

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die zur 1-Norm $\|\cdot\|_1$, zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ und zur Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf dem \mathbb{R}^n gehörenden Matrixnormen einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ durch

$$\text{die Spaltensummennorm } \|A\|_1 = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\text{die Spektralnorm } \|A\|_2 = \max\{\sqrt{|\lambda|} \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A^T A\} \quad \text{und}$$

$$\text{die Zeilensummennorm } \|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

gegeben sind.

Aufgabe 3.2 (2 Punkte) Für eine invertierbare 4×4 -Matrix A gelte

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\text{cond}_\infty(A) \geq 2,8$ gilt. Wie lässt sich diese Beobachtung verwenden, um auf einfache Weise die Konditionszahl cond_∞ einer Matrix grob zu schätzen?

Aufgabe 3.3 (3 Punkte) Es sei $A = (a_{ij})$ eine invertierbare $n \times n$ -Matrix und es sei $D = (s_i \delta_{ij})$ eine Diagonalmatrix, deren Einträge auf der Diagonalen die Zeilensummen

$$s_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

von A sind.

- Zeigen Sie, dass D invertierbar ist und für die Matrix $\tilde{A} = D^{-1}A$ die Beziehung $\text{cond}_\infty(\tilde{A}) \leq \text{cond}_\infty(A)$ gilt.
- Wie lässt sich (a) verwenden, um das Lösen der Gleichung $Ax = b$ besser zu konditionieren?

Aufgabe 3.4 (5 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{\ln(1-x) + x \exp(x)}{x^2}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 differenzierbar ist und berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (b) Bestimmen Sie näherungsweise die absolute und die relative Kondition des Problems (f, x) für $x \approx 0$.
- (c) Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie den obigen Ausdruck für $x = 10^{-5}$ mit einfacher (d. h. `float`-) Genauigkeit berechnen? Wie erklären Sie sich das Ergebnis im Lichte von (b)?
- (d) Geben Sie einen Ausdruck an, der die Berechnung von $f(x)$ für $0 < x < 10^{-3}$ mit einem relativen Fehler von weniger als 10^{-7} erlaubt. (Formulieren Sie also einen *stabilen Algorithmus* für die Berechnung des Problems (f, x) .)

Abgabetermin für dieses Blatt: 9. 11. 2004, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.