Logik für Informatiker

Vorlesung 3: Zweiwertige Modelle

Babeş-Bolyai Universität, Department für Informatik, Cluj-Napoca
csacarea@cs.ubbcluj.ro

20. Oktober 2017

Wiederholung

- Syntax: Wie schreibt man Formeln (Propositionen, Aussagenlogische Formeln)
- Semantik: Wie berechnen wir den Wahrheitswert der Formeln?
  - Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)
  - Wahrheitstafel für die logischen Operatoren
  - Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen
  - Modell einer Formel(menge)
  - Gültigkeit und Erfüllbarkeit
  - Tautologien und Kontradiktionen
  - Folgerung und Äquivalenz
- Kalküle: kommt noch...

Folgerung und Äquivalenz

Definition: F impliziert G (oder G folgt aus F),
gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

Definition: F und G sind äquivalent
gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \equiv G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:

$N \models G$ gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt:
falls $\mathcal{A} \models F$, für alle $F \in N$,
so $\mathcal{A} \models G$.

Folgerung und Äquivalenz

Intuition:

- F impliziert G (oder G folgt aus F),
  gdw.: für jede Wertebelegung, für die F wahr ist, auch G wahr ist.

- Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:
  $N \models G$ gdw.: für alle Wertebelegungen, für denen alle Formeln in N wahr sind, ist G auch wahr.

- Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

.... aber es ist nicht wahr dass $G \models F$ (Notation: $G \not\models F$)

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien, allgemeingültige Formeln:

Formeln, die stets wahr sind.

Kontradiktionen, unerfüllbare Formeln:

Formel, die stets falsch sind.

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis 1: Aus der Wahrheitstafel.

Beweis 2: F allgemeingültig gdw. $\mathcal{A}(F)=1$ für alle $\mathcal{A}:\Pi\rightarrow\{0,1\}$

gdw. $\mathcal{A}(\neg F)=0$ für alle $\mathcal{A}:\Pi\rightarrow\{0,1\}$ gdw. $\neg F$ unerfüllbar

Allgemeingültigkeit und Folgerung

F, G Formeln

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \to G$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
F \models G \quad & \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ so } \mathcal{A}(G) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, (\mathcal{A}(F) \to \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \mathcal{A}(F \to G) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \models F \to G
\end{aligned}$$

Allgemeingültigkeit und Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \to G$.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \cup \{F\} \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$,
falls $[\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N{\cup}\{F\}]$ so $\mathcal{A}(G){=}1$.

Wir beweisen, dass $N \models F \to G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$
falls $[\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N]$ so $\mathcal{A}(F \to G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$.

Fall 1: $\mathcal{A}(F) = 0$. Dann $\mathcal{A}(F \to G) = 1$.

Fall 2: $\mathcal{A}(F) = 1$, d.h. $[\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}]$. Dann
$\mathcal{A}(G) = 1$ und somit $\mathcal{A}(F \to G) = 1$.

Allgemeingültigkeit und Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \to G$.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \models F \to G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(F \to G){=}1$.

Wir beweisen, dass $N \cup \{F\} \models G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$] so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$.

Dann (i) $\mathcal{A}(F) = 1$ und
(ii) [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$], also $\mathcal{A}(F \to G) = 1$.

Es folgt, dass $1 = \mathcal{A}(F \to G) = (\mathcal{A}(F) \to \mathcal{A}(G)) = (1 \to \mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)$,
so $\mathcal{A}(G) = 1$.

ALLGEMEINGÜLTIGKEIT UND FOLGERUNG

F, G Formeln.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Beweis:

$$
\begin{array}{ll}
F \equiv G & \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ (\mathcal{A}(F) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ \mathcal{A}(F \leftrightarrow G) = 1 \\
& \text{g.d.w. } \models F \leftrightarrow G
\end{array}
$$

Allgemeingültigkeit und Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \to G$.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \to G$.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis F wahr für jede Wertebelegung gdw. $\neg F$ falsch für jede Wertebelegung.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
F \models G \quad & \text{gdw.} \quad \models F \to G \quad \text{d.h. } F \to G \text{ allgemeingültig} \\
& \text{gdw.} \quad \neg(F \to G) \text{ unerfüllbar.} \\
& \text{gdw.} \quad F \wedge \neg G \text{ unerfüllbar.}
\end{aligned}
$$

... da $\neg(F \to G) \equiv \neg(\neg F \vee G) \equiv \neg\neg F \wedge \neg G \equiv F \wedge \neg G$.

Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi \to \{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(G)=1$.

Zu zeigen: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, $N \cup \{\neg G\}$ erfüllbar, d.h. es gibt $\mathcal{A}{:}\Pi \to \{0,1\}$, mit

[$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{\neg G\}$].

Dann [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] und $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ (d.h. $\mathcal{A}(G) = 0$). Widerspruch.

Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Zu zeigen: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}:\Pi \to \{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(G)=1$.

> Beweis: Sei $\mathcal{A}:\Pi \to \{0,1\}$, mit [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$].
>
> Falls $\mathcal{A}(G) = 0$, wäre $\mathcal{A}$ ein Modell für $N \cup \{\neg G\}$. Das ist aber unmöglich, da wir angenommen haben, dass $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.
>
> Es folgt, dass $\mathcal{A}(G) = 1$.

Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls N unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel G
... auch für $\perp$.

Notation: $N \models \perp$ für N unerfüllbar.

Strukturelle Induktion für Aussagenlogik

Zu zeigen:

Alle Formeln haben Eigenschaft p

Für alle $F \in PROP$, gilt $p(F)$.

Induktionsanfang:

Wir beweisen, dass $p(A)$ für alle atomaren Formeln gilt.

Beweise $p(\bot), p(\top)$ und $p(q_i)$ für die aussagenlogischen Konstanten q_i, $i \in \mathbb{N}$.

Strukturelle Induktion für Aussagenlogik

Induktionsvoraussetzung:

Sei F eine Formel (die nicht atomar ist).
Annahme: alle Teilformeln von F, die nicht gleich F sind, haben Eigenschaft p.

Induktionsschritt:

Zeige, dass auch F Eigenschaft p hat.

Strukturelle Induktion für Aussagenlogik

Beweis durch Fallunterscheidung:
Fall 1: $F = \neg G$. Induktionvoraussetzung: $p(G)$ gilt. Folgere, dass $p(F)$ gilt.
Fall 2: $F = G \wedge H$. Induktionvoraussetzung: $p(G), p(H)$ gelten. Folgere, dass $p(F)$ gilt.
Fall 3: $F = G \vee H$. Induktionvoraussetzung: $p(G), p(H)$ gelten. Folgere, dass $p(F)$ gilt.
Fall 4: $F = G \rightarrow H$. Induktionvoraussetzung: $p(G), p(H)$ gelten. Folgere, dass $p(F)$ gilt.
Fall 5: $F = G \leftrightarrow H$. Induktionvoraussetzung: $p(G), p(H)$ gelten. Folgere, dass $p(F)$ gilt.

Zweiwertige Interpretation aussagenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{A}\colon PC \to \{0,1\}$ eine Belegung. Die zweiwertige Interpretation $\mathcal{A}^*$ wird induktiv über den Aufbau von PROP wie folgt definiert:

$\mathcal{A}^*(\bot) = 0$,

$\mathcal{A}^*(\top) = 1$,

$\mathcal{A}^*(p) = \mathcal{A}(p)$, für alle $p \in PC$,

$\mathcal{A}^*(\neg F) = 1 - \mathcal{A}^*(F)$,

$\mathcal{A}^*(F\ op\ G) = B_{op}(\mathcal{A}^*(F), \mathcal{A}^*(G))$, $B_{op}(x, y)$ wird entsprechend der Wahrheitstafel der Operation op berechnet.

Wir scheiben normalerweise $\mathcal{A}$ statt $\mathcal{A}^*$ und op statt B_{op}.

Tautologien. Wiederholung:

1. $(p \to \neg p) \to (\neg p)$
2. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
3. $(p \wedge q) \to p$
4. $(p \wedge q) \to q$
5. $p \to (p \vee q)$
6. $q \to (p \vee q)$
7. $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$
8. $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \wedge p) \to r$

Deduktionsmechanismen: Wahrheitstafelmethode

Jede Formel F enthält endlich viele Aussagenvariablen (propositionale Konstanten). $\mathcal{A}(F)$ ist nur von den Werten dieser Aussagenvariablen abhängig.

F enthält n Aussagenvariablen: Es folgt 2^n Wertbelegungen notwendig um zu uberprüfen, ob F erfüllbar/unerfüllbar/allgemeingültig ist oder nicht.

Dafür verwenden wir die Wahrheitstafel.

Deduktionsmechanismen: Wahrheitstafelmethode

Ein erster Kalkül $\rightarrow$ Wahrheitstabelle.

- F allgemeingültig (Tautologie): $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle Wertbelegungen,
- F erfüllbar: $\mathcal{A}(F) = 1$ für zumindest eine Wertbelegung,
- F unerfüllbar: $\mathcal{A}(F) = 0$ für alle Wertbelegungen.

