Logik für Informatiker

Vorlesung 10: Prädikatenlogik

Babeş-Bolyai Universität, Department für Informatik, Cluj-Napoca
csacarea@cs.ubbcluj.ro

SYNTAX

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.
2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen
3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen ist, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

- Terme
- Formeln
- Substitutionen

SEMANTIK

- Σ-Struktur

$$\mathcal{A} = (U,\ (f_\mathcal{A} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega},\ (p_\mathcal{A} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

  wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt Universum von $\mathcal{A}$.

- Valuation: Abbildung $\beta : X \to U$
- Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β
- Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&U_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots\} \\
&0_{\mathbb{N}} = 0 \in U_{\mathbb{N}} \\
&s_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}} \to U_{\mathbb{N}}, \;\; s_{\mathbb{N}}(n) = n + 1 \\
&+_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}}, \;\; +_{\mathbb{N}}(n, m) = n + m \\
&*_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}}, \;\; *_{\mathbb{N}}(n, m) = n * m \\
&\leq_{\mathbb{N}} = \text{ "kleiner-gleich" } \subseteq U_{\mathbb{N}}^2 \\
&<_{\mathbb{N}} = \text{ "kleiner" } \subseteq U_{\mathbb{N}}^2
\end{aligned}
$$

Mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 3$ ergibt sich beispielsweise:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) & = & 3 \\
\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) & = & 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) & = & 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall z \; z \leq y) & = & 0 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y \; x < y) & = & 1
\end{array}
$$

BEISPIEL

(1) $\mathbb{N}(\beta)(s(x)+s(0)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(x)) +_{\mathbb{N}} s_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}) = (1+1)+(0+1) = 3$

(2) $\mathbb{N}(\beta)(x+y \approx s(y)) = 1$

Erklärung:

$$\mathbb{N}(\beta)(x+y) = \beta(x) +_{\mathbb{N}} \beta(y) = 1+3 = 4$$
$$\mathbb{N}(\beta)(s(y)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(y)) = 3+1 = 4.$$

(3)
$$\begin{aligned}
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x+y \approx y+x)) &= \min_{a\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\forall y(x+y \approx y+x)) \\
&= \min_{a\in\mathbb{N}} \min_{b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x+y \approx y+x) \\
&= \min_{a,b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x+y \approx y+x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

da für alle $a, b \in \mathbb{N}$:

$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x+y) = a+b = b+a = \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y+x)$

Beispiel

(4) $\mathbb{N}(\beta)(\forall z\ z \leq y) = \min\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$

Erklärung:

Falls $a = 4$, so $\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$, da:

$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z) = a = 4$

$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(y) = \beta(y) = 3$

und $(4, 3) \not\in \leq_{\mathbb{N}}$.

(5) $\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\ x < y) = \min\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\exists y\ x < y)$

$= \min\limits_{a \in \mathbb{N}} \max\limits_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

Erklärung:

Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$: $\max\limits_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$,

da es gibt $b = a + 1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

weil $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x) = a$

$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y) = b = a + 1$ und $(a, a + 1) \in <_{\mathbb{N}}$.

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ unter β:

$$\mathcal{A}, \beta \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}(\beta)(F) = 1$$

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von F):

$$\mathcal{A} \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ für alle } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}$$

Definition. F ist (allgemein-) gültig:

$$\models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A} \models F, \text{ für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$$

Definition. F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A}$ und β gibt, so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$.
Sonst heißt F unerfüllbar.

Folgerung und Äquivalenz

Definition. F impliziert G (oder G folgt aus F), i.Z. $F \models G$
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Definition. F und G sind äquivalent
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
$\mathcal{A}, \beta \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise:

Definition. $N \models G$ gdw.
für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$:
falls ($\mathcal{A}, \beta \models F$, für alle $F \in N$), so ($\mathcal{A}, \beta \models G$).

Folgerung / Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \to G)$ ist gültig

Beweis

$$
\begin{aligned}
F \models G \quad & \text{gdw.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}\text{: Falls } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ so } \mathcal{A}, \beta \models G. \\
& \text{gdw.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F) \to_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1 \\
& \text{gdw.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F \to G) = 1
\end{aligned}
$$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Beweis

$$
\begin{aligned}
F \text{ und } G \text{ sind äquivalent} \quad & \text{gdw.} \quad F \models G \text{ und } F \models G \\
& \text{gdw.} \quad \models F \to G \text{ und } \models G \to F \\
& \text{gdw.} \quad \models F \leftrightarrow G
\end{aligned}
$$

Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Nachweis von Gültigkeit (und damit Folgerung oder Äquivalenz) durch Unerfüllbarkeitstest:

F gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar

$N \models F$ genau dann, wenn $N \cup \neg F$ unerfüllbar

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$; $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$.

Theorem

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\forall x \forall y\, F \equiv \forall y \forall x\, F$

(2) $\exists x \exists y\, F \equiv \exists y \exists x\, F$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \;\; Mutter(y, x)$ — Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \;\; Mutter(y, x)$ — Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

Bemerkung: $\forall x \exists y F \equiv \exists y \forall x F$ gilt nicht immer.
Es gibt eine Formel F so dass $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ nicht logisch äquivalent.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

$$\exists x \forall y \, F \models \forall y \exists x \, F$$

Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und eine Formel F mit:

$$\forall x \exists y \, F \not\models \exists y \forall x \, F$$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \neg \ldots$

Beispiel:

$\forall x\, \text{mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg\exists x\, \neg\text{mag}(x, \text{eiscreme})$

$\exists x\, \text{mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg\forall x\, \neg\text{mag}(x, \text{broccoli})$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall xF \equiv \neg\exists x\neg F$; $\exists xF \equiv \neg\forall x\neg F$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\forall x\, F \equiv \neg\exists x\, \neg F$

(2) $\exists x\, F \equiv \neg\forall x\, \neg F$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\, (\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\, \mathit{arbeitet}(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(gerade(x) \vee ungerade(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\, gerade(x)) \vee (\exists x\, ungerade(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\exists x(F \vee G) \equiv \exists xF \vee \exists xG$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\exists x\,(F \vee G) \equiv (\exists x\, F) \vee (\exists x\, G)$$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x\ldots) \vee (\forall x\ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(gerade(x) \vee ungerade(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\, gerade(x)) \vee (\forall x\, ungerade(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall xF \vee \forall xG$$

(1) $\forall xF \vee \forall xG \models \forall x(F \vee G)$
(2) $\forall x(F \vee G) \not\models \forall xF \vee \forall xG$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(gerade(x) \wedge ungerade(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, gerade(x)) \wedge (\exists x\, ungerade(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\exists x(F \wedge G) \not\equiv \exists x F \wedge \exists x G$$

(1) $\exists x(F \wedge G) \models \exists x F \wedge \exists x G$
(2) $\exists x F \wedge \exists x G \not\models \exists x(F \wedge G)$

Zusammenfassung/Wichtige Äquivalenzen

Wichtige Äquivalenzen

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$
- $\forall x (F \land G) \equiv (\forall x F) \land (\forall x G)$
- $\exists x (F \lor G) \equiv (\exists x F) \lor (\exists x G)$
- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\qquad \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\qquad \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Zusammenfassung / Wichtige Äquivalenzen

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

- $\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$

- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\quad\quad$ $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\quad\quad$ $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Falls x in der Formel H nicht vorkommt, dann:

- $(\forall x F(x)) \vee H \equiv \forall x (F(x) \vee H)$
- $(\forall x F(x)) \wedge H \equiv \forall x (F(x) \wedge H)$
- $(\exists x F(x)) \vee H \equiv \exists x (F(x) \vee H)$
- $(\exists x F(x)) \wedge H \equiv \exists x (F(x) \wedge H)$

Zusammenfassung

Aber Vorsicht

$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$

- $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$
- $\forall x \exists y F \not\models \exists y \forall x F$

$\forall x (F \vee G) \not\equiv (\forall x F) \vee (\forall x G)$

- $(\forall x F) \vee (\forall x G) \models \forall x (F \vee G)$
- $\forall x (F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

$\exists x (F \wedge G) \not\equiv (\exists x F) \wedge (\exists x G)$

- $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F) \wedge (\exists x G)$
- $(\exists x F) \wedge (\exists x G) \not\models \exists x (F \wedge G)$

Andere wichtige Äquivalenzen

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$		(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Äquivalenz)

Strukturelle Induktion

- Für Terme
- Für Formeln in Prädikatenlogik

Strukturelle Induktion: Terme

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ-Terme:

Die kleinste Menge mit:

- $X \subseteq T_\Sigma(X)$

Wenn
- $f \in \Omega$,
- n ist die Stelligkeit von f
- $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)$

dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Strukturelle Induktion: Terme

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

Sei $p(t)$ eine Eigenschaft der Σ-Terme in Prädikatenlogik

Behauptung: Für alle Terme t, $p(t)$ gilt

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:
$p(t)$ gilt für $t \in X$ und für alle Konstanten.

