin{aligned} I_a \leq I_1 \quad & \text{keine Oszillation} \\ I_1 < I_a < I_2 \quad & \text{Oszillation (periodische Lösung)} \Rightarrow \text{Grundlage für wesentliche Phänomene} \\ & \Rightarrow \text{Signalübertragung an Nachbarzellen.} \\ I_a \geq I_2 \quad & \text{keine Oszillation} \end{aligned}$$

# Kapitel 4

## Verzögerte Differentialgleichungen

### 4.1 Einige Beispiele

**Beispiel 4.1** Gegeben eine Population mit

- $N(t)$  Populationsdichte
- $b$  Geburtenrate
- $d$  Sterberate
- $\tau$  Verzögerung (Zeit, die der Keim braucht um ein Individuum zu werden.)

$$\frac{dN(t)}{dt} = \underbrace{-d \cdot N(t)}_{\text{Sterbeanteil}} + \underbrace{b \cdot N(t - \tau)}_{\text{Geburtsanteil}}$$

$\Rightarrow$  Es gibt für großes  $\tau$  periodische Lösungen.

**Beispiel 4.2** Eine verzögerte logistische Gleichung:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K}\right)}_{\text{Ressourcen, die zur Fortpflanzung zur Verfügung stehen}}$$

**Beispiel 4.3** Selbstregulation eines Proteins:

- $p(t)$  Konzentration des Proteins
- $m(t)$  Konzentration der mRNA (messenger RNA)

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \beta \cdot m(t - \tau_1) - \gamma \cdot p(t) \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{r}{\mu + p(t - \tau_2)} - \alpha \cdot m(t)\end{aligned}$$

## 4.2 Definition und grundlegende Eigenschaften

**Definition 4.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $F : D^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ . Dann ist die zugehörige verzögerte Differentialgleichung mit Verzögerungen  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$  gegeben durch

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)). \quad (4.1)$$

**Frage:** Wie formuliert man ein Anfangswertproblem für die Differentialgleichung (4.1) richtig? Gibt es dann Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen?

$\Rightarrow$  Es reicht offensichtlich nicht aus,  $x(0)$  zu fixieren: Um  $\frac{dx(t)}{dt}$  aus Gleichung (4.1) für alle  $t \in [0, \tau_m]$  zu bestimmen, müssen wir alle Werte  $x(t)$ ,  $t \in [-\tau_m, 0]$  kennen.

**Satz 4.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $F : D^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz-stetig,  $0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$  fest und  $\zeta \in C([-\tau_m, 0], D)$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und genau eine Funktion  $x : [-\tau_m, \varepsilon] \rightarrow D$ , welche im Intervall  $[0, \varepsilon]$  differenzierbar ist, sowie die Gleichung (4.1) für alle  $t \in [0, \varepsilon]$  und  $x(s) = \zeta(s)$  für alle  $s \in [-\tau_m, 0]$  erfüllt.

*Beweis:* (Idee)

Wenn  $0 \leq t \leq \tau_1$ , dann gilt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), \zeta(t - \tau_1), \dots, \zeta(t - \tau_m))$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung (i.a. nicht autonom) für  $x$ . Auf diese können wir den Existenz- und Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen anwenden. ■

**NB:**  $C([a, b], D) = \{\zeta : [a, b] \rightarrow D : \zeta \text{ stetig}\}$

### Anmerkungen

1. Genau wie in Satz 2.2 kann man auch Bedingungen angeben, unter denen die Lösung nicht explodiert. Dazu bekommt man nach dem selben Schema wie im Beweis schrittweise

aus der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen eine Lösung von Gleichung (4.1) für alle  $t \geq 0$ . Wir erhalten dann ein dynamisches System  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  auf  $C([-\tau_m, 0], D)$ :

Falls  $x$  die Lösung von Gleichung (4.1) zur Anfangswertbedingung  $\zeta \in C([-\tau_m, 0], D)$  ist, setzt man:

$$\varphi_t(\zeta) = x|_{[t-\tau_m, t]}.$$

2. Es gibt noch kompliziertere Typen von verzögerten Differentialgleichungen, z.B.:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 F(x(t+s))w(s)ds$$

mir vorgegebener Gewichtsfunktion  $w : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Man kumuliert die Beiträge verschiedener Zeitpunkte im Intervall  $[t - \tau, t]$ .

3. Es existieren verschiedene Bezeichnungen:

- ) Delay-Differentialgleichungen (dt.)
- ) delay differential equation (engl.)
- ) retarded functional differential equation (engl.)

### 4.3 Stationäre Punkte und Stabilität

**Definition 4.2**  $x^* \in D$  heißt stationärer Punkt der verzögerten Differentialgleichung (4.1), falls  $x(t) = x^*$  für alle  $t \in [-\tau_m, \infty]$  eine Lösung von Gleichung (4.1) ist.

**Beispiel 4.4** Wie in Bsp. 4.2.

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

$$0 = r \cdot N^* \cdot \left(1 - \frac{N^*}{K}\right) \Rightarrow \begin{matrix} N^* = 0 \\ N^* = K \end{matrix} \quad \text{zwei stationäre Punkte (alle)}$$

$\Rightarrow$  gleiche stationären Punkte wie ohne Verzögerung

#### Anmerkungen

- ) Stationäre Punkte findet man als Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems  $F(x^*, \dots, x^*) = 0$ .
- ) Analog definiert man auch periodische Lösungen.

–) Stabilitätsbegriffe führt man analog zu Abschnitt 2.1 ein, wobei man als Abstand zweier Anfangsbedingungen  $\zeta_1, \zeta_2 \in C([-\tau_m, 0], D)$

$$d(\zeta_1, \zeta_2) = \|\zeta_1 - \zeta_2\|_\infty = \sup_{t \in [-\tau_m, 0]} \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|$$

mit der Euklidischen Norm  $\|\cdot\|$  und der Supremumnorm  $\|\cdot\|_\infty$  verwendet.

**Wie findet man Kriterien für die Stabilität der verzögerten DGL?**

⇒ Die Grundidee ist wieder Linearisierung:

Sei  $x^*$  ein stationärer Punkt von Gleichung (4.1), d.h.  $F(x^*, \dots, x^*) = 0$ .

Wir betrachten  $x(t) = x^* + \varepsilon(t)$ ,  $\varepsilon$  klein, als Lösung von Gleichung (4.1):

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= F(x^* + \varepsilon(t), x^* + \varepsilon(t - \tau_1), \dots, x^* + \varepsilon(t - \tau_m)) \\ \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= F(x^*, \dots, x^*) + F'_0(x^*, \dots, x^*) \cdot \varepsilon(t) + F'_1(x^*, \dots, x^*) \cdot \varepsilon(t - \tau_1) + \dots \\ &\quad + \underbrace{F'_m(x^*, \dots, x^*)}_{\in \mathbb{R}^{k \times k}} \cdot \underbrace{\varepsilon(t - \tau_m)}_{\in \mathbb{R}^k} + O(\|\varepsilon\|^2) \end{aligned}$$

**Anmerkung** Erinnerung:  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  sei (zweimal) differenzierbar. Dann gilt

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_p + h_p) = f(x_1, \dots, x_p) + \sum_{i=1}^p h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p) + O(\|h\|^2)$$

mit  $h = (h_1, \dots, h_p)^\top$ . Dies ist die mehrdimensionale Taylor-Formel.

Wir wenden sie auf  $F : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \dots \times \mathbb{R}^k}_{(m+1)\text{-mal}} \mapsto \mathbb{R}^k$  an.

Wir erwarten, dass Gleichung (4.1) in der Nähe von  $x^*$  das gleiche qualitative Verhalten hat, wie die lineare verzögerte Differentialgleichung

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = F'_0(x^*, \dots, x^*) \cdot \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^k F'_i(x^*, \dots, x^*) \cdot \varepsilon(t - \tau_i) \tag{4.2}$$

**Was ist der Ersatz für die Theorie von Abschnitt 2.3 für Gleichung (4.2)?**

⇒ Wir wollen also zunächst das Verhalten linearer verzögerter Differentialgleichungen

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + \dots + A_k x(t - \tau_m) \tag{4.3}$$

verstehen. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{4.4}$$

hatten wir die allgemeine Lösung  $x(t) = e^{At} \cdot x(0)$  und konnten das Verhalten von  $e^{At} \cdot x(0)$  aus der Jordan-Darstellung von  $A$  ableiten.

Speziell für Eigenvektoren  $x(0)$  von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  gilt

$$\varphi_t(x(0)) = x(t) = e^{\lambda t} \cdot x(0),$$

wenn  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  der Halbfluss ist, der zur Differentialgleichung (4.4) gehört. Entsprechend suchen wir für den Halbfluss  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ , der zur Gleichung (4.3) gehört, Lösungen von  $\varphi_t(\zeta) = e^{\lambda t} \cdot \zeta$ . Dies führt zu folgender Verallgemeinerung.

**Definition 4.3** Eine komplexe Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt Eigenwert der linearen verzögerten Differentialgleichung (4.3), falls ein Vektor  $v \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$  existiert, so dass  $x(t) = e^{\lambda t} \cdot v$  die Gleichung (4.3) löst.

### Anmerkungen

- ) Ist  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ein Eigenwert mit Vektor  $v \in \mathbb{C}^k$ , dann ist auch  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert mit zugehörigem Vektor  $\bar{v}$ .
- ) Es gibt auch die Möglichkeit, verallgemeinerte Eigenvektoren zu definieren (wie sie bei Jordan-Blöcken auftreten).

**Beispiel 4.5** Fortsetzung von Bsp. 4.1:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -d \cdot N(t) + b \cdot N(t - \tau) \quad \tau, b, d > 0 \quad (4.5)$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} N(t) &= c \cdot e^{\lambda t} & c &\neq 0 \\ c\lambda \cdot e^{\lambda t} &\stackrel{!}{=} -dc \cdot e^{\lambda t} + bc \cdot \underbrace{e^{\lambda(t-\tau)}}_{=e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda \tau}} & c &\neq 0, e^{\lambda t} \neq 0 \\ \lambda &= -d + b \cdot e^{-\lambda \tau} \end{aligned}$$

Dies ist eine nichtlineare Gleichung in  $\lambda$ , die im Allgemeinen nicht explizit lösbar ist.

Sei  $f(\lambda) = b \cdot e^{-\lambda \tau} - \lambda - d$ , dann ist  $f$  um jeden Punkt  $z \in \mathbb{C}$  in eine Potenzreihe entwickelbar. Deshalb kann es keine Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  aus Nullstellen von  $f$  geben mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda^*.$$

Es gilt dann  $f(\lambda^*) = 0$  und nach Entwicklung

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= f(\lambda^*) + a_1(\lambda - \lambda^*) + O(|\lambda - \lambda^*|^2) \\ 0 &= f(\lambda_n) = f(\lambda^*) + a_1(\lambda_n - \lambda^*) + O(|\lambda_n - \lambda^*|^2) = a_1(\lambda_n - \lambda^*) + O(|\lambda_n - \lambda^*|^2). \end{aligned}$$

Das geht nur, wenn  $a_1 = 0$ .

