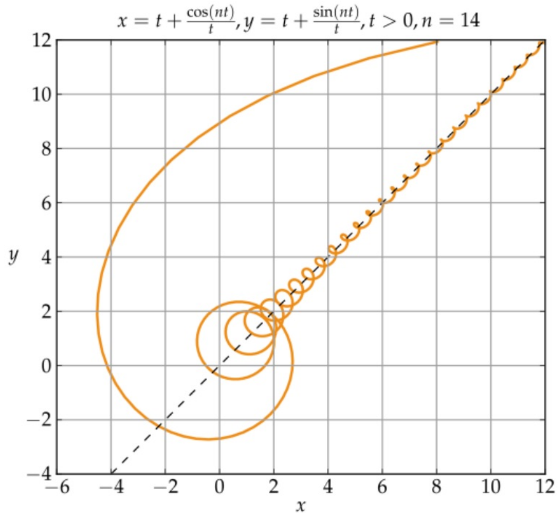
2.1 Asymptotisch gedrag

Inleiding

Je hebt leren werken met functies en hun karakteristieken. De asymptoten horen bij de karakteristieken van een functie. Je hebt er al eerder kennis mee gemaakt en je kent de asymptoten van de verschillende standaardfuncties. Zelfs krommen kunnen asymptoten hebben, wat vind je van deze?



Figuur 1 Bron: Wikipedia

Je leert in dit onderwerp

- horizontale en verticale asymptoten en perforaties bepalen;
- de vergelijking van schuine asymptoten bepalen.

Voorkennis

- de karakteristieken van alle soorten functies;
- werken met limieten.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

a Plot de grafiek van f. Zorg ervoor dat alle karakteristieken in beeld zijn.

b Laat met behulp van limieten zien, dat $x = -3$ een verticale asymptoot is.

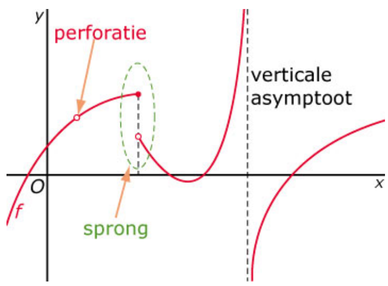
c Waarom is $x = 3$ geen verticale asymptoot van deze functie? Wat is hier aan de hand?

d Welke horizontale asymptoot heeft deze functie? Geef ook de bijbehorende limieten.

Uitleg 1

De asymptoten van een functie bepaal je door limieten te berekenen:

- De functie f heeft een horizontale asymptoot $y = a$ als:
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ en/of $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$
- De functie f heeft een verticale asymptoot $x = a$ als:
  $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \pm\infty$ en/of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \pm\infty$



Figuur 2

Soms lijkt een functie een verticale asymptoot te hebben (bijvoorbeeld voor $x = a$ is de noemer 0), maar leveren de bijbehorende limieten toch een waarde op. In dat geval spreek je van een perforatie als die waarden hetzelfde zijn. Zijn ze verschillend dan heeft de grafiek een sprong.

Je kent de volgende standaardlimieten al:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

  $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ voor n oneven

  $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ voor n even
- $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$ voor $0 < g < 1$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$ voor $g > 1$
- $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = \infty$ voor $0 < g < 1$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = -\infty$ voor $g > 1$
- $\lim\limits_{x \uparrow \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi} \tan(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \downarrow \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi} \tan(x) = -\infty$

Om te bedenken waar precies de asymptoten zouden kunnen zitten, moet je de grafieken van de standaardfuncties goed kennen. En verder bij samengestelde functies bedenken of ze zijn ontstaan door transformatie van een standaardfunctie, of anderszins op bepaalde standaardfuncties lijken.

Opgave 1

Geef van de functies aan hoe ze uit de standaardgrafiek zijn ontstaan en waar de asymptoten liggen. Geef ook de limieten van deze functies als ze de asymptoten naderen.

a $f(x) = -3\ln(x+2)$

b $g(x) = \frac{2}{(x-5)^2} + 1$

c $h(x) = 3^{2-x}$

d $j(x) = 1 - \tan(2x)$

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Deze functie is niet door transformaties uit een standaardfunctie af te leiden.

a Deze functie heeft twee verticale asymptoten. Welke lijnen zijn dat en hoe kun je die vinden?

b Toon de verticale asymptoten van functie f met behulp van limieten aan.

Gegeven is de functie: $g(x) = \frac{x}{x^2-x}$.

c Waarom is functie g niet gelijk aan $h(x) = \frac{1}{x-1}$?

d Welke limieten horen bij functie g? Wat betekent dit voor de grafiek van f?

Opgave 3

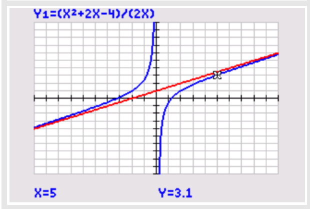
Gegeven is de functie: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

a Beargumenteer of f wel of geen horizontale asymptoot heeft. Zo ja, geef deze.

b Heeft functie f een verticale asymptoot op $x = 0$? Leg uit waarom wel of niet.

Uitleg 2

Bekijk de grafiek van de functie: $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{2x}$.



Figuur 3

Je kunt het functievoorschrift schrijven als: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x}$.

De verticale asymptoot is gelijk aan $x = 0$ wat je met limieten kunt nagaan.

Hoe verder de x-waarden van de verticale as af liggen, hoe dichter de grafiek bij een rechte schuine lijn komt.

Deze lijn heet de scheve (of schuine) asymptoot van f.

Aan het functievoorschrift kun je zien dat deze asymptoot de vergelijking $y = \frac{1}{2}x + 1$ heeft, want

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$$

Dus voor x-waarden ver van 0 is $f(x) \approx \frac{1}{2}x + 1$. Hetzelfde geldt voor $x \to -\infty$.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Laat zien dat $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x}$.

b Toon aan dat de scheve asymptoot van f de functie nergens snijdt.

Opgave 5

De volgende functies hebben een scheve asymptoot. Toon dit aan en bepaal de vergelijking van deze asymptoot.

a $f(x) = -\frac{1}{3}x + 25 - \frac{1}{x^2}$

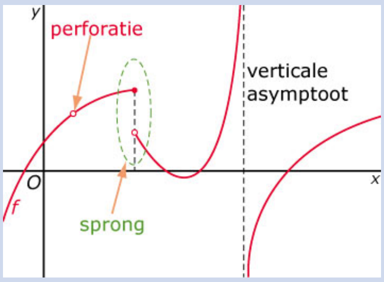
b $g(x) = \frac{3x^2+1}{x}$

c $h(x) = \frac{x^2+5x+4}{x+5}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Veel functies hebben asymptoten. Er zijn verschillende soorten:



Figuur 4

- **horizontale asymptoten**:
  Een functie f heeft een horizontale asymptoot $y = c$ als er een constante waarde c bestaat waarvoor
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$ en/of $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.
  Gebroken functies (standaardvorm $y = \frac{1}{x^n}$ met $n > 0$ en geheel) en exponentiële functies (standaardvorm $y = g^x$) hebben een horizontale asymptoot.
- **verticale asymptoten**:
  Een functie f heeft een verticale asymptoot $x = a$ als er een constante waarde a bestaat waarvoor
  $\lim_{x\uparrow a} f(x) \to -\infty$ of $\lim_{x\uparrow a} f(x) \to \infty$ en/of $\lim_{x\downarrow a} f(x) \to -\infty$ of $\lim_{x\downarrow a} f(x) \to \infty$.
  Gebroken functies, logaritmische functies (standaardvorm $y = {}^{g}\log(x)$) en de tangensfunctie hebben verticale asymptoten.

- **scheve asymptoten**:
  Een functie f heeft een scheve asymptoot $y = ax + b$ als
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ en/of $\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$.
  Bij gebroken functies kun je vaak de schuine asymptoot vinden door het functievoorschrift te herleiden.

Sommige functies hebben een **perforatie**.

Een functie f heeft een perforatie met coördinaten (a,c) als $f(a)$ niet gedefinieerd is en er een constante waarde c bestaat waarvoor $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = c$.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies:

- $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$
- $g(x) = \text{e}^{-3x+6} + 15$
- $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Bepaal van deze functies met behulp van transformaties en limieten alle asymptoten en perforaties.

Antwoord

- $f(x) = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ mits $x \neq -1$.

  Functie f ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$ na een horizontale translatie van 1.

  Er geldt: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$

  en $\lim_{x \uparrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$ en $\lim_{x \downarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

  en $\lim_{x \uparrow -1} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$
  De functie f heeft dus een horizontale asymptoot $y = 0$, een verticale asymptoot $x = 1$, en een perforatie op $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

- $g(x) = \text{e}^{-3(x-2)} + 15$
  Functie g ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \text{e}^x$ na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $-\frac{1}{3}$, waarbij de grafiek verticaal gespiegeld is, een horizontale translatie van 2 en een verticale translatie van 15.
  Er geldt: $\lim_{x \to \infty} g(x) = 15$
  De functie g heeft dus een horizontale asymptoot $y = 15$.

- $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$
  Functie h ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \ln(x)$ na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met -1, waarbij de grafiek gespiegeld is.
  Er geldt: $\lim_{x \uparrow 0} h(x) = -\infty$
  De functie h heeft dus een verticale asymptoot $x = 0$.

Opgave 6

Onderzoek met behulp van limieten of de functies asymptoten of perforaties hebben.

a $f(x) = \frac{\text{e}^{3x} + 5}{\text{e}^{3x}}$

b $g(x) = \ln(1 - 4x)$

c $h(x) = \tan\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}x\right)$

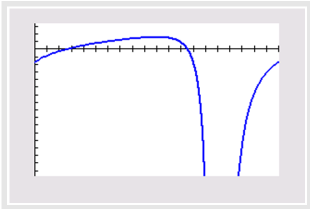
d $k(x) = \frac{2x}{x^2+3x}$

Voorbeeld 2

Gegeven is: $f(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+1}$

Plot de grafiek en geef de vergelijkingen van de asymptoten.

Antwoord



Figuur 5

Venster bijvoorbeeld: $[0,2\pi] \times [-10,2]$.
f is een gebroken goniometrische functie.

De functie is ongedefinieerd als $\sin(x) + 1 = 0$.

Hieruit volgt: $\sin(x) = -1$ en dit geeft $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ en

$\lim_{x \uparrow 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi} f(x) = \lim_{x \downarrow 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi} f(x) = -\infty$.

De functie f heeft dus een verticale asymptoten $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Deze functie heeft geen horizontale of schuine asymptoot omdat de waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ tussen -1 en 1 blijven schommelen.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$ en $g(x) = \frac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}$.

a Bepaal de asymptoten van f.

b Bepaal de asymptoten van g.

c Verklaar de verschillen tussen je antwoorden bij a en b.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

a Plot de grafiek van f.

b Geef de vergelijkingen van de asymptoten.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{-x^3+12x^2+4}{4x^2}$.

Toon aan dat deze functie een schuine asymptoot heeft en bepaal de vergelijking hiervan.

Antwoord

$f(x) = \frac{-x^3+12x^2+4}{4x^2} = -\frac{1}{4}x + 3 + \frac{1}{x^2}$

Het lijkt er op dat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ de vergelijking van de scheve asymptoot is.

Ter controle:

$\lim_{x\to -\infty}\left(f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + 3\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + 3\right)\right) = 0$

Je kunt ook naar de afgeleide kijken.

Omdat $f'(x) = -\frac{1}{4} - \frac{2}{x^3}$ en $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} f'(x) = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$ heeft de functie f een scheve asymptoot. Immers de helling van de grafiek benadert $-\frac{1}{4}$ als $x \to \pm\infty$.

Opgave 9

Toon de scheve asymptoot van de functie aan met een limiet en bepaal de vergelijking van de asymptoot.

a $f(x) = \frac{5}{x-2} + 4(x-5)$

b $g(x) = \frac{-2x^2+4}{x}$

c $h(x) = \frac{3x^2-4x-2}{x-2}$

d $k(x) = 5 - 2x + \mathrm{e}^{1-x}$

Opgave 10

De grafiek van $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ heeft twee scheve asymptoten.

a Er geldt: $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2}$.

Leg dit uit.

b Welke scheve asymptoot heeft f voor $x \to \infty$?

c Welke scheve asymptoot heeft f voor $x \to -\infty$?

Verwerken

Opgave 11

Bepaal met behulp van limieten de asymptoten en perforaties van de functies.

a $f(x) = \frac{5x}{x(x-4)}$

b $g(x) = \frac{3x(x+2)}{x}$

c $h(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{1-x}$

Opgave 12

Bepaal met de limieten de asymptoten van de functies.

a $f(x) = \frac{1}{2\cos^2(x)-1}$

b $g(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$

c $h(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

d $k(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

Opgave 13

Toon de scheve asymptoot van de functie aan met een limiet en bepaal de vergelijking van de asymptoot.

a $f(x) = \frac{5}{x-2} + 4(x-5)$

b $g(x) = \frac{-2x^2+4}{x}$

c $h(x) = 5 - 2x + e^{1-x}$

Opgave 14

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{e^x} + x$.

a Plot de grafiek van de functie.

b Functie f heeft een scheve asymptoot. Gebruik een limiet om hiervan de vergelijking te bepalen.

Opgave 15

Toon aan dat de asymptoten van de functie $f(x) = \ln(e^x + 1) - x + 1$ de lijnen $y = 1$ en $y = 1 - x$ zijn.

Opgave 16

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^3+2x^2-5x+4}{x}$.

a Plot de functie.

b De functie heeft een grafiek met een zogenaamde parabolische asymptoot. Bepaal de vergelijking van de parabool waar f naartoe loopt, en plot deze bij de grafiek van a.

Toepassen

Opgave 17: Condensatorspanning

Een condensator is een elektrische component waarin je elektrische lading kunt opslaan.
Iemand heeft een elektrisch circuit met één condensator gemaakt waarin geldt: als de lege condensator wordt opgeladen, neemt de condensatorspanning toe van 0 tot een limietspanning volgens de formule:

$$U = 12 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2000C}}\right)$$

Hierin is U de condensatorspanning in volt, t de oplaadtijd in seconden en C de capaciteit van de condensator in farad.

a Een condensator met een capaciteit van 0,01 farad wordt in dit circuit opgeladen. Na verloop van tijd benadert de condensatorspanning een limietspanning. Bepaal deze limietspanning.

b Bereken algebraïsch hoelang het duurt voordat de condensatorspanning 90% van de limietspanning is. Rond je antwoord af op hele seconden.

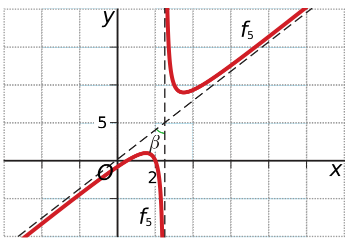
(bron: examen vwo wiskunde B in 2010, eerste tijdvak)

Opgave 18: Asymptoten en perforatie

Voor elke waarde van a wordt de functie gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{4x^2-10x+4}{2x-a} \text{ met } x \neq \tfrac{1}{2}a$$

De grafiek van f_5 heeft een verticale asymptoot en een scheve asymptoot. De twee asymptoten snijden elkaar onder een hoek β met β in graden. In de figuur is de grafiek van f_5 met de asymptoten en hoek β weergegeven.



Figuur 6

a Bereken algebraïsch de waarde van β.

Er zijn waarden van a, zoals $a = 5$ (zie figuur), waarvoor de grafiek van f_a twee toppen heeft. De top met de kleinste x-coördinaat heet de linkertop.
Er is een waarde van a waarvoor de linkertop op de y-as ligt.

b Bereken exact voor welke waarde van a de linkertop op de y-as ligt.

c Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een lijn met een perforatie is.

Bereken exact, voor de grootste van die twee waarden van a, de coördinaten van de perforatie.

Testen

Opgave 19

Bepaal met behulp van limieten de asymptoten en de perforaties van de functies.

a $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2x} + 5$

b $g(x) = \text{e}^{3x-5}$

c $h(x) = \ln(2x) + 1$

Opgave 20

Bepaal de vergelijking van de scheve asymptoot van de functie.

a $f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x - 1}$

b $g(x) = 4x + \frac{2}{3^x}$