Sei t ein Term (nicht Variable oder Konstante).
Induktionsvoraussetzung:
$p(s)$ gilt für alle Teilterme s von t (mit $s \neq t$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(t)$ gilt:

Fallunterschied über alle $f \in \Omega$ mit $t = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Strukturelle Induktion: Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ:

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathsf{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathsf{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathsf{For}_\Sigma$, dann auch
  $\neg F, F \land G, F \lor G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \mathsf{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathsf{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann
  $\forall x F \in \mathsf{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathsf{For}_\Sigma$

Strukturelle Induktion: Formeln

Sei $p(F)$ eine Eigenschaft der Σ-Formeln in Prädikatenlogik

Behauptung: Für alle Formeln F, $p(F)$ gilt

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:
$p(F)$ gilt für $F \in \{\top, \bot\}$ und für alle atomaren Formeln.

Sei F eine Formel (nicht atomar oder $\top$ oder $\bot$).
Induktionsvoraussetzung:
$p(G)$ gilt für alle Teilformeln G von F (mit $G \neq F$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

Fall 1	$F = \neg G$	Fall 2	$F = G_1 \vee G_2$
Fall 3	$F = G_1 \wedge G_2$	Fall 4	$F = G_1 \rightarrow G_2$
Fall 5	$F = G_1 \leftrightarrow G_2$	Fall 6	$F = \forall x G$
		Fall 7	$F = \exists x G$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

Plan: Wir benutzen folgendes Lemma:

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Substitutionen und Valuationen

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Beweis Strukturelle Induktion

$$p(t_i) \qquad \mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$$

Zu zeigen: Für alle Terme t_i, $p(t_i)$ gilt.

1. **Induktionsbasis:** $p(t_i)$ gilt für $t_i \in X$ und für $t_i = c$ Konstante.

Fall 1: $t_i \in X$.

- Fall 1a: $t_i = x$. Dann: $t_i[t/x] = t$.
  $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(t) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(x) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.
- Fall 1a: $t_i = y$, mit $y \neq x$. Dann: $t_i[t/x] = y$
  $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(y) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(y) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.

Fall 2: $t_i = c$, $c/0 \in \Omega$ (Konstante). Dann: $t_i[t/x] = c$
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(c) = c_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(c) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.

Substitutionen und Valuationen

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Beweis (ctd.)

2. **Induktionsvoraussetzung:** Sei t_i Term (nicht Variable oder Konstante).

   Annahme: $p(s)$ gilt für alle Teilterme s von t_i (mit $s \neq t_i$)

3. **Induktionsschritt:** Zu zeigen: $p(t_i)$ gilt, wobei $t_i = f(s_1, \ldots, s_n)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) &= \mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)[t/x]) = \\
&= \mathcal{A}(\beta)(f(s_1[t/x], \ldots, s_n[t/x]) = \qquad \text{(Anw. Subst.)} \\
&= f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1[t/x]), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n[t/x])) \\
&\overset{IV}{=} f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(s_1), \ldots \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(s_n)) \\
&= \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(f(s_1, \ldots, s_n)) \\
&= \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)
\end{aligned}
$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}, \beta[x \rightarrow \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

1. Induktionsbasis: Zu zeigen: Die Eigenschaft gilt für $\top$, $\bot$ und alle atomaren Formeln.

Fall 1: $F = \top$ Dann $F[t/x] = \top$;

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]){=}\mathcal{A}(\beta)(\top){=}1{=}\mathcal{A}(\beta[x{\mapsto}\mathcal{A}(\beta)(t)])(\top){=}\mathcal{A}(\beta[x{\mapsto}\mathcal{A}(\beta)(t)])(F)$

Fall 2: $F = \bot$ Dann $F[t/x] = \bot$;

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]){=}\mathcal{A}(\beta)(\bot){=}0{=}\mathcal{A}(\beta[x{\mapsto}\mathcal{A}(\beta)(t)])(\bot){=}\mathcal{A}(\beta[x{\mapsto}\mathcal{A}(\beta)(t)])(F)$.