Entsprechend könnte man zeigen, dass alle Koeffizienten der Potenzreihe von  $f$  von  $\lambda^*$  verschwinden  $\rightsquigarrow$  Widerspruch (Details siehe Vorlesung „Funktionentheorie“).

Daraus leitet man ab, dass nur abzählbar viele Eigenwerte von Gleichung (4.5) existieren, und diese sich nicht im Endlichen häufen.

Der Ansatz  $\lambda = \alpha + i\beta$  ergibt

$$\begin{aligned}\alpha + i\beta &= -d + b \cdot e^{-(\alpha+i\beta)\tau} = -d + b \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-i\beta\tau} \\ &= -d + b \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot (\cos(\beta\tau) - i \sin(\beta\tau)).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Separation von Real- und Imaginärteil ergibt

$$\alpha = -d + b \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot \cos(\beta\tau) \quad (4.6)$$

$$\beta = -b \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot \sin(\beta\tau). \quad (4.7)$$

$\Rightarrow \beta = 0$  erfüllt immer die zweite Gleichung (4.7). Die erste Gleichung ist dann

$$\alpha = -d + b \cdot e^{-\alpha\tau}. \quad (4.8)$$

Graphisch wird dies in Abb. 4.1 veranschaulicht.

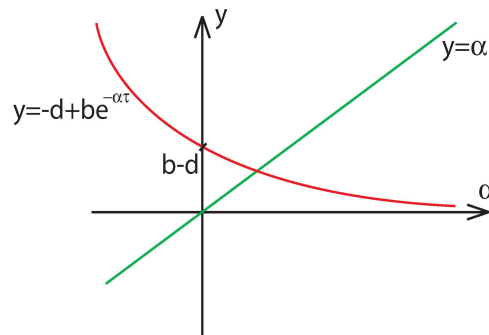


Abbildung 4.1: Zur Lösung von Gleichung (4.8)

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es eine Lösung  $\alpha_0$ , wegen der Monotonie ist diese eindeutig. Es gilt

$$b - d \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_0 \geq 0.$$

Die Bedingung  $b - d \geq 0$  ist mithin gleichbedeutend damit, ob die unverzögerte Differentialgleichung

$$\frac{dN(t)}{dt} = -d \cdot N(t) + b \cdot N(t) = (b - d)N(t)$$

unbeschränkt wächst, konstant bleibt oder gegen null konvergiert (die Population stirbt aus).



Für beliebige Lösungen von Gleichungen (4.6), (4.7) finden wir wegen  $b > 0$  und  $\cos(\beta\tau) \leq 1$ , dass

$$\alpha \leq -d + b \cdot e^{-\alpha\tau}.$$

Dies bedeutet  $\alpha \leq \alpha_0$  und  $'' = ''$  kann nur auftreten, wenn  $\cos(\beta\tau) = 1$ . Daraus folgt  $\sin(\beta\tau) = 0$  und  $\beta = 0$ .

Für beliebige Eigenwerte  $\lambda$  von Gleichung (4.5) gilt also  $\operatorname{Re}\lambda \leq \alpha_0$ , und  $\operatorname{Re}\lambda = \alpha_0$  impliziert  $\lambda = \alpha_0$ .

Das heißt, dass es instabile Lösungen  $e^{\lambda t}$  mit  $\operatorname{Re}\lambda > 0$  nur gibt, wenn  $b > d$ . Wir erhalten auch eine Abschätzung für den Imaginärteil:

Sei  $\alpha \geq \alpha'$ . Dann gilt

$$|\beta| = |-b \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot \sin(\beta\tau)| = b \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot |\sin(\beta\tau)| \leq b \cdot e^{-\alpha'\tau}.$$

Damit liegen alle Lösungen  $(\alpha, \beta)$  von den Gleichungen (4.6), (4.7) mit  $\alpha \geq \alpha'$  in einem beschränkten Bereich. Damit gibt es nur endliche viele Lösungen von den Gleichungen (4.6), (4.7) mit  $\alpha \geq \alpha'$  für jedes feste  $\alpha'$  aus  $\mathbb{R}$ . Graphisch wird dies in Abb. 4.2 gezeigt.

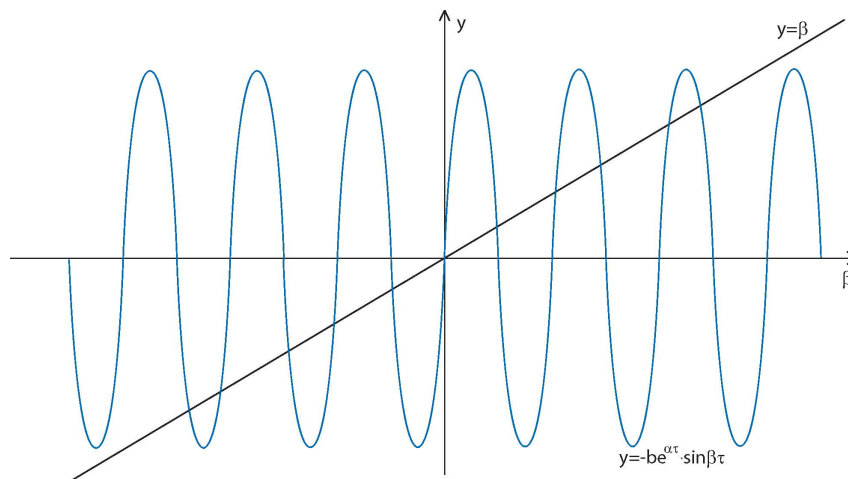


Abbildung 4.2: Zur Lösung von Gleichung (4.7)

$\Rightarrow$  Für kleine  $\alpha$  gibt es mehrere  $\beta$ , die Gleichung (4.7) lösen.

$\Rightarrow$  Periodische Lösungen bekäme man für  $\alpha = 0$ , d.h. für  $b \geq d$ . Es wäre noch

$$d = b \cos(\beta\tau)$$

$$\beta = -b \sin(\beta\tau)$$

zu lösen. Quadriert man beide Gleichungen und addiert sie, dann folgt

$$\beta^2 + d^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm \sqrt{b^2 - d^2}.$$

Also fordert man  $b > d$  und

$$\tau = \frac{\arccos \frac{d}{b}}{\sqrt{b^2 - d^2}}.$$

Dieses Verhalten ist keine Eigenart der Gleichung (4.5):

**Satz 4.2 (ohne Beweis)** Die lineare verzögerte Differentialgleichung (4.3) hat, unter der Voraussetzung  $A_1, \dots, A_m \neq 0$ , abzählbar viele Eigenwerte. In jedem Bereich  $\{\alpha \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha'\}$  mit  $\alpha' \in \mathbb{R}$  beliebig gibt es nur endlich viele Eigenwerte von Gleichung (4.3).

Diese Eigenwertanalyse hilft bei der Stabilitätsanalyse (nichtlinearer) verzögerter Differentialgleichungen:

**Satz 4.3** Wir betrachten für  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $F : D^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar die verzögerte Differentialgleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)) \quad (4.9)$$

mit Verzögerungen  $0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$ , sowie für einen stationären Punkt  $x^* \in D$ ,  $F(x^*, \dots, x^*) = 0$  die Linearisierung

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = F'_0(x^*, \dots, x^*) \cdot \varepsilon(t) + F'_1(x^*, \dots, x^*) \cdot \varepsilon(t - \tau_1) + \dots + F'_k(x^*, \dots, x^*) \cdot \varepsilon(t - \tau_m). \quad (4.10)$$

Dann gilt:

- i) Falls alle Eigenwerte  $\lambda$  von Gleichung (4.10)  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  erfüllen, ist die Lösung  $x(t) = x^*$  von Gleichung (4.9) asymptotisch stabil.
- ii) Gibt es einen Eigenwert  $\lambda$  von Gleichung (4.10) mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , so ist diese Lösung instabil.

### Anmerkung

- ) Es gibt auch eine analoge Bifurkationstheorie für parametrisierte verzögerte Differentialgleichungen.
- ) Wir beschränken uns auf die Betrachtung von Hopf-Bifurkationen, die durch Variation der Verzögerung(en) entstehen.

## 4.4 Hopf-Bifurkation

Wir kommen nun zu einem **Hopf-Bifurkations-Theorem** für Differentialgleichungen vom Typ

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), x(t - \tau)). \quad (4.11)$$

**Satz 4.4** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $F : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^k$  dreimal stetig differenzierbar und  $x^* \in D$  erfülle  $F(x^*, x^*) = 0$ . Für ein  $\tau_0 > 0$  gelte für die linearisierte verzögerte Differentialgleichung

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = F'_0(x^*, x^*) \cdot \varepsilon(t) + F'_1(x^*, x^*) \cdot \varepsilon(t - \tau_0) \quad (4.12)$$

1. Es gibt ein Paar von Eigenwerten  $\lambda, \bar{\lambda}$  von Gleichung (4.12) mit  $\operatorname{Re} \lambda = 0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ .
2. Für alle anderen Eigenwerte  $\lambda$  von Gleichung (4.12) gelte  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ .

Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $\delta > 0$ , sodass

1. Für alle  $\tau \in ]\tau_0 - \varepsilon, \tau_0[$  gibt es keine periodische Lösung  $x$  von Gleichung (4.11) mit

$$\|x|_{[-\tau, 0]} - x^*\| < \delta$$

2. Für alle  $\tau \in ]\tau_0, \tau_0 + \varepsilon[$  gibt es eine periodische Lösung  $x$  von Gleichung (4.11) mit

$$\|x|_{[-\tau, 0]} - x^*\| < \delta,$$

diese sei  $\tilde{x}$ .

Dann gilt für jede periodische Lösung  $x$  von Gleichung (4.11) mit  $\|x|_{[-\tau, 0]} - x^*\| < \delta$ , dass  $x(t) = \tilde{x}(t + r)$  für ein  $r \in [0, \infty[$ . Die Abbildung  $\Pi : ]\tau_0, \tau_0 + \varepsilon[ \rightarrow ]0, \infty[$ , welche die Periode von  $\tilde{x}$  darstellt, ist stetig und erfüllt

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0+} \Pi(\tau) = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im} \lambda|},$$

wenn  $\lambda$  der Eigenwert von Gleichung (4.12) mit  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  ist.