Äquivalenzen

Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

Anwendung: Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(F \wedge F) \equiv F$$
$$(F \vee F) \equiv F \qquad \text{(Idempotenz)}$$

$$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$$
$$(F \vee G) \equiv (G \vee F) \qquad \text{(Kommutativität)}$$

$$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$$
$$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H) \qquad \text{(Assoziativität)}$$

$$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$$
$$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F \qquad \text{(Absorption)}$$

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$$
$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) \qquad \text{(Distributivität)}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(\neg\neg F) \equiv F \qquad \text{(Doppelte Negation)}$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$
$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G) \qquad \text{(De Morgan's Regeln)}$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G) \qquad \text{(Elimination Implikation)}$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \qquad \text{(Elimination Äquivalenz)}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(F \wedge G) \equiv F, \text{ falls } G \text{ Tautologie}$$
$$(F \vee G) \equiv \top, \text{ falls } G \text{ Tautologie} \qquad \text{(Tautologieregeln)}$$

$$(F \wedge G) \equiv \bot, \text{ falls } G \text{ unerfüllbar}$$
$$(F \vee G) \equiv F, \text{ falls } G \text{ unerfüllbar} \qquad \text{(Tautologieregeln)}$$

Wichtige Äquivalenzen für $\perp / \top$

$$(A \land \neg A) \equiv \perp$$

$$(A \lor \neg A) \equiv \top \qquad \text{(Tertium non datur)}$$

$$(A \land \top) \equiv A$$

$$(A \land \perp) \equiv \perp$$

Wichtige Äquivalenzen: Zusammengefasst

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$		(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Äquivalenz)

Ein erster Kalkül: Wahrheitstabellen

Erfüllbarkeitstest:

Jede Formel F enthält endlich viele Aussagenvariablen.
$\mathcal{A}(F)$ ist nur von den Werten dieser Aussagenvariablen abhängig.

F enthält n Aussagenvariablen:

$\Rightarrow$ 2^n Wertbelegungen notwendig um zu überprüfen, ob F erfüllbar ist oder nicht.

$\Rightarrow$ Wahrheitstafel

$\Rightarrow$ Das Erfüllbarkeitsproblem ist entscheidbar

Es existieren viel bessere Methoden als Wahrheitstafeltests um die Erfüllbarkeit einer Formel zu überprüfen.

Ein zweiter Kalkül: logische Umformung

Definition:

Äquivalenzumformung:

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel

TEILFORMELN

Eine Formel F, die als Teil einer Formel G auftritt, heißt Teilformel von G.

- F ist eine Teilformel von F
- $\left.\begin{array}{l} F = \neg G \text{ und} \\ H \text{ Teilformel von } G \end{array}\right\} \rightarrow \quad H \text{ Teilformel von } F$
- $\left.\begin{array}{l} F = F_1 \; \rho \; F_2 \\ (\text{wo } \rho \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}) \\ H \text{ Teilformel von } F_1 \text{ oder } F_2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad H \text{ Teilformel von } F$

SUBSTITUTIONSTHEOREM

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beispiel:

$A \vee B \equiv B \vee A$

impliziert

$(C \wedge (A \vee B)) \equiv (C \wedge (B \vee A))$

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird. $p(H)$

Beweis: Strukturelle Induktion.

Induktionsbasis: Beweisen, dass $p(H)$ für alle Formeln H in $\{\bot, \top\} \cup \Pi$ gilt.

Beweis: Falls $H \in \{\bot, \top\} \cup \Pi$ und F Teilformel von H, so muss $F = H$ sein. Dann ist die Formel H', die aus H hervorgeht, indem F ($=$ die ganze Formel H) durch G ersetzt wird, gleich G.

Aber dann: $H = F \equiv G = H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)
Sei H eine Formel, $H \notin \{\perp, \top\} \cup \Pi$. Sei F eine Teilformel von H.

Fall 1: $F = H$. Dann $H' = G$ (wie vorher), so $H = F \equiv G = H'$.

Fall 2: $F \neq H$.

Induktionsvoraussetzung: Annahme: $p(H')$ gilt für alle dir. Teilformeln H' von H.

Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.1: $H = \neg H_1$. Da $F \neq H$, ist F eine Teilformel von H_1.

Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H_1'$, wobei H_1' aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = \neg H_1$, ist $H' = \neg H_1'$.

Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(\neg H_1) = \neg \mathcal{A}(H_1) \stackrel{I.V.}{=} \neg \mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(H')$

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)

Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.2: $H = H_1$ op H_2. Da $F \neq H$, ist F Teilformel von H_1 oder von H_2.

Fall 2.2.1 F ist eine Teilformel von H_1.
Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H_1'$, wobei H_1' aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = H_1$ op H_2, und F in H_1 vorkommt, so $H' = H_1'$ op H_2.
Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H_1 \text{ op } H_2) = \mathcal{A}(H_1) \text{ op } \mathcal{A}(H_2) \overset{I.V.}{=} \mathcal{A}(H_1') \text{ op } \mathcal{A}(H_2) = \mathcal{A}(H_1' \text{ op } H_2) = \mathcal{A}(H')$.

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Fall 2.2.2 F ist eine Teilformel von H_2. Analog.

Ein zweiter Kalkül: logische Umformung

Definition:

Äquivalenzumformung:

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems