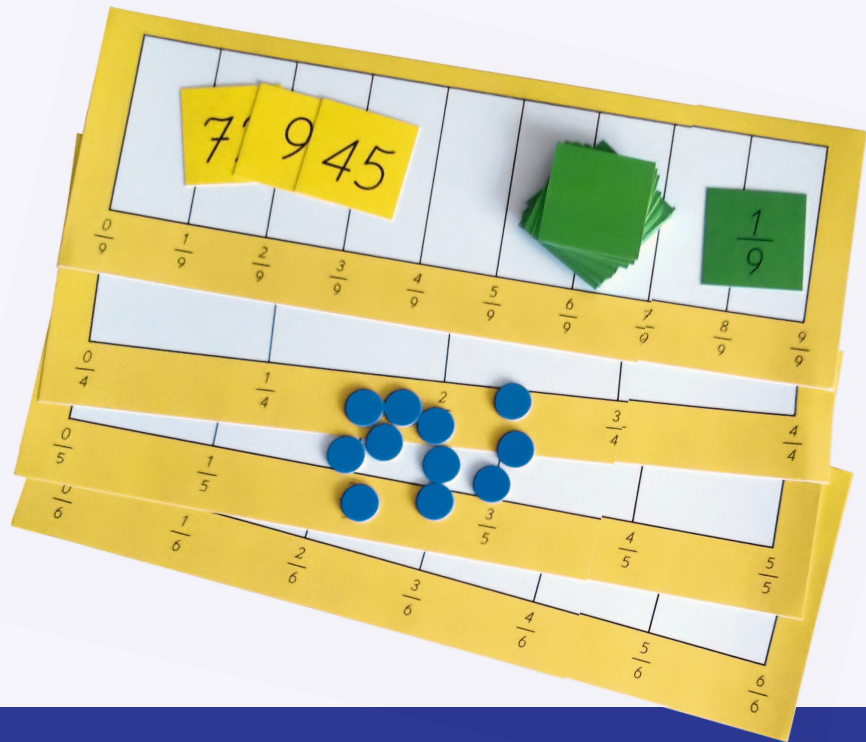
Für Lehrerinnen und Lehrer

Mathe sicher können

Auszug
"B3 - Brüche und Prozente ordnen" aus:

Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen



Brüche, Prozente, Dezimalzahlen

Ermöglicht durch
Deutsche Telekom Stiftung

Cornelsen

Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

9783060065363 U1+U4.indd 1
23.01.14 11:39

So funktioniert das Diagnose- und Förderkonzept

In den 16 Diagnose- und Förderbausteinen erarbeiten Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern wichtige Basiskompetenzen.

16 Basiskompetenzen
gliedern die Bausteine und verbinden Diagnose und Förderung.

Standortbestimmung – Baustein B4 A

Kann ich Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$ Rechnung:

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:

c) Rechne aus: $\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{\square}{\square}$ Rechnung:

Diagnose:
Mit 2 bis 4 Aufgaben in der Standortbestimmung stellen Sie fest, was die Lernenden schon können.

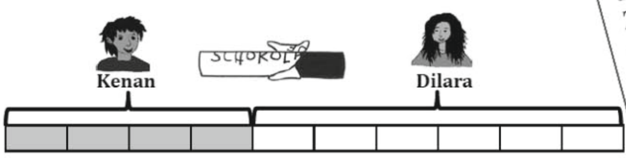
Die Standortbestimmungen befinden sich im hinteren Teil dieser Handreichungen als Kopiervorlage.

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

1.1 Anteile und Aufgaben beim Verteilen sehen

a) Welchen Anteil bekommt jeder? Mit welchen Plus- und Minus-Aufgaben kann man
- den ganzen Schokoriegel
- Kenans oder Dilaras Anteil vom Schokoriegel

beschreiben?



b) Finde weitere Möglichkeiten, wie Dilara und Kenan den Schokoriegel oben teilen können. Schreibe wie in a) passende Aufgaben auf.

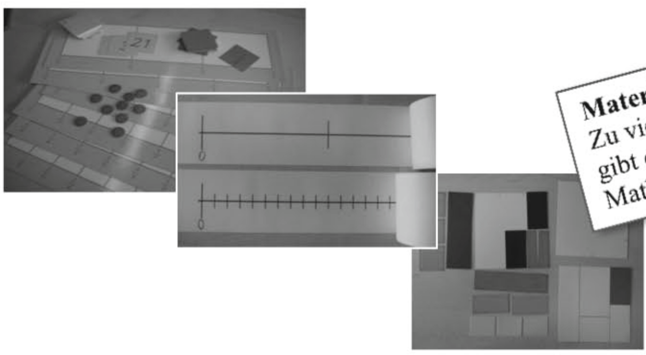
c) Emily und Maurice haben auch Aufgaben geschrieben und gezeichnet:

Emily: $\frac{5}{5} + \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$

Maurice: $\frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10}$

Förderung:
Zu jeder Diagnoseaufgabe gibt es eine passende Fördereinheit, die differenziert und gemeinsam bearbeitet wird.

Die Fördereinheiten sind in einem eigenen Förderheft abgedruckt und in dieser Handreichung erläutert.



Material:
Zu vielen Förderaufgaben gibt es Material, mit dem man Mathe besser verstehen kann.

Tipps zum Material sind in dieser Handreichung.
Viele Materialien befinden sich im zugehörigen Materialkoffer von Cornelsen Experimenta

9783060065363 U2+U3.indd 2 23.01.14 11:41

Mathe sicher können

Handreichungen
für ein Diagnose- und Förderkonzept
zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen

Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

Herausgegeben von
Susanne Prediger
Christoph Selter
Stephan Hußmann
Marcus Nührenbörger

Entwickelt und Erprobt von
Stephan Hußmann
Birte Pöhler
Susanne Prediger
Andrea Schink
Lara Sprenger

Erarbeitet an der Technischen Universität Dortmund
im Rahmen von `Mathe sicher können´, einer Initiative der Deutsche Telekom Stiftung.

technische universität
dortmund

Deutsche
Telekom
Stiftung

Herausgeber: Susanne Prediger, Christoph Selter, Stephan Hußmann, Marcus Nührenbörger
Autorinnen und Autoren: Stephan Hußmann, Birte Pöhler, Susanne Prediger, Andrea Schink, Lara Sprenger

Redaktion: Corinna Mosandl, Birte Pöhler, Lara Sprenger
Illustration der Figuren: Andrea Schink
Alle sonstigen Bildrechte für Illustrationen und technische Figuren liegen bei den Herausgebern.

Umschlaggestaltung: Corinna Babylon

Unter der folgenden Adresse befinden sich multimediale Zusatzangebote:
www.mathe-sicher-koennen.de/Material

Die Links zu externen Webseiten Dritter, die in diesem Lehrwerk angegeben sind, wurden vor Drucklegung sorgfältig auf ihre Aktualität geprüft. Der Verlag übernimmt keine Gewähr für die Aktualität und den Inhalt dieser Seiten oder solcher, die mit ihnen verlinkt sind.

1. Auflage, 1. Druck 2014

Druck: DBM Druckhaus Berlin-Mitte GmbH

ISBN 978-3-06-006536-3

PEFC
PEFC/04-31-2206

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.
www.pefc.de

Dieses Dokument enhält folgenden Auszug:

Inhaltsverzeichnis der Handreichungen Brüche, Prozente und Dezimalzahlen

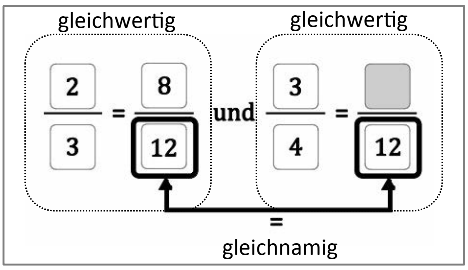
B3 A Brüche gleichnamig machen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Das Herstellen gleichnamiger Brüche ist eine Voraussetzung für ein formales Vergleichen bzw. Ordnen sowie für die Addition und Subtraktion *beliebiger Brüche*. Zentrale Voraussetzung ist ein inhaltliches Verständnis der Gleichwertigkeit von Brüchen (siehe Baustein **B2 A**) sowie das Erweitern und Kürzen (siehe Baustein **B2 B**).

Zusammenhang von gleichnamig und gleichwertig

Die Begriffe *gleichnamig* und *gleichwertig* sind für Lernende aufgrund der sprachlichen Nähe nicht immer leicht zu unterscheiden und hängen im Prozess zusammen:



Abgrenzung: gleichnamig und gleichwertig

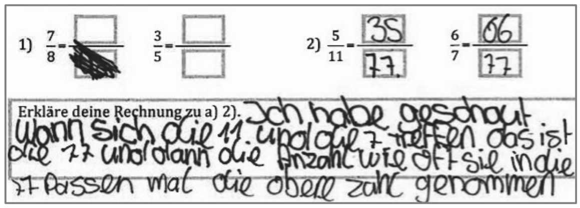
Will man zwei Brüche, 2/3 und 3/4 etwa, gleichnamig machen, so sucht man einen gemeinsamen Nenner für beide Brüche, im Beispiel die 12. Dann werden zu beiden Ausgangsbrüchen die gleichwertigen Brüche gesucht mit Nenner 12, also 8/12 und 9/12, diese sind dann zueinander gleichnamig. Gleichwertig und gleichnamig sind also Relationen zwischen den vier beteiligten Brüchen, die die Abbildung zusammenfassend zeigt.

Gleichwertige Brüche beschreiben denselben Anteil, gleichnamige Brüche in der Regel nicht. Lernende sollen beim Notieren der Brüche darauf achten, dass das Gleichheitszeichen nur zwischen den gleichwertigen Brüchen steht und nicht die Beziehung zwischen den Brüchen mit gleichen Nennern angibt.

Gleichnamige Brüche herstellen

Gleichnamige Brüche lassen sich auf verschiedenen Wegen herstellen: Anschaulich in der Streifentafel (siehe *Streifentafel*) oder über das Ausnutzen von Zahlbeziehungen. Den Vorgehensweisen, die auf Zahlbeziehungen zurückgreifen, liegt strukturell und vorstellungsmäßig das Erweitern und Kürzen bzw. Verfeinern und Vergröbern zugrunde. Die Besonderheit besteht dabei darin, *dass spezielle gleichwertige Brüche für zwei unterschiedliche Brüche gleichzeitig gesucht werden*.

Da viele rechenschwache Lernende über das Konzept des kleinsten gemeinsamen Vielfachen nicht sicher verfügen, erfolgt das Suchen des gemeinsamen Nenners mithilfe der *Vielfachenreihen* der Nenner: Treffen sich die Reihen, so kann diese Zahl als gemeinsamer Nenner genutzt werden – die Zähler müssen entsprechend oft vervielfacht werden, d.h. Zähler und Nenner müssen mit demselben Faktor erweitert werden.



Gleichnamige Brüche über Reihen finden

Ein zweiter Weg zum Finden gleicher Nenner ist die Multiplikation der Ausgangsnenner. Dieser Weg funktioniert immer und schneller als die *Vielfachenreihen*, liefert aber für nicht-teilerfremde Ausgangsnenner etwas größere Zahlen: Will man etwa zu 4/12 und 2/8 gleichnamige Brüche finden, so ergibt sich über die Multiplikation der Ausgangsnenner der gemeinsame Nenner 96. Wenn man die Reihen durchgeht, landet man schon beim gemeinsamen Nenner 24 (kleinstes gemeinsames Vielfaches von 12 und 8), der deutlich kleiner und leichter zu handhaben ist. Durch vorheriges Kürzen (2/8 = 1/4) erhält man sogar gleichnamige Brüche mit dem noch kleineren Nenner 12 (4/12 und 3/12).

Der Schritt des vorherigen Kürzens wird in der Förderung allerdings nicht systematisch angeleitet: Es wird vielmehr Wert darauf gelegt, dass Lernende das Gleichnamigmachen *inhaltlich verstehen* und für beliebige Brüche überhaupt gleichnamige Brüche herstellen können.

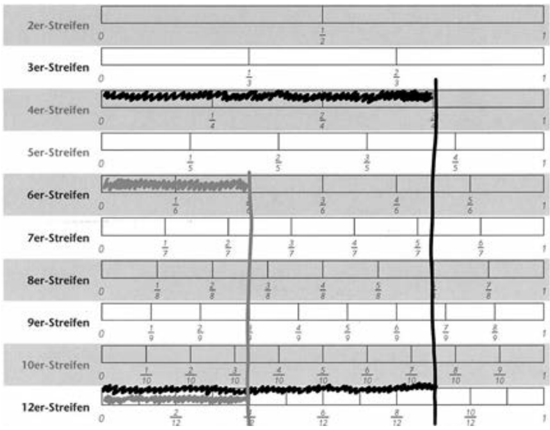
Schwierigkeiten mit dem Gleichnamigmachen

Aus struktureller Perspektive zeigen sich beim Gleichnamigmachen teilweise dieselben Schwierigkeiten wie beim Erweitern und beim Kürzen (siehe Baustein **B2 B**): Manche Lernende beziehen so z.B. den Erweiterungsfaktor, den sie für den Nenner gefunden haben, nicht mathematisch korrekt auf den Zähler. Manche Lernende multiplizieren Zähler und Nenner der beiden Brüche jeweils miteinander und verwechseln damit eventuell auch *gleich*, d.h. *identisch,* mit *gleichnamig*. Hier zeigt sich auch u.U. die Unsicherheit darüber, wie Zusammenhänge zwischen vier Brüchen hergestellt werden müssen.

Veranschaulichung und Material

Streifentafel

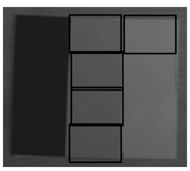
Die Streifentafel ist auch in dieser Einheit das zentrale Darstellungsmittel. Durch den Fokus auf besondere gleichwertige Anteile zu jeweils zwei Anteilen (d.h. Beziehungen zwischen vier Brüchen, s.o.) wird der Umgang mit ihr jedoch etwas komplexer, da gleichzeitig zu *zwei Anteilen* gleichwertige Anteile gefunden werden müssen. Treffen sich die Markierungen für die jeweils gleichwertigen Anteile in einem Streifen, d.h. passt die Markierung eines Streifens zu beiden Anteilen, so hat man einen gemeinsamen Nenner gefunden: Am Beispiel von 3/4 und 2/6 sieht man so z.B., dass der 12er-Streifen der erste gemeinsame Streifen ist. Im 9er-Streifen kann man zwar 2/6, aber nicht 3/4 darstellen und im 8er-Streifen kann man zwar 3/4, aber nicht 2/6 einzeichnen (siehe Abbildung). Gleichnamige Anteile sind so z.B. 4/12 und 9/12.

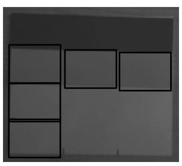


Gleichnamige Brüche mit der Streifentafel finden

Bruchpuzzle

Das Bruchpuzzle dient erneut dazu, der eher linearen Vorstellung, die die Streifen der Streifentafel betonen, durch eine echt flächige Darstellung zu erweitern. Hier lässt sich das Gleichnamigmachen ebenfalls durch eine gemeinsame Strukturierung erklären.





Gemeinsamer Nenner für 1/3 und 1/4: 12

Aufbau der Förderung

Fördereinheit 1 (Gleichnamige Brüche mit Streifen finden) nutzt den vorstellungsorientierten Zugriff aus Baustein **B2 A** (Gleichwertigkeit) an der Streifentafel: Die Lernenden erarbeiten anhand dieses Anschauungsmittels, was Gleichnamigkeit von Brüchen anschaulich bedeutet und verknüpfen dieses Wissen mit dem bereits bekannten Verfahren des Verfeinerns / Erweiterns, indem die Strukturierung der Streifen betrachtet wird. Gleichzeitig werden eine Abgrenzung der Begriffe sowie eine Erweiterung auf echt flächige Anschauungsmittel vorgenommen.