**Beispiel 4.6** Fortsetzung von Bsp. 4.2: Wir betrachten die verzögerte logistische Gleichung

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K}\right) \quad (4.13)$$

Die stationären Punkte sind  $N^* = K$ ,  $N^* = 0$ .

$$\begin{aligned} F(x, x_\tau) &= r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x_\tau}{K}\right) \\ F'_0(x, x_\tau) &= r \cdot \left(1 - \frac{x_\tau}{K}\right) \\ F'_0(N^*, N^*) &= 0 \\ F'_1(x, x_\tau) &= -r \cdot \frac{x}{K} \\ F'_1(N^*, N^*) &= -r \end{aligned}$$

Linearisierung (um  $N^* = K$ ):

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -r \cdot \varepsilon(t - \tau)$$

Eigenwertgleichung:  $\lambda = -r \cdot e^{-\lambda\tau}$

Für eine Hopf-Bifurkation benötigen wir ein  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ,  $\lambda = i\beta$

$$i\beta = -r \cdot e^{-i\beta\tau} = -r \cdot \cos(\beta\tau) + ir \sin(\beta\tau)$$

Aus Betrachtung von Real- und Imaginärteil separat folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \cos(\beta\tau) &= 0, \\ r \sin(\beta\tau) &= \beta. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ergibt

$$\beta\tau = (2\ell + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Dies führt in der zweiten Gleichung zu

$$(2\ell + 1) \frac{\pi}{2\tau} = r(-1)^\ell.$$

Für  $\ell \geq 0$  ist die linke Seite positiv, also muss die rechte Seite auch positiv sein, d.h.  $\ell = 2p$ .

Falls  $\ell < 0$ , so muss  $\ell$  ungerade sein:  $\ell = -2p + 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im ersten Fall gilt} \\ \text{im zweiten} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tau = \frac{1}{r}(4p+1)\frac{\pi}{2} \\ \tau = \frac{1}{r}(4p-3)\frac{\pi}{2} \end{array} \text{ gleiches } \tau$$

Die erste Hopf-Bifurkation (mit kleinem  $\tau$ ) erhalten wir bei  $\tau_0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\pi}{2}$ .

Für  $\tau > \tau_0$  sind periodische Lösungen möglich, siehe Abb. 4.3.

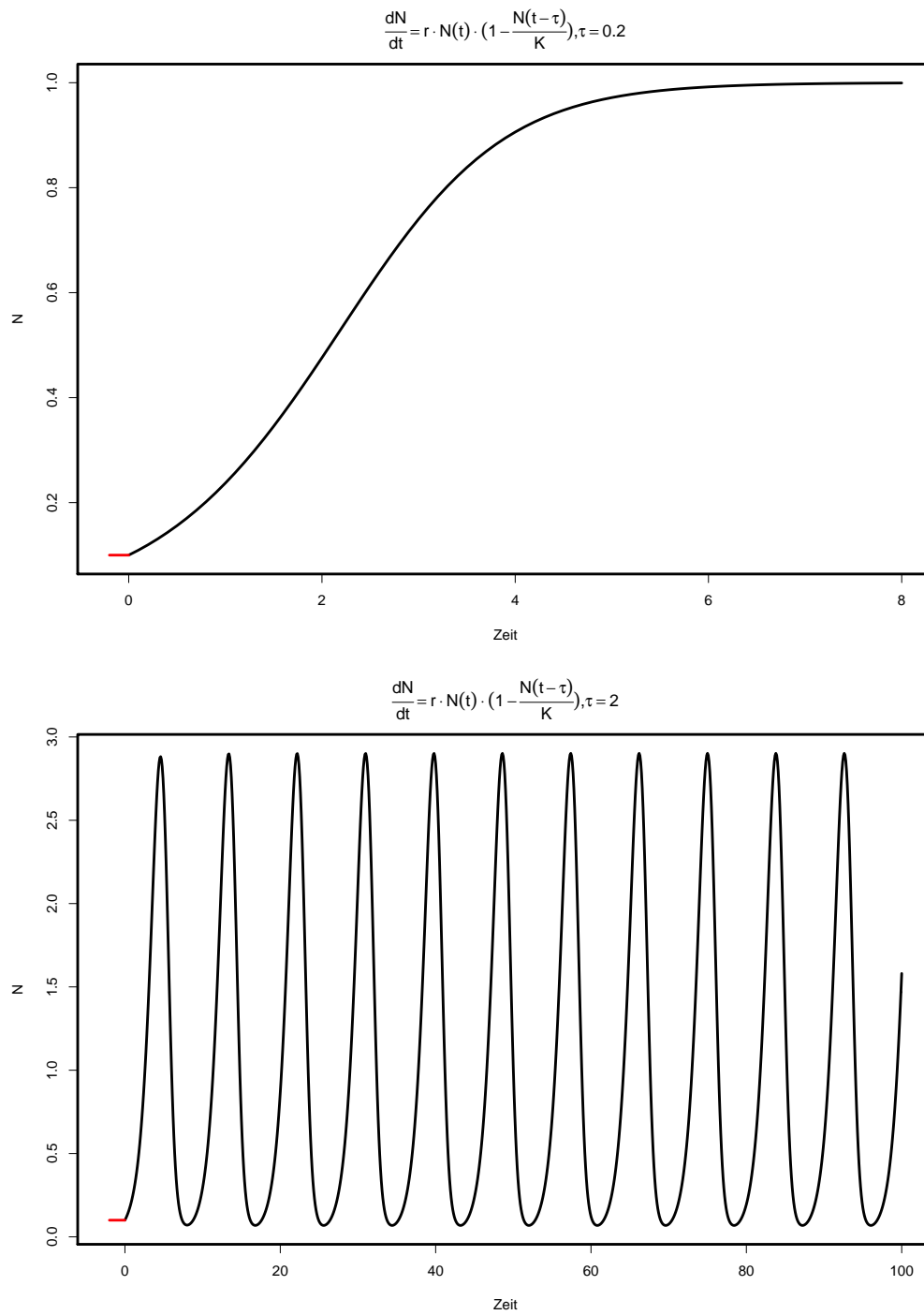


Abbildung 4.3: Simulation von Gleichung (4.13) für  $\tau = 0.2$  (oben) und  $\tau = 2$  (unten)

# Kapitel 5

## Reaktions-Diffusionsgleichungen

**Einordnung:** Reaktions-Diffusionsgleichungen sind partielle Differentialgleichungen; sie beschreiben die Dynamik von Systemen, deren Zustand durch Funktionen in einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ( $d \in \{1, 2, 3\}$ ) beschrieben wird, zum Beispiel:

1. Populationsdichte in einem Bereich  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ : Populationsdichte  $N(t, x)$  zur Zeit  $t$  und im Ortspunkt  $x \in \mathbb{R}^2$ .
2. Konzentrationen von Chemikalien bei räumlich strukturierten chemischen Reaktionen.
3. Altersprofil einer Population: Populationsdichte  $N(t, x)$  zum Zeitpunkt  $t$  und Alter  $x$ .

### 5.1 Modellbildung

#### Eindimensionale Irrfahrt (stetige Zeit)



Diffusion = ungerichtete Bewegung = zufällige Bewegung

$\Rightarrow$  1 Partikel, 1 Zeitintervall  $\Delta t$ , springt eine zufällige Entfernung  $X_1$ :  $\mathbb{E}X_1 = 0$ ,  $\mathbb{V}X_1 = \sigma^2$

$\Rightarrow$  nächstes Intervall:  $X_2, \dots, X_m$  (stochastisch unabhängig von  $X_1$ ):

$$\mathbb{E}X_i = 0, \quad \mathbb{V}X_i = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad m \cdot \Delta t = t$$

⇒ Zum Zeitpunkt  $t$  befinden wir uns im Ort  $x + X_1 + X_2 + \dots + X_m$ :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \dots + X_m) = m \cdot \sigma^2 = D \cdot t$$

⇒ Der Übergang  $m \rightarrow \infty$  hieße also  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$u(t, i)$  = Anzahl der Individuen in  $i$  zum Zeitpunkt  $t$

⇒ man wartet exponentiell lange *Wartezeit* bis zur nächsten Entscheidung

⇒ diskret: Entscheidung nach jedem Schritt:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, i) = -2 \cdot r \cdot u(t, i) + r \cdot u(t, i + 1) + r \cdot u(t, i - 1)$$

⇒ stetiger Raum: statt  $\mathbb{Z}$  nun  $\mathbb{Z} \cdot h$ ,  $h \ll 1$ ,  $h \rightarrow 0$ ; Hoffnung, dass wir als Modell für  $u(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  als Grenzwert bekommen

⇒ also:  $u_h(t, i) \approx u(t, ih)$ ,  $r = r(h)$

o.B.d.A.: ges.:  $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)$  für  $x = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, 0) \approx \frac{\partial}{\partial t} u_h(t, 0) = -2 \cdot r(h) \cdot u(t, 0) + r(h) \cdot u(t, h) + r(h) \cdot u(t, -h)$$

**Taylorentwicklung:**

$$u(t, h) = u(t, 0) + h \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(t, 0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0) + O(h^3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, 0) = r(h) \left( -2 \cdot u(t, 0) + u(t, 0) + h \frac{\partial}{\partial x} u(t, 0) + O(h^2) + u(t, 0) - h \frac{\partial}{\partial x} u(t, 0) + O(h^2) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, 0) \approx \frac{\partial}{\partial t} u_h(t, 0) = r(h) \left( \dots + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0) + O(h^3) \right)$$

$$= r(h) \cdot h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0) + r(h) \cdot O(h^3)$$

⇒  $r(h) = \frac{D}{h^2}$  liefert den Grenzwert

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0).$$

Für alle  $x$ : **Eindimensionale Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung:**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \tag{5.1}$$

Lösung:  $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \left( -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + t^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{x^2}{4Dt^2} \right) (-1) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left( -\frac{2x}{4Dt} \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left( -\frac{2}{4Dt} + \frac{x^2}{4D^2 t^2} \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \end{aligned}$$

Problem:  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

⇒ Funktion produziert keinen guten Anfangswert,  
daher besser: allgemeine Lösung von (5.1) mit  $u(0,x) = f(x)$ :

$$u(t,x) = \int f(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} dy \tag{5.2}$$

⇒ Faltungprofil  $f$  mit Dichte (der Normalverteilung), vgl. Abb. 5.1.

