Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 12

Abgabetermin: Montag, 26. Januar 2009, zur Übung[1]

Aufgabe 56 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß $C^*(a)$ für jedes normale Element a einer C^*-Algebra A abelsch ist und zudem $\operatorname{spec}(C^*(a)) = \sigma(a)$ erfüllt. Hierbei sei $C^*(a)$ die von a erzeugte C^*-Unteralgebra von A.

Aufgabe 57 *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie $\|(\lambda - a)^{-1}\|$ für jedes selbstadjungierte Element a einer C^*-Algebra mit Eins in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\sigma(a)$, sofern $\lambda - a$ invertierbar ist.

Aufgabe 58 *(4 Punkte)*

Welche zusätzliche Eigenschaft muß ein injektiver involutiver Algebrahomomorphismus zwischen C^*-Algebren mit Eins haben, damit er isometrisch ist?

Hinweis: Die Antwort „Er muß isometrisch sein.“ gibt übrigens keine Punkte. (Warum?)

Aufgabe 59 *(6 Punkte)*

Sei A eine Banachalgebra ohne Eins und $B := A \times \mathbb{C}$ als Vektorraum. Zeigen Sie:

1. Durch $(a_1, \lambda_1)(a_2, \lambda_2) := (a_1 a_2 + \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1, \lambda_1 \lambda_2)$ für $a_1, a_2 \in A$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ wird B zu einer Algebra mit Eins.
2. Ist A eine $*$-Algebra, so wird durch $(a, \lambda)^* := (a^*, \overline{\lambda})$ auch B zu einer $*$-Algebra.
3. $A \times \{0\}$ ist ein Ideal in B und kann mit A identifiziert werden.
4. Sowohl $\|(a, \lambda)\|_{\mathrm{I}} := \|a\| + |\lambda|$ als auch die Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathrm{II}}$, wobei (a, λ) als Operator auf $A \equiv A \times \{0\} \subseteq B$ aufgefaßt wird, machen B dann zu einer Banachalgebra.

Für welche der beiden obigen Normen ist B für jede C^*-Algebra A wieder eine C^*-Algebra?

Bemerkung: Man nennt den Übergang von A zu B auch „Adjunktion der Eins“.

Aufgabe 60 *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie das Spektrum derjenigen C^*-Algebren, die sich aus $C_0(\mathbb{R})$ bzw. $C_0(\mathbb{C})$ durch Adjunktion der Eins ergeben. Vermuten Sie ein allgemeines Prinzip?

Aufgabe 61 *(1000 Zusatzpunkte)*

Zeigen Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}_+$ sowie alle positiven $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, daß $\operatorname{tr}(A + tB)^m$ ein Polynom in t mit nichtnegativen Koeffizienten ist.

Hinweis: Diese Aussage ist äquivalent zu einer Vermutung von Bessis, Moussa und Villani [J. Math. Phys. **16** *(1975) 2318–2325], die allerdings ungelöst ist. Bewiesen ist die obige Aussage bislang jeweils für $m \leq 13$, für $n \leq 2$, für kommutierende A und B sowie für einige Koeffizienten (z. T. asymptotisch für große m). Merke: Positivität ist etwas Nichttriviales.*

[1] bzw. zur Vorlesung, falls Sie an der Übung am Dienstag teilnehmen