Die Reichweite des Anschauungsmittels ist insofern begrenzt, als es nur eine gewisse Anzahl an Streifen darstellt – zum Gleichnamigmachen beliebiger Brüche müssen so weitere allgemeinere Verfahren eingeführt und inhaltlich plausibel gemacht werden. Dazu findet in **Fördereinheit 2 (Gleichnamige Brüche berechnen)** eine sukzessive, in Fördereinheit 1 kurz angedachte (Aufgabe 1.2), Loslösung vom Material statt: Reicht die Streifentafel nicht mehr, so müssen neue Wege zum Finden gleichnamiger Brüche beschritten werden: Hier werden den Lernenden die Betrachtung von Vielfachenreihen des Nenners und das meist schnellere Verfahren des Multiplizierens der Nenner angeboten, die rückblickend an der Streifentafel begründet werden. Diese Wege werden nicht als starre Verfahren eingeführt. Stattdessen werden die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt, auch auf anderen Wegen (z.B. durch das – hier nicht systematisch angeleitete – Finden kleinerer Vielfache) gleichnamige Brüche zu finden.

Den Abschluss bilden Übungen zum Automatisieren und Systematisieren des Findens von gleichnamigen Brüchen.

Gleichnamige Brüche herstellen

Weiterführende Literatur

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 27ff.

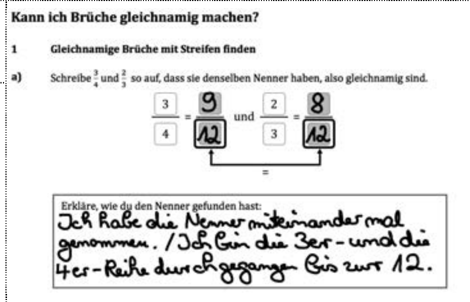
Prediger, S. (2011): Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. In: Der Mathematikunterricht 57(3), 5 - 14.

B3 A – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 25 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

Das Erklären des Vorgehens fällt manchen Lernenden schwer. Hier hilft es oft, Lernende dazu zu ermuntern, das aufzuschreiben, was sie denken.



Kann ich Brüche gleichnamig machen?

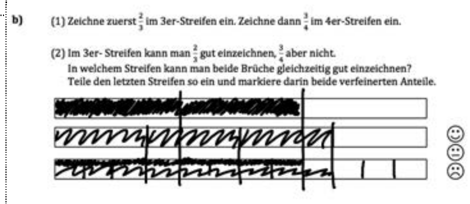
1 Gleichnamige Brüche mit Streifen finden

a) Schreibe $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ so auf, dass sie denselben Nenner haben, also gleichnamig sind.

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ und $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Erkläre, wie du den Nenner gefunden hast:
Ich habe die Nenner miteinander mal genommen. / Ich bin die 3er- und die 4er-Reihe durchgegangen bis zur 12.

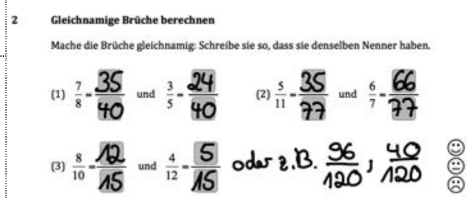
1 b) ist für Lernende u.U. ungewohnt. Hier hilft es, sie darauf hinzuweisen, dass der untere Streifen neu eingeteilt werden soll, sodass man gleichzeitig 2/3 und 3/4 gut einzeichnen kann.



b) (1) Zeichne zuerst $\frac{2}{3}$ im 3er-Streifen ein. Zeichne dann $\frac{3}{4}$ im 4er-Streifen ein.

(2) Im 3er-Streifen kann man $\frac{2}{3}$ gut einzeichnen, $\frac{3}{4}$ aber nicht.
In welchem Streifen kann man beide Brüche gleichzeitig gut einzeichnen?
Teile den letzten Streifen so ein und markiere darin beide verfeinerten Anteile.

In (3) können die Brüche weiter gekürzt werden. Hierauf sollten Lernende jedoch nicht extra hingewiesen werden, damit mehr über ihr eigenes Vorgehen in Erfahrung gebracht werden kann.



2 Gleichnamige Brüche berechnen

Mache die Brüche gleichnamig: Schreibe sie so, dass sie denselben Nenner haben.

(1) $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ und $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$

(2) $\frac{5}{11} = \frac{35}{77}$ und $\frac{6}{7} = \frac{66}{77}$

(3) $\frac{8}{10} = \frac{12}{15}$ und $\frac{4}{12} = \frac{5}{15}$ oder z.B. $\frac{96}{120}$, $\frac{40}{120}$

Hinweise zur Auswertung:

Diagnoseaufgabe 1: Gleichnamige Brüche mit Streifen finden

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a)	$\frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ und $\frac{2}{3} = \frac{6}{12}$ Erkläre, wie du den Nenner gefunden hast: Ich habe 3·2 gerechnet das sind 6 und dan hab ich noch 4·3 gerechnet das sind ja 12.	Die Zähler und die Nenner werden jeweils multipliziert, d.h. der Weg zum Finden des Nenners wird auch auf die Zähler übertragen und die Gleichwertigkeit wird aus den Augen verloren.	Festigen des Zusammenhangs von Zähler und Nenner in der Streifentafel. Erarbeiten der Struktur der Streifen (1.1). Vertiefen des Zusammenhangs von Zähler und Nenner über die Betrachtung verschiedener Brüche (1.2). Danach Begriffe sichern und flexibilisieren (1.3).
	Es wird nur der Nenner gefunden.	Es besteht Unsicherheit darin, wie der Zähler aus der Kenntnis des Nenners bestimmt werden muss.	
	z.B. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ und $\frac{2}{3} = \frac{6}{12}$	Beide Zähler werden mit derselben Zahl multipliziert.	
	$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$ und $\frac{2}{3} = \frac{14}{24}$ Erkläre, wie du den Nenner gefunden hast: Ich habe die nechsten gemeinsamen nemer gesucht 24 und dan die oberzahl sooft mal genomen wie den nenner	Es wird ein richtiger Nenner gefunden. Der Erweiterungsfaktor wird vermutlich falsch berechnet.	Thematisieren der Vielfachenreihen (2.1). Ggf. Kalkül üben (2.5).
b)	Es werden andere Anteile eingezeichnet.	Schwierigkeiten beim inhaltlichen Interpretieren des Gleichnamigmachens in Streifen.	Erarbeiten der anschaulichen Grundlagen des Gleichnamigmachens (1.1). Ggf. Gleichwertigkeit von Brüchen als notwendigen Schritt zum Finden gleichnamiger Brüche erarbeiten (**B2 A**).
	Es wird keine passende gemeinsame Einteilung gefunden.		

