Wachstumsprozesse: Mathematisches Modell

Eine Population bestehe zur Zeit t aus $N(t)$ Individuen. Die Population habe konstante Geburtsrate und Sterberate:

$$\beta = \text{Anzahl Geburten pro Individuum und Zeiteinheit}$$
$$\delta = \text{Anzahl Todesfälle pro Individuum und Zeiteinheit}$$

Wenn die Population aus vielen Individuen besteht, lässt sich der Wachstums- bzw. Zerfallsprozess gut durch das **mathematische Modell**

$$N'(t) = (\beta - \delta)\, N(t)$$

beschreiben. Dies ist eine **Differentialgleichung** (kurz DGL).

Wachstumsprozesse: Allgemeine Lösung

Im Abschnitt 5.3 wurde bewiesen, dass alle Lösungen der DGL $N'(t) = (\beta - \delta)\, N(t)$ durch

$$N(t) = c\, e^{(\beta-\delta)t}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ gegeben sind.
Die Lösung ist also nur bis auf eine Konstante bestimmt. Man spricht deshalb von der **allgemeinen Lösung** der DGL.

Wachstumsprozesse: Anfangswertproblem

Schreibt man zusätzlich den Wert der Lösung zu einem bestimmten (Zeit-)Punkt t_0 durch Vorgabe eines **Anfangswertes** N_0 vor, so ist die Lösung eindeutig bestimmt:

$$N(t) = N_0\, e^{(\beta-\delta)(t-t_0)}$$

ist die einzige Lösung des **Anfangswertproblems** (kurz AWP)

$$N'(t) = (\beta - \delta)N(t), \qquad N(t_0) = N_0.$$

Beispiele aus der Reaktionskinetik

$c_A(t)$: Konzentration von A zur Zeit t
$k > 0$: Reaktionsgeschwindigkeitskonstante

1. $c_A'(t) = -k\, c_A(t)$ „chemische Reaktion 1. Ordnung“, z.B. Zerfallsreaktion $A \xrightarrow{k} B + C$ oder Isomerisierung $A \xrightarrow{k} B$.
2. $c_A'(t) = -k\, c_A(t)^2$ „chemische Reaktion 2. Ordnung“, z.B. Reaktionen der Form $2A \xrightarrow{k} B + C$.
3. Für die Elementarreaktion $A + B \xrightarrow{k} P$ ergibt sich das **Differentialgleichungssystem**

$$\begin{aligned} c_A'(t) &= -k\, c_A(t)\, c_B(t),\\ c_B'(t) &= -k\, c_A(t)\, c_B(t),\\ c_P'(t) &= k\, c_A(t)\, c_B(t). \end{aligned}$$

DGLen mit getrennten Variablen: Definition

Eine DGL der Form

$$y'(t) = g(t)\,h(y(t)) \qquad \text{oder kurz} \qquad y' = g(t)h(y)$$

heißt **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**.

Beispiele 7.1

1. $y' = -ky$
2. $y' = -ky^2$
3. $y' = e^y \sin(t)$
4. $y' = y^2 + t^2$

Lösungsverfahren

Wie der Name andeutet, lassen sich die Variablen t und y trennen:

$$\frac{y'}{h(y)} = g(t) \qquad \text{falls } h(y) \neq 0.$$

Unbestimmte Integration bzgl. t und Anwendung der Substitutionsregel liefert:

$$\int \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,dt = \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(t)\,dt$$

Berechnung dieser unbestimmten Integrale (mit Integrationskonstante) und Auflösen nach y ergibt alle Lösungen $y(t)$, für die $h(y(t)) \neq 0$ gilt. Der Spezialfall $h(y(t)) = 0$ muss gesondert behandelt werden.

Beispiele

Beispiele 7.2

1. $y'(t) = -k\,y(t)$
2. $y'(t) = -k\,y^2(t), \qquad y(0) = y_0$ mit $y_0 > 0$

Beispiel: Elementarreaktion $A + B \to P$

Gegeben: Anfangswerte $c_A(0) = a$, $c_B(0) = b$, $c_P(0) = 0$ mit $a, b > 0$

Gesucht: Produktkonzentration $c_P(t)$

DGL-System:

$$
\begin{aligned}
c_A' &= -k\,c_A c_B, &\qquad c_A(0) &= a\\
c_B' &= -k\,c_A c_B, &\qquad c_B(0) &= b\\
c_P' &= k\,c_A c_B, &\qquad c_P(0) &= 0.
\end{aligned}
$$