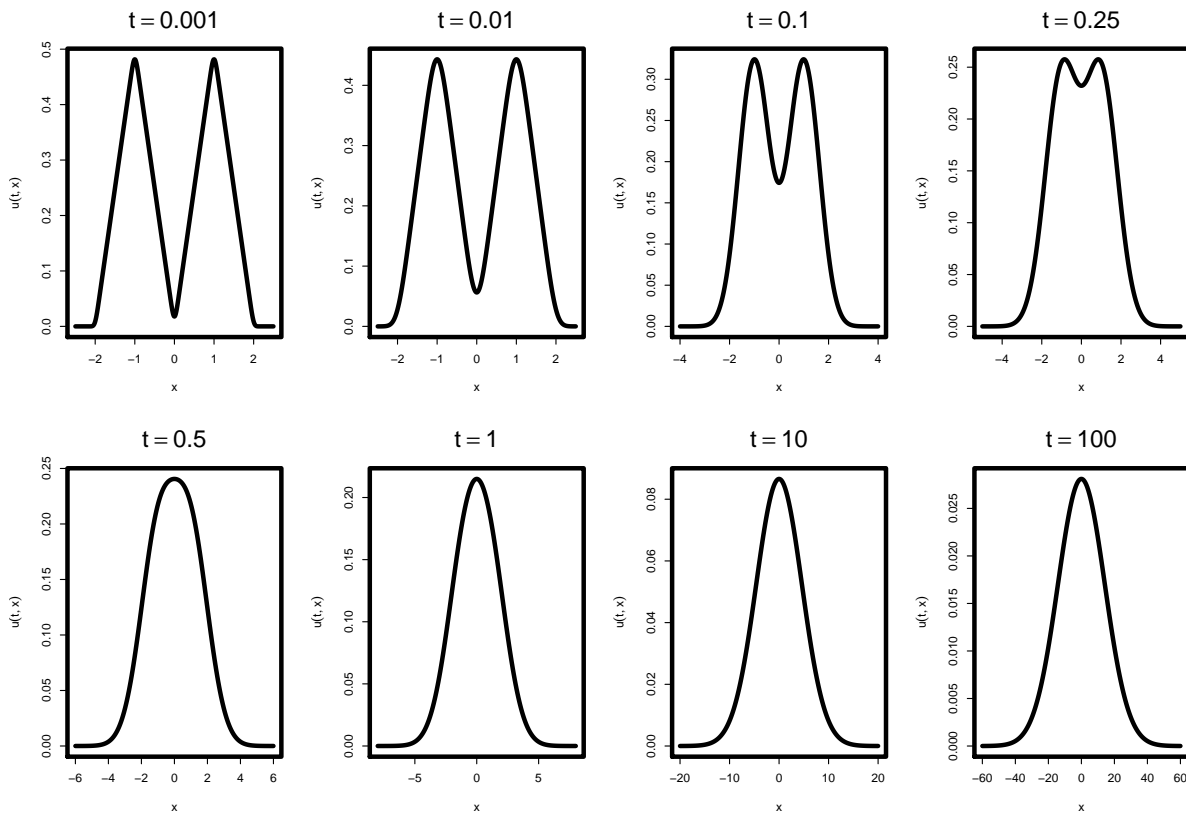


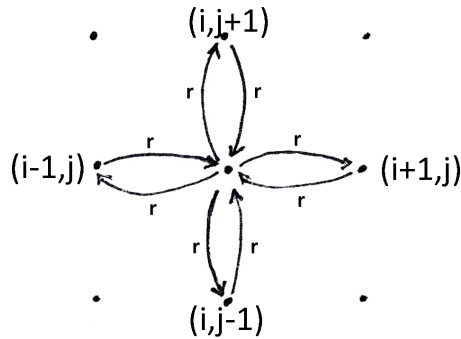
Abbildung 5.1: Lösungen eines Anfangswertproblems der (eindimensionalen) Diffusionsgleichung für verschiedene Zeiten  $t$



## Zweidimensionales Modell

Gitter-Approximation:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) = -4ru_{i,j}(t) + ru_{i-1,j}(t) + ru_{i+1,j}(t) + ru_{i,j-1}(t) + ru_{i,j+1}(t)$$



wie im Eindimensionalen:

$$u_{i,j}(t) \approx u(t, ih, jh), \quad r = r(h), \quad \tilde{i}, \tilde{j} \in \{0, \pm 1\}$$

o. B. d. A.:  $i = j = 0 \Rightarrow$  **Taylorentwicklung:**

$$u(t, \tilde{i}h, \tilde{j}h) = u(t, 0, 0) + \tilde{i}h \frac{\partial}{\partial x} u(t, 0, 0) + \tilde{j}h \frac{\partial}{\partial y} u(t, 0, 0) + \frac{\tilde{i}^2 h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0, 0) + \tilde{i} \tilde{j} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} u(t, 0, 0) + \frac{\tilde{j}^2 h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, 0, 0) &\approx r(h) (-4u(t, 0, 0) + u(t, 0, 0) - h \frac{\partial}{\partial x} u(t, 0, 0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0, 0) \\ &\quad + u(t, 0, 0) + h \frac{\partial}{\partial x} u(t, 0, 0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0, 0) \\ &\quad + u(t, 0, 0) - h \frac{\partial}{\partial y} u(t, 0, 0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, 0, 0) \\ &\quad + u(t, 0, 0) + h \frac{\partial}{\partial y} u(t, 0, 0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, 0, 0)) \end{aligned}$$

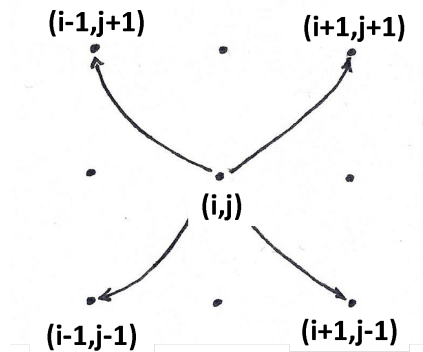
natürliche Skalierung:  $r(h)h^2 = D + o(h)$

$\Rightarrow$  **zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung:**

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, 0, 0) = D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0, 0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, 0, 0) \right) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, 0, 0) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0, 0) + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, 0, 0) \quad (5.4)$$

weitere Betrachtung:



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} u(t,0,0) &\approx r(h)(-4u(t,0,0) + u(t,0,0) - h \frac{\partial}{\partial x} u(t,0,0) + h \frac{\partial}{\partial y} u(t,0,0)) \\
 &\quad + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,0,0) - h^2 \frac{\partial u(t,0,0)^2}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t,0,0) \\
 &\quad + u(t,0,0) - h \frac{\partial}{\partial x} u(t,0,0) - h \frac{\partial}{\partial y} u(t,0,0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,0,0) \\
 &\quad + h^2 \frac{\partial u(t,0,0)^2}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t,0,0) \\
 &\quad + u(t,0,0) + h \frac{\partial}{\partial x} u(t,0,0) + h \frac{\partial}{\partial y} u(t,0,0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,0,0) \\
 &\quad + h^2 \frac{\partial u(t,0,0)^2}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t,0,0) \\
 &\quad + u(t,0,0) + h \frac{\partial}{\partial x} u(t,0,0) - h \frac{\partial}{\partial y} u(t,0,0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,0,0) \\
 &\quad - h^2 \frac{\partial u(t,0,0)^2}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t,0,0) \\
 \frac{\partial}{\partial t} u(t,0,0) &\approx r(h)(2h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,0,0) + 2h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t,0,0))
 \end{aligned}$$

zu fordernde Skalierung:  $2h^2 r(h) = D + o(h)$

⇒ **Zweidimensionale Wärmeleitungs-Isotropie:**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y) + D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,x,y)$$

Bei nicht konstanten Raten  $r$  ergeben sich keine Nullterme (**zweidimensional anisotrop**):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2D_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

mit  $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$  Diffusionsmatrix

Die Diffusionsmatrix muss positiv (semi-)definit sein.

**Dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung** (analog):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5.5)$$

### Randbedingungen

Falls  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt ist müssen Randbedingungen im Ort vorgegeben werden. Wir betrachten zwei Typen von Randwertproblemen.

#### 1. Dirichlet-Randbedingung

Lösung  $u$  wird auf dem Rand  $\partial\Omega$  vorgegeben.

Im eindimensionalen Fall  $\Omega = ]a, b[$  gilt

$$u(t, a) = \alpha(t) \quad \text{und} \quad u(t, b) = \beta(t)$$

für  $t \geq 0$  mit vorgegebenen Funktionen  $\alpha, \beta : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### 2. Neumann-Randbedingung

Die (erste) Ableitung der Lösung  $u$  wird auf dem Rand  $\partial\Omega$  vorgegeben in Richtung des äußeren Normalenvektors.

Im eindimensionalen Fall  $\Omega = ]a, b[$  gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = \alpha(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = \beta(t)$$

für  $t \geq 0$  mit vorgegebenen Funktionen  $\alpha, \beta : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Homogene Neumann-Randbedingungen entstehen für  $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ . Physikalisch bedeutet diese Bedingung, dass kein Fluss (von Teilchen oder Wärme) durch den Rand stattfindet.

**Allgemeine Reaktions-Diffusionsgleichung (dreidimensional):**

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y, z)}_{\text{zeitliche Änderung}} = D \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, x, y, z) \right)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{F(u(t, x, y, z))}_{\text{Reaktion}}$$

## 5.2 Beispiele

### Beispiel 5.1 Fisher-KPP-Modell

Modellierung der Verbreitung eines günstigen Gens in einer räumlich strukturierten Population.

$u(t, x)$ : Häufigkeit des Gens im Punkt  $x$  zur Zeit  $t$   $0 \leq u(t, x) \leq 1$ .

Für  $d = 1$ ,  $\Omega = \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)}_{\text{Wachstum, weil das Gen günstig ist}} + \underbrace{D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{zufällige Bewegung}} \quad (5.6)$$

Fisher: Durchsetzung eines vorteilhaften Allels in einer räumlich verteilten Population ( $K = 1$ ). Kolmogoroff, Petrovski, Piscounov: Es gibt stabile Wellenfronten, d.h. eine konstante Durchsetzungsgeschwindigkeit. Der Reaktionsterm in dieser partiellen Differentialgleichung entspricht einem logistischen Wachstum.

Dieses Modell erlaubt wellenartige Lösungen der Form:

$$u(t, x) = \Phi(x - ct),$$

wobei  $c$  die Wellengeschwindigkeit und  $\Phi$  die Form der Welle darstellt. Typischerweise fordert man:  $\Phi(-\infty) = 0$ ,  $\Phi(\infty) = 1$  und  $0 \leq \Phi(z) \leq 1$  für  $z \in \mathbb{R}$ . Vgl. Abb. 5.2.

Nichtlineare Reaktionen können also für Diffusionen untypische Phänomene hervorrufen (stabile Wellen widersprechen dem Glätten/Verschmieren).

### Beispiel 5.2 Gierer-Meinhardt-Modell

Modell für Musterbildung im Haarkleid von Tieren.

Differentialgleichungssystem (eindimensional):

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \alpha_a + \beta_a \frac{a^2}{i} - \gamma_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \\ \frac{\partial i}{\partial t} &= \underbrace{\alpha_i + \beta_i a^2 - \gamma_i i}_{\text{Reaktion}} + \underbrace{D_i \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}}_{\text{Diffusion}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$\Rightarrow a$  (Aktivator) unterstützt  $i$ ,  $i$  (Inhibitor) unterdrückt  $a$

Parameter:  $\alpha_a, \alpha_i, \beta_a, \beta_i, \gamma_a, \gamma_i, D_a, D_i > 0$

Durch Bifurkationsanalyse nach der Diffusionskonstante  $D_i$  erhält man einen kritischen Parameterwert  $D_{i0}$ , über welchem die räumliche homogene Lösung von Gleichung (5.7) instabil wird (Turing-Instabilität, Turing 1952).

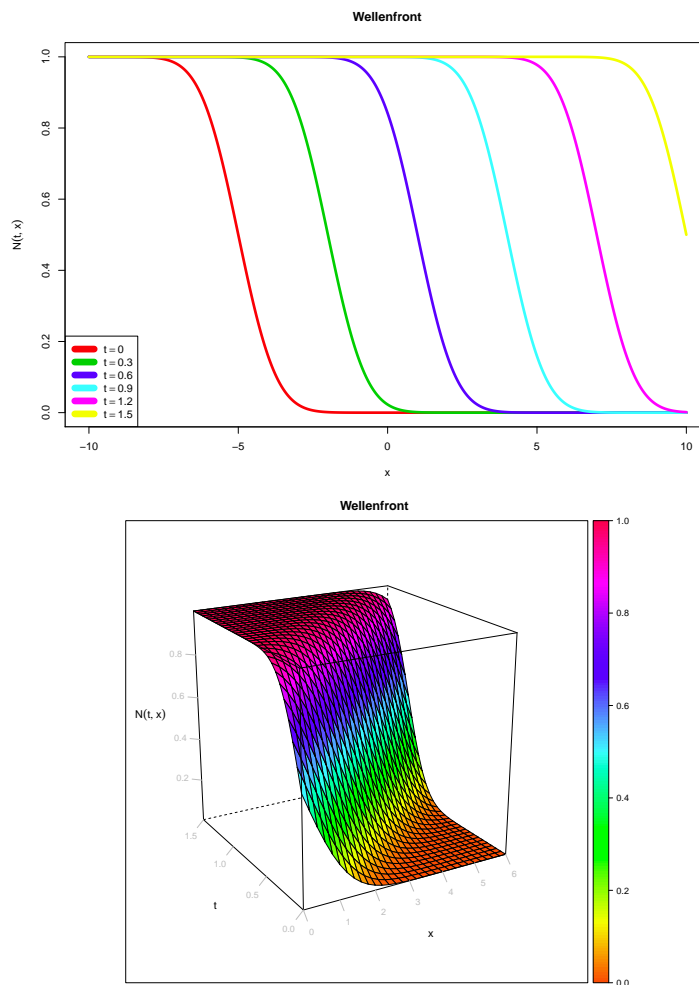
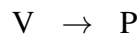
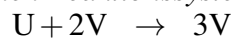


Abbildung 5.2: Wellenfronten zu verschiedenen Zeitpunkten (oben) und dreidimensionale Darstellung (unten)

**Beispiel 5.3** Gray-Scott-Gleichungen

Modell des chemischen Reaktionssystems:



Das Differentialgleichungssystem lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -uv^2 + \alpha(1-u) + d_u \Delta u \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = uv^2 - (\alpha + \beta)v + d_v \Delta v \tag{5.9}$$

für die Konzentrationen  $u, v$  von  $U, V$ . Dabei sind  $\alpha, \beta > 0$  Abbauraten ( $\beta$  bezüglich  $V \rightarrow P$ ) und  $d_u, d_v > 0$  Diffusionskonstanten.

Eine Simulation auf einem Quadrat mit homogenen Neumann-Randbedingungen findet sich für verschiedene Zeitpunkte in Abb. 5.3.

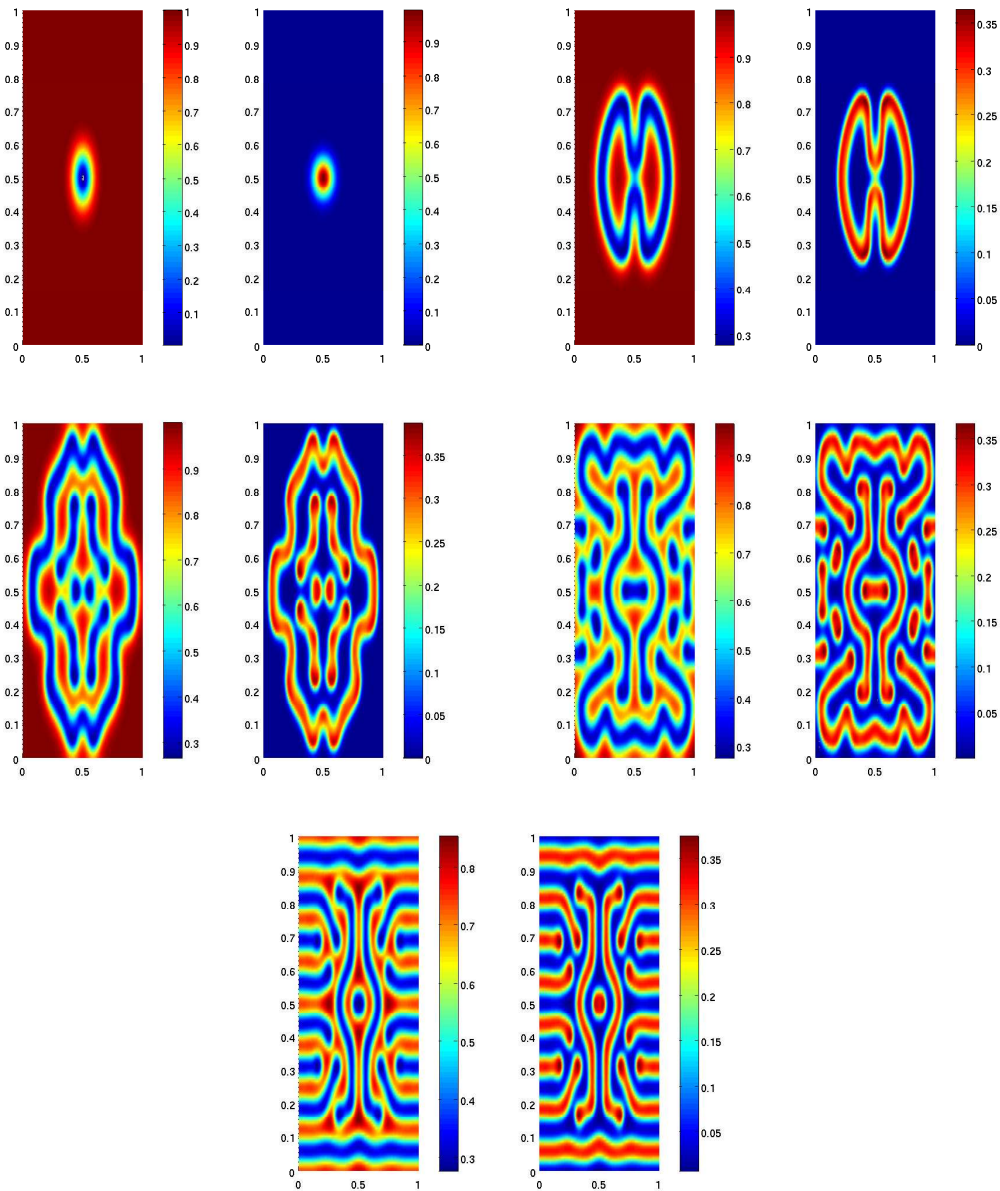


Abbildung 5.3: Simulation der (zweidimensionalen) Gray-Scott-Gleichungen. Paare  $(u, v)$  zu fünf Zeitpunkten (Anfangswerte oben links). Man sieht die Bildung stabiler, räumlich strukturierter Muster.

### 5.3 Wellenfronten

Wir betrachten das eindimensionale Fisher-KPP-Modell

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u), \quad (5.10)$$

wobei o.B.d.A. die Parameter  $r = K = D = 1$  gesetzt wurden. Die Lösung ist  $u : [0, \infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow W$  mit dem Wertebereich  $W = \mathbb{R}$  oder  $W = [0, 1]$ . Die Anfangsbedingungen seien

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

mit einer vorgegebenen Funktion  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow W$ .

Eine Lösung  $u$  stellt eine Wellenfront dar, wenn eine Funktion  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so dass

$$u(t, x) = \Phi(x - x_0(t))$$

für alle  $x$  und  $t \geq 0$  gilt mit einer Funktion  $x_0 : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Liegt eine konstante Wellengeschwindigkeit  $c > 0$  vor, dann gilt

$$u(t, x) = \Phi(x - ct) \quad \text{oder} \quad u(t, x) = \Phi(x + ct).$$

Wir setzen den ersten Ansatz in die partielle Dgl. (5.10) ein und erhalten durch Differentiation

$$\Phi'(x - ct)(-c) = \Phi''(x - ct) + \Phi(x - ct)(1 - \Phi(x - ct)).$$

Hier substituieren wir  $x - ct$  durch  $x$ . Es folgt

$$\Phi'' + c\Phi' + \Phi - \Phi^2 = 0, \quad (5.11)$$

welches eine (nichtlineare) gewöhnliche Dgl. zweiter Ordnung ist. Randbedingungen können vorgegeben werden durch  $\Phi(a) = \alpha$  und  $\Phi(b) = \beta$  mit  $a < b$  und vorgegebenen Werten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wir fordern als Randbedingungen in den Grenzfällen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0, \quad (5.12)$$

in Kurzform  $\Phi(-\infty) = 1$  und  $\Phi(\infty) = 0$ . Unser Ziel ist, eine zugehörige Lösung mit der Eigenschaft  $0 \leq \Phi(x) \leq 1$  für alle  $x$  zu erhalten. Insbesondere ist die Lösung dann nichtnegativ.

Wir transformieren die Dgl. zweiter Ordnung (5.11) in ein äquivalentes System erster Ordnung durch  $w = \Phi$  und  $v = \Phi'$  sowie  $z = (w, v)^\top$ . Dies führt auf

$$\begin{aligned} w' &= v \\ v' &= -cv - w(1 - w). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Stationäre Punkte dieses Systems sind

$$z_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir analysieren die Stabilität dieser stationären Punkte. Es wird  $c > 0$  vorausgesetzt. Die Jabobi-Matrix der rechten Seite von (5.13) lautet

$$F' \left( \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2w & -c \end{pmatrix}.$$

i) stationärer Punkt  $z_1^* = (0, 0)^\top$  :

$$F' \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ -c \pm \sqrt{c^2 - 4} \right].$$

1. Fall:  $c^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 2$

Es folgt  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und  $\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$ . Der stationäre Punkt ist somit ein anziehender Knoten und daher asymptotisch stabil.