Diagnoseaufgabe 2: Gleichnamige Brüche berechnen

Typische Fehler		**Mögliche Ursache**	**Förderung**
a), b)	2) 11 $\frac{5}{11} = \frac{55}{55}$ 5 7 $\frac{6}{7} = \frac{42}{42}$ 6	Zähler und Nenner werden pro Bruch miteinander multipliziert. U.U. wird *gleichnamig* auf die Identität von Zähler und Nenner bezogen. Bzw. Unsicherheit mit dem Begriff Nenner (d.h. keine Bewusstheit dafür, dass der Nenner nicht dasselbe wie der Zähler ist).	Erarbeiten der anschaulichen Grundlagen (1.1 - 1.3). Erarbeiten verschiedener Verfahren des Herstellens von gleichnamigen Brüchen auch bei größeren Nennern (2.1 - 2.3). Üben (2.4 - 2.5).
	z.B. $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$ und $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$	Es werden jeweils gleichwertige Brüche gefunden, die aber nicht gleichnamig sind.	Erarbeiten der anschaulichen Grundlagen (1.1 - 1.3).

1 Gleichnamige Brüche mit Streifen finden

1.1 Erarbeiten (15 - 20 Minuten)

Ziel: Verstehen, was *gleichnamige Brüche* bedeutet und diese mit der Streifentafel bestimmen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA; b), c) PA, dann UG

Hintergrund: Größenvergleich beliebiger Brüche wird möglich. Komplexität wird reduziert, indem zum ersten Bruch bereits ein gleichwertiger Bruch mit geeignetem Nenner vorgegeben wird. D.h. es muss nur noch zum zweiten Bruch ein gleichwertiger Bruch mit diesem Nenner gefunden werden.

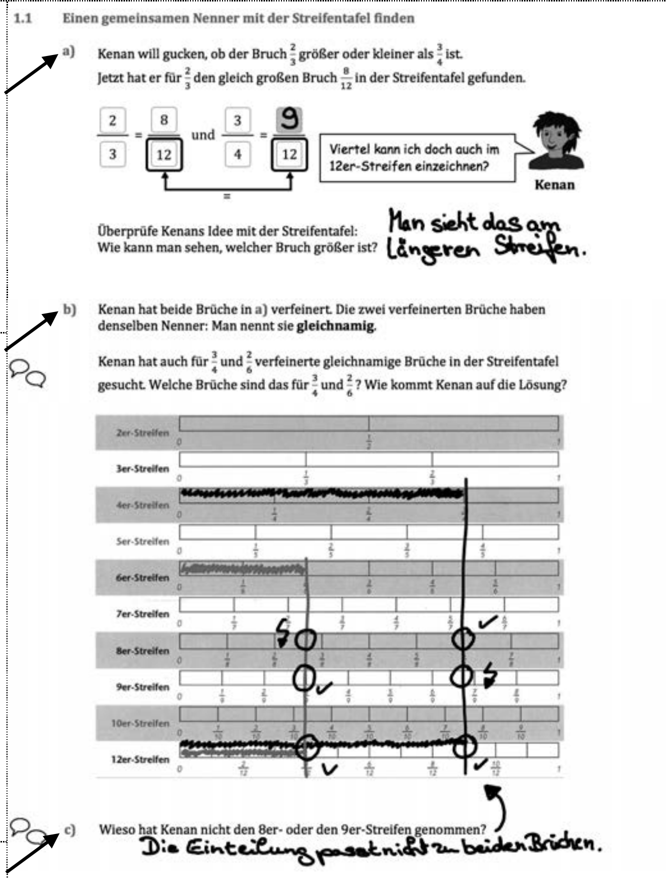
Methode: Lernende selbst zunächst in der Streifentafel suchen lassen. Erst im Anschluss das Bild in b) zu weiterem Beispiel angucken und thematisieren.

Hintergrund: Die Begriffe *gleichnamig* und *gleichwertig* (siehe **B2**) können u.U. verwechselt werden. Begriffe im ersten Zugriff voneinander abgrenzen (Systematisierung in 1.3): 2/3 und 8/12 sowie 3/4 und 9/12 sind gleichwertig, 8/12 und 9/12 sind gleichnamig.

Methode: Operative Variation der Aufgabe aus a) (2/3 → 2/6). Kann auch genutzt werden, um bei Schwierigkeiten in a) Strategie zu verstehen und zu übertragen.

Zu beachten: Nur die gleichwertigen Brüche dürfen immer wirklich gleichgesetzt werden (markiert mit einem Gleichheitszeichen). Bei gleichnamigen Brüchen betrifft die Gleichheit nur den Nenner.

Lösung: Kenan sucht einen Streifen, in dem er beide Anteile gleichzeitig gut einzeichnen kann. Unterteilung der Streifen steht für die Nenner. Alternativ wäre auch 24er-Streifen legitim.



