Reelle Analysis

Gruppenübung für Woche 3

Aufgabe G1:

1. Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = -t^2 \sin(tx), \quad x(0) = 1$$

eine eindeutige (lokale) Lösung x auf einem offenen Intervall I um 0 besitzt.

2. Zeigen Sie für diese Lösung: $0 < x(t) \leq 1$ für alle $t \in I$.

Hausübungen

Aufgabe H1: (4 Punkte) *Fehlerabschätzung für die Picard-Iteration.*
Wie im Satz von Picard-Lindelöf sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, und $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ sei lokal Lipsschitz bzgl. x mit Lipschitzkonstante $L > 0$ auf der Umgebung $I \times J$ von (t_0, x_0), wobei $I = \overline{I_\delta(t_0)}$, $J = \overline{B_r(x_0)}$. Ferner sei $C := \|f\|_{\infty, I \times J}$, und es gelte $\delta L < 1$ und $\delta C \leq r$.
Beweisen Sie für die Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

und seine Picard-Iterierten x_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ mittels Induktion die folgende Fehlerabschätzung:

$$\|x(t) - x_k(t)\| \leq CL^k \cdot \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Aufgabe H2: (5 Punkte)

(1) Berechnen Sie für das Anfangswertproblem

$$(A) \quad \dot{x} = tx + 1, \quad x(0) = 1$$

die beiden ersten Picard-Iterierten x_1, x_2 $(x_0 = 1)$.

(2) Da (A) linear ist, wissen wir, dass eine eindeutige Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie anhand des Satzes von Picard-Lindelöf, dass $|x(t) - 1| \leq 1$ für $|t| \leq \frac{1}{2}$. Schätzen Sie ferner mittels Aufgabe H1 den (absoluten) Fehler der Picard-Iterierten x_2 gegenüber der exakten Lösung x im Bereich $|t| \leq \frac{1}{2}$ ab.

Aufgabe H3: (4 Punkte) *Kontrolle der Lösungen.*
Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mit $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen; dabei sei f (global) Lipschitz auf G bzgl. x mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Beweisen Sie: Sind x_1, x_2 zwei auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definierte Lösungen dieser DGL, so gilt

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_1(a) - x_2(a)\| \cdot e^{L(t-a)} \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Tip: Lemma von Gronwall

Aufgabe H4: (Zusatzaufgabe, 4 Extra-Punkte) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) und $x : (a, \infty) \to \Omega$ eine Lösung des autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$ welche für $t \to \infty$ gegen ein $x_0 \in \Omega$ konvergiert. Zeigen Sie: $f(x_0) = 0$, d.h. x_0 ist eine konstante Lösung des Systems.
Tip: Integrieren Sie $\dot{x}(t)$ für grosse Zeiten.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 6.11.2015, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1.