2. Fall:  $c^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow c < 2$

Die Eigenwerte sind nun

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ -c \pm i\sqrt{4 - c^2} \right] \in \mathbb{C}.$$

und daher komplex konjugiert zueinander. Es folgt  $\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) = -\frac{c}{2} < 0$ . Der stationäre Punkt ist somit ein anziehender Strudel und auch asymptotisch stabil.

ii) stationärer Punkt  $z_2^* = (1, 0)^\top$  :

$$F' \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ -c \pm \sqrt{c^2 + 4} \right].$$

Es gilt  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ . Der stationäre Punkt ist also ein Sattelpunkt und somit instabil.

Wegen der Randbedingungen (5.12) suchen wir eine Kurve im Phasenraum von  $z_2^*$  nach  $z_1^*$ . Folglich muss  $z_1^*$  ein attraktiver stationärer Punkt sein, was nach obiger Diskussion auch erfüllt ist. Jedoch ist der 2. Fall des Strudels zu vermeiden, da dann negative Werte  $w = \Phi$  auftreten würden. Als notwendige Bedingung an die Wellengeschwindigkeit erhalten wir

$$c \geq c_{\min} = 2.$$

Formal müsste noch gezeigt werden, dass diese Bedingung auch hinreichend für die Nichtnegativität der Lösung  $w$  ist.



Im Fall des Fisher-KPP-Modells (5.6) mit Parametern  $r, K, D > 0$  lautet die notwendige Bedingung an die Wellengeschwindigkeit

$$c \geq c_{\min} = 2\sqrt{rD}.$$

Dadurch stellt sich die Frage, welche dieser Wellengeschwindigkeiten in den Lösungen vorliegt. Der nächste Satz gibt eine Auskunft darüber.

**Satz 5.1 (Kolmogorov, Petrovskii, Piscounov 1937)** *Die Anfangswerte seien  $u(0, x) = u_0(x)$  mit einer nichtnegativen stetigen Funktion  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $u_0(x) = 1$  für  $x \leq x_1$  und  $u_0(x) = 0$  für  $x \geq x_2$  wobei  $x_1 < x_2$ . Dann entwickelt sich die Lösung  $u(t, x)$  des Fisher-KPP-Modells (mit  $K = 1$ ) für  $t \rightarrow \infty$  zu einer Wellenfront  $\Phi(x - c_{\min}t)$ .*

In diesem Satz wird nicht die Bedingung  $u(x) \leq 1$  für  $x_1 < x < x_2$  gefordert.

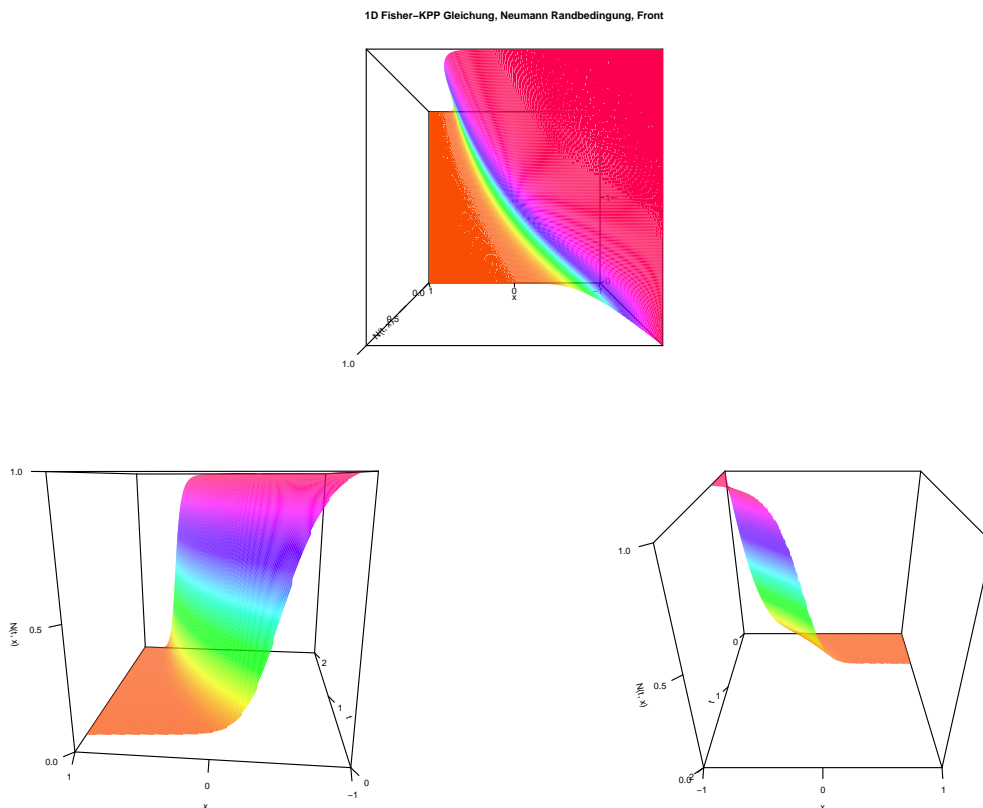


Abbildung 5.4: Fisher-KPP-Modell in dreidimensionalem Diagramm  $(t, x, u(t, x))$ , aus verschiedenen Perspektiven.

## 5.4 Gierer-Meinhardt-Modell

Wir führen noch einen allgemeineren Begriff ein.

**Definition 5.1** Zu einer partiellen Differentialgleichung auf einem Ortsbereich  $\Omega$  und Zeitbereich  $t \geq 0$  wird eine Lösung  $u$  als stationäre Lösung bezeichnet, wenn sie sich mit der Zeit nicht ändert, d.h.  $u(t, x) = \hat{u}(x)$  für alle  $x \in \Omega$  und  $t \geq 0$  mit einer Funktion  $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir greifen das Gierer-Meinhardt-Modell aus (5.7) auf. In der mehrdimensionalen Form lautet dieses Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \alpha_a + \beta_a \frac{a^2}{i} - \gamma_a a + D_a \Delta a \\ \frac{\partial i}{\partial t} &= \alpha_i + \beta_i a^2 - \gamma_i i + D_i \Delta i \end{aligned} \tag{5.14}$$

mit  $a, i : [0, \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem beschränkten Ortsgebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Darin tritt der Laplace-Operator  $\Delta$  auf. Homogene Neumann-Randbedingungen seien auf dem Rand  $\partial\Omega$  vorgegeben. Die Anfangsbedingungen seien wie üblich festgelegt bei  $t = 0$  durch  $a(0, x) = a_0(x)$  und  $i(0, x) = i_0(x)$  für  $x \in \Omega$ . Alle Parameter im Modell sind nichtnegativ.

Die Interaktionen im Reaktionsteil dieses Modells verdeutlicht Abb. 5.5. Der Autokatalyse-Prozess findet sich im Term mit  $\frac{a^2}{i}$  in der ersten Gleichung, welcher die Bildung des Aktivators verursacht. Eine hohe Konzentration des Inhibitors reduziert die Autokatalyse. Der Aktivator fördert die Bildung des Inhibitors durch den Term mit  $a^2$  in der zweiten Gleichung.

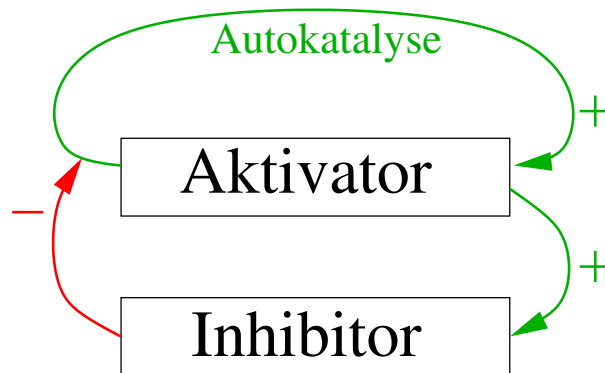


Abbildung 5.5: Veranschaulichung der Reaktionsabläufe im Gierer-Meinhardt-Modell.

Zur Diskussion verwenden wir eine Vereinfachung durch die Parameterwahl  $\alpha_a = \alpha_i = 0$ ,  $\beta_a = \beta_i = \gamma_a = \gamma_i = 1$ . Es folgt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{a^2}{i} - a + D_a \Delta a \\ \frac{\partial i}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} (a^2 - i + D_i \Delta i), \end{aligned} \tag{5.15}$$

wobei die rechte Seite der zweiten Gleichung mit einem Parameter  $\tau > 0$  skaliert wurde. Diese partielle Differentialgleichung besitzt die konstante Lösung  $a(t, x) = a^*$ ,  $i(t, x) = i^*$  für alle  $x$

und  $t \geq 0$  mit

$$\begin{pmatrix} a^* \\ i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Diese konstante Lösung ist ein Spezialfall einer stationären Lösung aus Definition 5.1.

### Reaktionsteil

Wir betrachten nur den Reaktionsteil aus dem System (5.15), welcher vorliegt falls keine Diffusion auftreten würde ( $D_a = D_i = 0$ ). Es folgt das autonome System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{a^2}{i} - a \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{\tau} (a^2 - i) \end{aligned} \quad (5.17)$$

mit  $a, i : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine stationärer Punkt des Systems ist offensichtlich gegeben durch (5.16). Wir analysieren die Stabilität dieses stationären Punkts. Die Jacobi-Matrix der rechten Seite in (5.17) lautet

$$F' \left( \begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2a}{i} - 1 & -\frac{a^2}{i^2} \\ \frac{2a}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$F' \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Das charakteristische Polynom ist  $\lambda^2 - (1 - \frac{1}{\tau})\lambda + \frac{1}{\tau} = 0$ . Die Eigenwerte ergeben sich zu

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\tau} \right) \pm \sqrt{\left( 1 - \frac{1}{\tau} \right)^2 - \frac{4}{\tau}} \right].$$

Einsetzen von  $\tau_0 = 1$  zeigt

$$\lambda_{1/2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4} = \pm i,$$

d.h. die Realteile sind null.

In einer Umgebung von  $\tau_0$  gilt:

- i)  $\tau < \tau_0$  :  $\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$   
Stationärer Punkt ist asymptotisch stabil.
- ii)  $\tau > \tau_0$  :  $\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) > 0$   
Stationärer Punkt ist instabil.

Am Parameterwert  $\tau_0 = 1$  tritt eine Hopf-Bifurkation auf. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass der stationäre Punkt asymptotisch stabil für alle  $0 < \tau < 1$  ist.

### Turing-Instabilität

Das Hinzufügen von Diffusions-Effekten bewirkt oft eine Stabilisierung, d.h. instabile Zustände bei Abwesenheit von Diffusion werden zu stabilen Zuständen mit Diffusion. Bei Reaktions-Diffusionsgleichungen kann jedoch auch das Gegenteil eintreten, d.h. ein stabiler Zustand wird durch Diffusion instabil. Dieses Phänomen wird als *Turing-Instabilität* bezeichnet.

Wir betrachten jetzt das Gierer-Meinhardt-Modell (5.15) in einer Raumdimension o.B.d.A. auf dem Ortsintervall  $\Omega = (0, \pi)$ . Die zugehörigen homogenen Neumann-Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x}(t, 0) &= \frac{\partial a}{\partial x}(t, \pi) = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial x}(t, 0) &= \frac{\partial i}{\partial x}(t, \pi) = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

für alle  $t \geq 0$ . Wir untersuchen die stationäre Lösung (5.16). Sei  $u := a - a^*$  und  $v := i - i^*$ . Die Linearisierung des Differentialgleichungssystems (5.15) um diese stationäre Lösung ergibt mit der Jacobi-Matrix (5.18) das System

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ D_i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Wir machen für eine Lösung den Separationsansatz

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} e^{\lambda^{(k)} t} \cos(kx) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

mit Konstanten  $\lambda^{(k)} \in \mathbb{C}$  und Koeffizienten  $U_k, V_k \in \mathbb{C}$ . Dieser Ansatz erfüllt die Randbedingungen (5.19). Desweiteren ist  $|e^{\lambda^{(k)} t}| = e^{\operatorname{Re}(\lambda^{(k)}) t}$  für  $t \geq 0$ . Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{\lambda^{(k)} t} \cos(kx) = \lambda^{(k)} e^{\lambda^{(k)} t} \cos(kx), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\lambda^{(k)} t} \cos(kx) = (-k^2) e^{\lambda^{(k)} t} \cos(kx).$$

Einsetzen von (5.21) in (5.20) ergibt

$$\begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} \lambda^{(k)} e^{\lambda^{(k)} t} \cos(kx) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} e^{\lambda^{(k)} t} \cos(kx) + \begin{pmatrix} D_a U_k \\ D_i V_k \end{pmatrix} e^{\lambda^{(k)} t} (-k^2) \cos(kx).$$

Division durch  $e^{\lambda^{(k)} t}$  und Umstellen der Terme zeigt

$$\left[ \lambda^{(k)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} \cos(kx) = 0.$$

Da dies für alle  $x$  gilt, folgt daraus

$$\left( \lambda^{(k)} I - J_k \right) z_k = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

mit  $z_k = (U_k, V_k)^\top$  und

$$J_k = \begin{pmatrix} 1 - k^2 D_a & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} - k^2 D_i \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte  $\lambda_{1/2}^{(k)}$  der Matrix  $J_k$  bestimmen sich daher aus

$$\det(\lambda^{(k)}I - J_k) = 0.$$

Die zugehörige Nullstellenbedingung ist

$$\lambda^2 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\tau} - k^2(D_a + D_i)\right)}_{=B} \lambda + \underbrace{\left(1 - k^2D_a\right)\left(-\frac{1}{\tau} - k^2D_i\right) + \frac{2}{\tau}}_{=C} = 0.$$

Es folgt

$$\lambda_{1/2}^{(k)} = \frac{1}{2} \left( B \pm \sqrt{B^2 - 4C} \right). \quad (5.22)$$

Die folgenden Fälle sind möglich (bei festem  $k$ ):

–) 1. Fall:  $\operatorname{Re}(\lambda_1^{(k)}) \leq 0$  und  $\operatorname{Re}(\lambda_2^{(k)}) \leq 0$

Die Lösungen (5.21) fallen vom Betrag her mit der Zeit monoton. Für  $\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}^{(k)}) < 0$  konvergieren die Lösungen sogar gegen die Nulllösung.

–) 2. Fall:  $\operatorname{Re}(\lambda_1^{(k)}) > 0$  oder  $\operatorname{Re}(\lambda_2^{(k)}) > 0$

Der Betrag mindestens einer Lösung (5.21) steigt mit der Zeit an. Dadurch entfernt sich die Lösung von der Nulllösung. Die Nulllösung des linearen Differentialgleichungssystems ((5.15)) ist instabil.

Hinreichend für Stabilität der stationären Lösung (5.16) zur nichtlinearen partiellen Differentialgleichung (5.15) ist der 1. Fall alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Instabilität liegt vor, wenn der 2. Fall bereits für ein  $k'$  auftritt.

Wir möchten zeigen, dass Instabilität für  $\tau < \tau_0 = 1$  vorliegt falls  $D_i$  hinreichend groß ist. Dazu betrachten wir die Eigenwerte (5.22). Für  $0 < \tau < 1$  gilt immer  $B < 0$ . Mit der Annahme  $C < 0$  folgt  $\lambda_{1/2}^{(k)} \in \mathbb{R}$  und

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{1}{2} \left( B + \sqrt{B^2 - 4C} \right) = \frac{1}{2} \left( B + \sqrt{B^2 + 4|C|} \right) > \frac{1}{2} (B + |B|) = 0.$$

Daher untersuchen wir den Koeffizienten  $C$  genauer

$$C = \frac{1}{\tau} - k^2D_i + \frac{1}{\tau}k^2D_a + k^4D_aD_i.$$

Wäre  $D_a = D_i = 0$ , dann würde  $C > 0$  gelten. Wir setzen  $k = 1$  und betrachten  $\tau < 1$  mit  $\tau \approx 1$

$$C \approx 1 - D_i + D_a + D_aD_i = 1 + D_i \left( -1 + \frac{D_a}{D_i} + D_a \right).$$

Für  $D_a < 1$  und  $D_i$  hinreichend hoch ( $D_i \gg 1$ ) erhalten wir  $C < 0$ . Dadurch ist die Turing-Instabilität gezeigt.

Ohne die Turing-Instabilität tendieren die Lösungen von Anfangswertproblemen für  $t \rightarrow \infty$  gegen die konstante Lösung (5.16). Mit der Turing-Instabilität können sich die Lösungen von

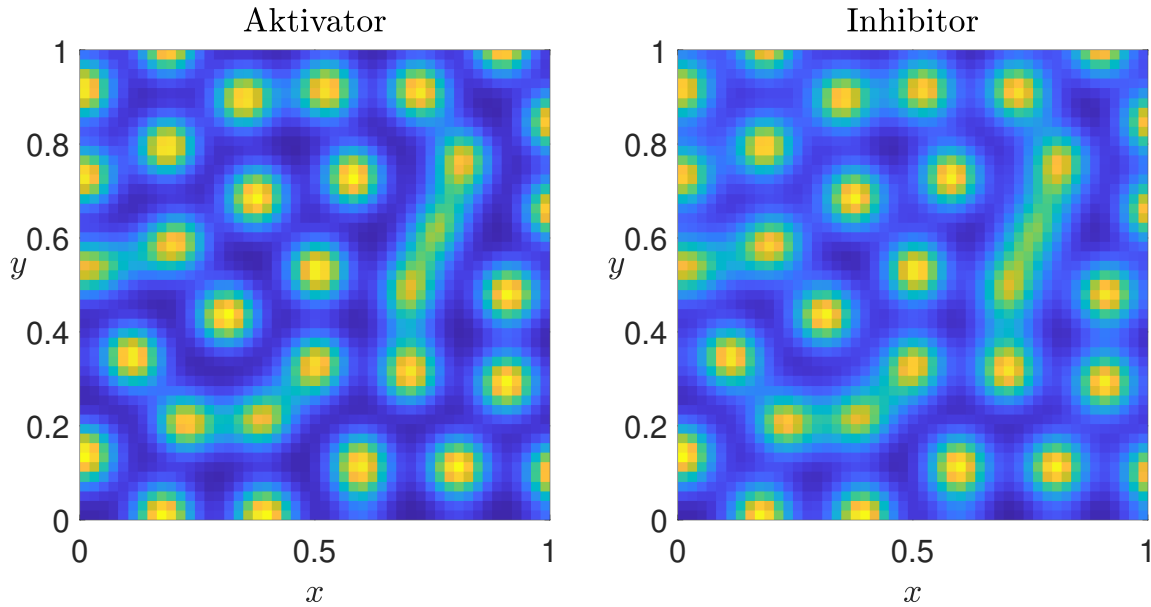


Abbildung 5.6: Lösung eines Anfangs-Randwert-Problems des zweidimensionalen Gierer-Meinhardt-Modells.

Anfangswertproblemen komplexer Verhalten. Insbesondere können die Lösungen gegen nicht-triviale stationäre Lösungen im Sinne von Definition 5.1 konvergieren.

### Beispiel für Lösung des zweidimensionalen Modells

Wir verwenden das zweidimensionale Gierer-Meinhardt-Modell (5.14) auf dem Einheitsquadrat  $\Omega = (0, 1)^2$ . Daher ist  $\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}$  und  $\Delta i = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}$ . Wir geben homogene Neumann-Randbedingungen vor, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y}(x, 0) &= \frac{\partial a}{\partial y}(x, 1) = \frac{\partial i}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial i}{\partial y}(x, 1) = 0 & \text{für alle } x \in (0, 1), \\ \frac{\partial a}{\partial x}(0, y) &= \frac{\partial a}{\partial x}(1, y) = \frac{\partial i}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial i}{\partial x}(1, y) = 0 & \text{für alle } y \in (0, 1). \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen sind  $a(0, x, y) = a_0(x, y)$ ,  $i(0, x, y) = i_0(x, y)$  für  $x, y \in (0, 1)$  mit vorgegebenen Funktionen  $a_0, i_0$ . Für gewisse Parameterwahlen konvergieren die Lösungen von Anfangswertproblemen gegen stationäre Lösungen, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a(t, x) \\ i(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}(x) \\ \hat{i}(x) \end{pmatrix} \quad \text{für } x \in \Omega. \quad (5.23)$$

Dabei hängen die Grenzfunktionen  $\hat{a}, \hat{i}$  im allgemeinen von der Wahl der Anfangswerte ab. Bei konstanten Anfangswerten bleibt die Lösung auch für  $t > 0$  konstant im Ort und daher kann keine nichttriviale stationäre Lösung entstehen. Also wählen wir die Anfangsbedingungen nicht konstant. Die stationäre Lösung (5.23) wird näherungsweise erhalten, indem das Anfangs-Randwert-Problem über ein Zeitintervall  $[0, T]$  mit relativ hohem  $T > 0$  gelöst wird und  $a(T, x)$ ,  $i(T, x)$  die Näherung darstellt.