1.1 Einen gemeinsamen Nenner mit der Streifentafel finden

a) Kenan will gucken, ob der Bruch $\frac{2}{3}$ größer oder kleiner als $\frac{3}{4}$ ist.
Jetzt hat er für $\frac{2}{3}$ den gleich großen Bruch $\frac{8}{12}$ in der Streifentafel gefunden.

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ und $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

Viertel kann ich doch auch im 12er-Streifen einzeichnen?

Kenan

Überprüfe Kenans Idee mit der Streifentafel:
Wie kann man sehen, welcher Bruch größer ist? Man sieht das am längeren Streifen.

b) Kenan hat beide Brüche in a) verfeinert. Die zwei verfeinerten Brüche haben denselben Nenner: Man nennt sie **gleichnamig**.

Kenan hat auch für $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{6}$ verfeinerte gleichnamige Brüche in der Streifentafel gesucht. Welche Brüche sind das für $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{6}$? Wie kommt Kenan auf die Lösung?

c) Wieso hat Kenan nicht den 8er- oder den 9er-Streifen genommen?
Die Einteilung passt nicht zu beiden Brüchen.

1.2 **Üben (20 - 30 Minuten)**

Ziel: Gleichnamige Brüche mit der Streifentafel bestimmen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) EA, dann PA, dann UG; b) UG

Lösung: Beurteilung individuell, z.B.
Blick auf Zahlbeziehungen:
Teilerfremde Nenner: (1), (2), (3), (4), (9), (10)
Nenner, die Vielfache voneinander sind: (6), (7)
Nicht-teilerfremde Nenner, keine Vielfache: (5), (8)
Blick auf Darstellungsmittel / Produkt der Nenner:
Produkt der Nenner in Streifentafel: (1), (2), (3), (4)
Streifentafel „reicht nicht“: (5), (6), (7), (8), (9), (10)

Zu beachten: Auf die Schreibweise achten. „=“ steht nur zwischen gleichwertigen Brüchen.

1.2 Gleichnamige Brüche mit der Streifentafel finden

a) Mache in jeder Teilaufgabe beide Brüche gleichnamig:
Verfeinere also beide Brüche auf den gleichen Nenner.

(1) $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{3}$ (5) $\frac{4}{9}$ und $\frac{2}{6}$

(6) $\frac{2}{4}$ und $\frac{4}{8}$ (7) $\frac{1}{3}$ und $\frac{4}{6}$ (8) $\frac{3}{6}$ und $\frac{6}{8}$ (9) $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{9}$ (10) $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$

Vergleicht eure Lösungen:
- Wo ist es leichter, wo schwerer, Brüche mit gleichem Nenner zu finden?
- Wo gibt es mehrere Möglichkeiten? Warum?
- Findet ihr auch noch andere Wege als Kenan, gleichnamige Brüche zu bestimmen?

Lösung: (9) und (10) nicht lösbar in Streifentafel. Hier kann am Vergröbern / Verfeinern bzw. Erweitern / Kürzen angedockt bzw. es können andere Wege der Lernenden aufgegriffen werden.

b) Was machst du, wenn die Streifentafel nicht ausreicht?
Schaue dir die Brüche aus a) an: Was haben die Streifen, in denen man gemeinsame Nenner findet, mit den Brüchen zu tun?

1.3 **Erarbeiten (20 - 30 Minuten)**

Ziel: Begriffe gleichnamig und gleichwertig abgrenzen; Gleichnamigkeit in flächiger Darstellung erzeugen

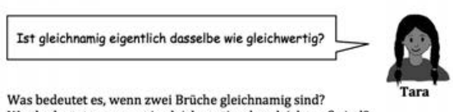
Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte, Bruchpuzzle

Umsetzung: a), b) UG; c) PA, dann UG

Hintergrund: Begriffliche Abgrenzung

1.3 Gleichnamig und gleichwertig

a)



Was bedeutet es, wenn zwei Brüche gleichnamig sind?
Was bedeutet es, wenn sie gleichwertig, also gleich groß sind?
Vergleiche dazu diese vier Brüche:

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{2}{4}$ (3) $\frac{6}{8}$ (4) $\frac{10}{20}$

Zu beachten: Dass gleichnamige, gleich große Brüche identisch sind, kann Lernende irritieren.

b) Finde in der Streifentafel jeweils zwei Brüche, die
- gleichnamig, aber nicht gleich groß sind. z.B $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$
- gleichnamig und gleich groß sind. Die Brüche sind gleich!
- nicht gleichnamig, aber gleich groß sind. z.B. $\frac{2}{8}$, $\frac{6}{24}$

Methode: Lässt sich gut zu zweit oder zu dritt mit den drei entstehenden Bildern klären: Je zwei oder drei Lernende legen ihr Puzzlefeld mit den Dritteln oder den Vierteln aus. Legt man die gefüllten Grundflächen nebeneinander und stellt sie sich übereinandergelegt vor, entstehen durch die neue Einteilung Zwölftel, die ebenfalls im Material zu finden sind. Mit Zwölfteln kann man Drittel und Viertel jeweils auslegen (2/3 = 8/12, d.h. gleichwertige Brüche; 2/4 = 6/12, d.h. gleichwertig; 8/12 und 6/12 werden beide mit denselben Puzzleteilen gelegt, d.h. gleichnamig).

c) Welche Brüche wurden hier gelegt?
Mit welchen Puzzleteilen kann man beide Anteile und das Quadrat auslegen?
Was hat das mit gleichnamigen Brüchen zu tun?