Fall 3: $F = p(t_1, \ldots, t_n)$ mit $p/n \in \Pi$. Dann $F[t/x] = p(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]){=}\mathcal{A}(\beta)(p(t_1[t/x], .., t_n[t/x])){=}1$ iff $(\mathcal{A}(\beta)(t_1[t/x]), .., \mathcal{A}(\beta)(t_n[t/x])){\in}p_{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A}(\beta[x{\mapsto}\mathcal{A}(\beta)(t)])(p(t_1, .., t_n)){=}1$ iff $(\mathcal{A}(\beta[x{\mapsto}\mathcal{A}(\beta)(t)])(t_1), .., \mathcal{A}(\beta[x{\mapsto}\mathcal{A}(\beta)(t)])(t_n)){\in}p$

Lemma: $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x{\mapsto}\mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$. Äquivalenz folgt daraus.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: ctd.

2. **Induktionsvoraussetzung:** Sei F eine Formel (nicht atomar oder $\top$ oder $\bot$).
   Annahme: $p(G)$ gilt für alle Teilformeln G von F (mit $G \neq F$)
3. **Induktionsschritt:** Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

Fall 1: $F = \neg G$. Dann $F[t/x] = \neg(G[t/x])$.

$$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\neg(G[t/x]) = 1 \text{ iff } \mathcal{A}(\beta)(G[t/x]) = 0 \text{ iff (Ind.Voraus.)}$$
$$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G) = 0 \text{ iff } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\neg G) = 1 \text{ iff } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(F) = 1$$

Fall 2-5: $F = G_1 \mathrm{op} G_2$, $\mathrm{op} \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann $F[t/x] = G_1[t/x] \mathrm{op} G_2[t/x]$.

$$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(G_1[t/x] \mathrm{op} G_2[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(G_1[t/x]) \mathrm{op}_B \mathcal{A}(\beta)(G_2[t/x]) = \text{(I.V.)}$$
$$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G_1) \mathrm{op}_B \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G_2) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\underbrace{G_1 \mathrm{op} G_2}_{F}).$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 6: $F = \forall y G$.

Fall 6.1: $y = x$. Dann $F[t/x] = \forall x G[t/x] = \forall x G$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\forall x G) = \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\}$

$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall x G) = \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)][x \mapsto a])(G) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\} =$
$\min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\}$.

Fall 6.2: $y \neq x$, t enthält nicht y. Dann $F[t/x] = \forall y G[t/x] = \forall y (G[t/x])$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\forall y (G[t/x]) = \min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a])(G[t/x]) | a \in U_{\mathcal{A}}\} =$ (Ind.Vor.)
$\min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y \mapsto a])(t))(G) | a \in U_{\mathcal{A}}\} =$
$\min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G) | a \in U_{\mathcal{A}}\}$ (y kommt in t nicht vor)
$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall y G) = = \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)][y \mapsto a])(G) | a \in U_{\mathcal{A}}\} =$
$\min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G) = | a \in U_{\mathcal{A}}\}$.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 6: $F = \forall y G$.

Fall 6.3: $y \neq x$, t enthält y. Dann $F[t/x] = \forall y' G[y'/y][t/x]$.

$$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\forall y'(G[y'/y][t/x]) =$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(G[y'/y][t/x]) | a \in U_{\mathcal{A}}\} = \quad \text{(Ind.Vor.)}$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t))(G[y'/y]) | a \in U_{\mathcal{A}}\} = \quad \text{(Ind.Vor.)}$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t), y \mapsto a])(G) | a \in U_{\mathcal{A}}\} =$$

$$[\text{Rem}: \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t)])(y') = a]$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t), y \mapsto a])(G) | a \in U_{\mathcal{A}}\} \ (y' \text{ kommt in } t \text{ u. } G \text{ nicht vor}$$

$$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall y G) = \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)][y \mapsto a])(G) | a \in U_{\mathcal{A}}\} =$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G) | a \in U_{\mathcal{A}}\}.$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 7: $F = \exists y G$.

Ähnlich zu Fall 6.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Allgemeiner gilt für beliebige Substitutionen σ:

Theorem.

$$\mathcal{A}, \beta \models F\sigma \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta \circ \sigma \models F,$$

wobei $\beta \circ \sigma : X \to \mathcal{A}$ die Wertebelegung mit $\beta \circ \sigma(x) = \mathcal{A}(\beta)(x\sigma)$, für alle Variablen x.

Beweis: $\sigma = [t_1/x_1, \ldots t_n/x_n]$
Induktion nach Anzahl n von Variablen in $dom(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Umbenennung von Variablen

Lemma

Für alle Σ-Formeln F, Variablen x gilt:

$$\forall x\, F \equiv \forall z\, F[z/x]$$

wobei z eine neue Variable ist.

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge, \vee$)
- Substitutionslemma


Schönen
Nikolaustag !