Wir setzen die Parameter auf  $\alpha_a = \beta_a = \beta_i = 0.001$ ,  $\alpha_i = 0$ ,  $\gamma_a = 2.5$ ,  $\gamma_i = 100$ ,  $D_a = 0.45 \cdot 10^{-4}$ ,  $D_i = 0.27$ . Die Diffusion erfolgt daher für den Inhibitor viel schneller als für den Aktivator. Die Anfangswerte wählen wir zufällig aus. Abb. 5.6 zeigt die Lösung des Anfangs-Randwert-Problems zum Zeitpunkt  $T = 100$ . Wir erkennen die Bildung von Punkten bzw. runden Flecken.

## 5.5 Weiteres Beispiel

Ein System aus zwei Reaktions-Diffusionsgleichungen für die Konzentrationen  $a$  und  $b$  von chemischen Stoffen wird betrachtet. Es existiert eine konstante Lösung  $(a^*, b^*)^\top$ . Eine Taylor-Entwicklung wird für den nichtlinearen Reaktionsterm um diesen Zustand durchgeführt. Weglassen der Terme von Ordnung (Polynomgrad) höher als drei liefert das vereinfachte System

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha u(1 - r_1 v^2) + v(1 - r_2 u) + D_u \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \beta v(1 + \frac{\alpha r_1}{\beta} uv) + u(\gamma + r_2 v) + D_v \Delta v \end{aligned} \quad (5.24)$$

für  $u := a - a^*$  und  $v := b - b^*$ . Diese partielle Differentialgleichung ist ähnlich zum Gray-Scott-Modell (5.8). Weitere Einzelheiten zu diesem Modell finden sich in: R.A. Barrio, C. Varea, J.L. Aragón, P.K. Maini, A two-dimensional numerical study of spatial pattern formation in interacting Turing systems, *Bulletin of Mathematical Biology* 61 (1999), 483-505.

### Reaktionsteil

Wir betrachten nur den Reaktionsteil aus dem System (5.24), welcher vorliegt falls keine Diffusion auftreten würde ( $D_u = D_v = 0$ ). Das autonome System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen lautet

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \alpha u(1 - r_1 v^2) + v(1 - r_2 u) \\ \frac{dv}{dt} &= \beta v(1 + \frac{\alpha r_1}{\beta} uv) + u(\gamma + r_2 v) \end{aligned} \quad (5.25)$$

mit  $u, v : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Offensichtlich ist

$$\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

ein stationärer Punkt. Eine Schar aus stationären Punkten des Systems ist gegeben durch die Bedingung

$$v = -\frac{\alpha + \gamma}{1 + \beta} u.$$

Mit der Einschränkung  $\alpha = -\gamma$  an die Parameter ist (5.26) der einzige stationäre Punkt des Systems (5.25). Wir untersuchen wieder die Stabilität dieses stationären Punkts. Die Jacobi-Matrix der rechten Seite in (5.25) berechnet sich zu

$$F' \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha(1 - r_1 v^2) - r_2 v & -2\alpha r_1 uv + 1 - r_2 u \\ \alpha r_1 v^2 + \gamma + r_2 v & \beta + 2\alpha r_1 v + r_2 u \end{pmatrix}.$$

Damit folgt am stationären Punkt

$$F' \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung  $\det(\lambda I - F'((0,0)^\top)) = 0$  für die Eigenwerte impliziert das Nullstellenproblem  $\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta - \gamma = 0$ . Wir erhalten die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ (\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma)} \right].$$

Es ergibt sich, dass  $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$  und  $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$  in den beiden folgenden Fällen gilt:

1.  $\alpha > 0$  und  $\beta \leq -\alpha$ , oder
2.  $\alpha < 0$  und  $\beta \leq -1$ .

In diesen Fällen ist der stationäre Punkt (5.26) asymptotisch stabil.

Bei Hinzunahme der Diffusion ( $D_u, D_v > 0$ ) tritt für gewisse Parameterbereiche wieder die Turing-Instabilität ein.

### Beispiele für Lösungen des zweidimensionalen Modells

Wir verwenden das Differentialgleichungssystem (5.24) im einem Ortsgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Die folgenden Parameterwahlen werden eingesetzt.

- i)  $D_u = 1, D_v = 2, \alpha = 0.899, \beta = -0.91, \gamma = -0.899, r_1 = 0.02, r_2 = 0.2, L = 50$ .
- ii)  $D_u = 0.244, D_v = 2, \alpha = 0.398, \beta = -0.4, \gamma = -0.398, r_1 = 0.02, r_2 = 0.2, L = 50$ .
- iii)  $D_u = 0.244, D_v = 2, \alpha = 0.398, \beta = -0.4, \gamma = -0.398, r_1 = 3.5, r_2 = 0, L = 100$ .

Diese Festsetzungen erfüllen insbesondere die Bedingung  $\alpha > 0$  und  $\beta \leq -\alpha$ .

In allen drei Fällen werden die gleichen Anfangswerte vorgegeben, welche zufällig gewählt sind. Die Lösung des Anfangs-Randwert-Problems erfolgt über ein Zeitintervall  $[0, T]$  um Näherungen für stationäre Lösungen zu erhalten.

Zum einen verwenden wir als Ortsgebiet ein Quadrat  $\Omega = (0, L)^2$  mit homogenen Neumann-Randbedingungen. Abb. 5.7 (links) zeigt die Lösung  $u$  zu den Zeitpunkten  $T = 500$  bei (i) und  $T = 5000$  bei (ii) und (iii). Wir beobachten, dass Fall (i) und Fall (ii) auf die Bildung von runden Flecken und Fall (iii) auf die Bildung von Streifen führt. Es ist bekannt, dass in Reaktions-Diffusionsgleichungen quadratische Terme die Fleckenbildung und kubische Terme die Streifenbildung begünstigen. Dieses Verhalten finden wir hier im System (5.24) wieder. Es



sind  $r_1$  und  $r_2$  die Parameter zu den Termen  $uv^2$  bzw.  $uv$ . In Fall (i) und (ii) ist  $r_2 \gg r_1$  und in Fall (iii) ist  $r_1 \gg r_2$ .

Zum anderen lösen wir die Reaktions-Diffusionsgleichungen auf einer Kugeloberfläche als Ortsgebiet, um der Form eines realen Tieres näher zu kommen. Die benötigten Randbedingungen können hier als periodische Bedingungen interpretiert werden. Die Diffusionskonstanten  $D_u$  und  $D_v$  müssen an die Größe der Kugel jeweils angepasst werden, wobei das Verhältnis  $D_u/D_v$  gleich bleibt. Abb. 5.7 (rechts) stellt die entstehenden stationären Lösungen in den drei Fällen der Parameterwahlen (i), (ii) und (iii) dar. Wir erkennen, dass die Muster mit denen auf dem Quadrat jeweils übereinstimmen.

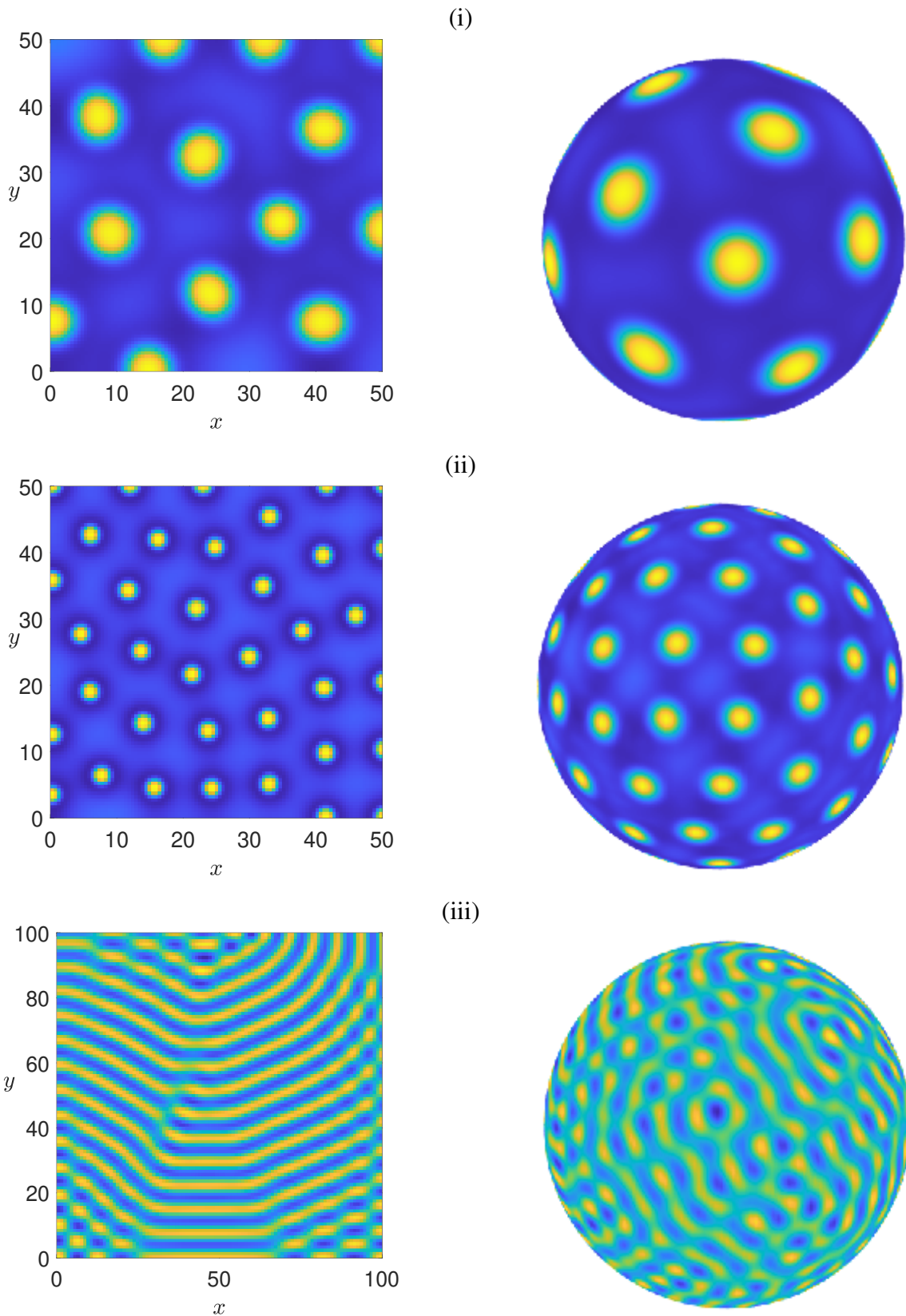


Abbildung 5.7: Lösungen für  $u$  aus Anfangs-Randwert-Problem der Reaktions-Diffusionsgleichung (5.24) auf einem Quadrat und einer Kugel zu drei verschiedenen Parameterwahlen.