2 Gleichnamige Brüche berechnen

2.1 Erarbeiten (40 - 45 Minuten)

Ziel: Gleichnamige Brüche über die Betrachtung von Zahlreihen bestimmen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) UG; b) EA, dann UG; c) PA, dann UG

Hintergrund: Mal-Reihe durchgehen bedeutet, von oben nach unten in der Streifentafel zu gucken, also *Verfeinern*. Emily vollzieht dann wichtigen Schritt, die Reihe der Zähler mit zu berücksichtigen: Diese müssen in analogen Schritten verändert werden. Dazu Verfahren von Emily in Streifentafel angucken und das Verfeinern der Streifen (Erweitern) thematisieren: Mit jedem Streifen wird jedes Viertel in ein Stück mehr geteilt; 1/4 → 2/8 → 3/12.

Methode: In Gedanken Streifen durchgehen – schwer ist es bei großen Nennern bzw. bei Nennern, deren Vielfache sich spät treffen. Ggf. mit Streifen(-tafel) überprüfen.
Zu beachten: Bei nicht-teilerfremden Brüchen treffen sich *Vielfachenreihen* auch schon vor dem Produkt der Nenner. Das kann Anlass für eine kleine Untersuchung an Beispielen sein, soll aber nicht formalisiert werden.

2.1 Gleiche Nenner über Mal-Reihen finden

a) Emily hat einen gemeinsamen Nenner für die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{5}$ gesucht. Das hat sie überlegt:


Emily

$\frac{1}{4}$: 4er-Streifen, 8er-Streifen, 12er-Streifen, 16er-Streifen, $\boxed{\text{20er-Streifen,}}$ 24er ...

$\frac{3}{5}$: 5er-Streifen, 10er-Streifen, 15er-Streifen, $\boxed{\text{20er-Streifen}}$

Beschreibe, was Emily gemacht hat, um den gemeinsamen Nenner zu finden.

Wie sehen die Brüche in den einzelnen Streifen aus? Wie heißen sie? Was hat das mit Verfeinern und Erweitern zu tun?

Emily guckt, bei welcher Zahl sich die 4er- und die 5er-Reihe zum ersten Mal treffen. Diese Zahl kann man als gemeinsamen Nenner nutzen.

b) Finde wie Emily gleichnamige Brüche zu diesen Brüchen, indem du dir die Streifen vorstellst:

(1) $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{18}$ (3) $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{15}$

Wo ist es schwer, wo ist es leicht, gleichnamige Brüche zu finden?

2.2 Erarbeiten (40 - 45 Minuten)

Ziel: Gleichnamige Brüche über das Produkt der Nenner bestimmen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) PA; b) EA, dann UG

Lösung: Ricos Weg funktioniert, weil sich die Mal-Reihen treffen: 7 · 5 = 5 · 7. Der 7er- und der 5er-Streifen werden also auf denselben Streifen verfeinert. Den neuen Zähler bestimmt er analog über das Verfeinern: 3 · 5, 4 · 7.

Zu beachten: Rechnung an Streifentafel plausibel machen: Wichtig ist, Zähler und Nenner gleichmäßig zu verfeinern. Verknüpfung mit Emilys Weg (2.1) möglich: Rico springt direkt zu einem gemeinsamen Vielfachen, ohne Vielfache dazwischen anzuschauen.

Zu beachten: Andere Wege, etwa das vorherige Kürzen, sollten auch zugelassen werden. Sie sollten aber inhaltlich z.B. über das Vergröbern erklärt werden.

2.2 Gleichnamige Brüche über Multiplizieren der Nenner finden

a) Emilys Weg dauert mir zu lange. Ich multipliziere direkt die Nenner: $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{5}$, dann bekomme ich 7 · 5 = 35 als Nenner. Dann erweitere ich beide Brüche auf 35tel.

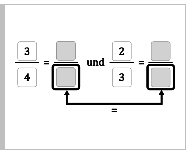

Rico

Überprüfe Ricos Weg für kleine Nenner an der Streifentafel: Warum funktioniert sein Weg? Wie bestimmt er die neuen Zähler?

b) Finde wie Rico gleichnamige Brüche:

(1) $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{6}$ (2) $\frac{2}{11}$ und $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{5}{4}$ und $\frac{4}{5}$ (4) $\frac{3}{12}$ und $\frac{2}{5}$ (5) $\frac{1}{10}$ und $\frac{3}{4}$

(1) $\frac{18}{30}$ und $\frac{20}{30}$ (2) $\frac{6}{33}$ und $\frac{22}{33}$
(3) $\frac{25}{20}$ und $\frac{16}{20}$ (4) $\frac{15}{60}$ und $\frac{24}{60}$
(5) $\frac{4}{40}$ und $\frac{30}{40}$



2.3 **Üben (20 - 30 Minuten)**

Ziel: Gleichnamige Brüche über verschiedene Zahlbeziehungen bestimmen

Material: -

Umsetzung: a) EA, dann UG; b) EA, dann UG

Zu beachten: Weitere Brüche findet man auch z.B., indem man vorher die Brüche kürzt: 6/10 = 3/5, d.h. 6/10 = 9/15.

Lösung: Man nimmt lieber Ricos Weg, wenn die Nenner teilerfremd / kleiner sind. Emilys Weg nimmt man auch gerne, wenn Nenner Vielfache voneinander sind, z.B. in (2).

2.3 Auf verschiedenen Wegen gleichnamig machen

a) Rico und Emily haben beide gleichnamige Brüche für $\frac{6}{10}$ und $\frac{4}{15}$ gesucht.


Rico

$\frac{6}{10} \overset{\cdot 15}{=} \frac{90}{150}$, $\frac{4}{15} \overset{\cdot 10}{=} \frac{40}{150}$

$\frac{6}{10} \overset{\cdot 3}{=} \frac{18}{30}$, $\frac{4}{15} \overset{\cdot 2}{=} \frac{8}{30}$


Emily

Überprüfe die beiden Lösungen: Wie haben Rico und Emily die Brüche gefunden? Findest du noch weitere Brüche?

b) Finde wie Rico oder Emily gleichnamige Brüche.
Wann rechnest du lieber wie Rico, wann lieber wie Emily? Warum?

(1) $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{7}{12}$ und $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{2}{8}$ und $\frac{5}{6}$ (4) $\frac{9}{11}$ und $\frac{3}{7}$ (5) $\frac{9}{20}$ und $\frac{7}{15}$

2.4 - 2.5 **Üben (20 - 25 Minuten zzgl. Aufgabengeneratoren)**

Ziel: Üben, gleichnamige Brüche zu bestimmen und dabei Muster zu entdecken

Material: MB: Würfel

Umsetzung: 2.4 a) EA, dann PA, dann UG; b) Aufgabengenerator (PA); 2.5 Aufgabengenerator (PA)

Methode: Falls Lernende Schwierigkeiten haben, Muster zu entdecken, zunächst alles beschreiben lassen, was ihnen auffällt. Ggf. gezielt auf entdeckbare Muster ansprechen. Kann auch arbeitsteilig bearbeitet und dann gegenseitig ausgetauscht und kontrolliert werden.

2.4 Was passiert, wenn ...

a) Mache die Brüche immer gleichnamig.

(1) $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{5}$	(1) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$	(1) $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$	(1) $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$
(2) $\frac{4}{6}$ und $\frac{4}{5}$	(2) $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{8}$	(2) $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$	(2) $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{6}$
(3) $\frac{4}{6}$ und $\frac{2}{5}$	(3) $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{4}$	(3) $\frac{4}{3}$ und $\frac{8}{5}$	(3) $\frac{1}{6}$ und $\frac{2}{9}$
(4) $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{5}$	(4) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{8}$	(4) $\frac{8}{3}$ und $\frac{16}{5}$	(4) $\frac{1}{8}$ und $\frac{2}{12}$

Welche Muster fallen dir auf? Wie könnte es in der 3. und 4. Spalte weiter gehen?

Muster: 1./3. Spalte: Nenner bleiben gleich
2. Spalte: Nenner verändern sich.
Zähler sind bei den gleichnamigen Brüchen nicht mehr gleich von Zeile zu Zeile.
3. Spalte: Zähler werden verdoppelt, Nenner bleiben gleich.

Zu beachten: Qualität des Prozesses sicherstellen, wenn Lernende sich oder andere überfordern. Falls keine Ideen, Muster aus anderen Teilaufgaben aufgreifen.

b) Erfindet eigene Muster und tauscht sie aus.

Zu beachten: Lernende können hier ebenfalls Muster und Besonderheiten entdecken: Z.B. identische Ausgangsbrüche, Ausgangsbrüche mit gleichem Nenner, unechte Brüche.

2.5 Brüche würfeln

Dilara und Maurice würfeln mit zwei 12er-Würfeln.


Dilara

Dilara würfelt 3 und 5 und baut daraus den Bruch $\frac{3}{5}$.
Maurice würfelt 1 und 10 und baut daraus den Bruch $\frac{1}{10}$.


Maurice

Dilara bestimmt zu den Brüchen zwei gleichnamige Brüche.
Für jeden richtigen Bruch bekommt sie einen Punkt. Dann ist Maurice dran.

Würfelt Brüche wie Dilara und Maurice und macht sie gleichnamig.

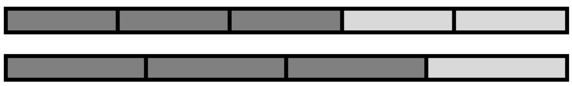
B3 B Brüche und Prozente vergleichen und der Größe nach ordnen – Didaktischer Hintergrund

Lerninhalt

Brüche und Prozente vergleichen und ordnen

Der Vergleich von Anteilen oder relativen Häufigkeiten kommt täglich in der Zeitung vor, weswegen in dieser Einheit Brüche und Prozente direkt zusammen vorgestellt werden.

Um Brüche und Prozente miteinander vergleichen zu können, sind stabil aufgebaute Anteilsvorstellungen wichtig. Bei einigen Lernenden merkt man erst beim Vergleichen, dass die Anteilsvorstellungen noch nicht ganz zu den fachlich tragfähigen passen und ganz eigene Vergleichswege erfunden werden. So konnte z.B. Ismet die Streifen im unten abgedruckten Bild richtig als 3/5 und 3/4 identifizieren, sagte jedoch, 3/5 sei größer als 3/4, weil „Hier ist ja fünf Kästchen, und hier vier". Erst durch diesen Vergleich wurde klar, dass er zwar die richtigen Bilder zuordnen kann, er aber den Anteil als Beziehung zwischen dem Teil und dem Ganzen noch nicht durchdrungen hat.



Anteile im Bruchstreifen vergleichen

Notwendige inhaltliche Vorstellungen

Um Anteile vergleichen zu können, muss man Teil und Ganzes gleichzeitig im Blick haben: Sind die Ganzen gleich groß, dann reicht es, nur die Teile zu vergleichen. Im Bruchstreifen bedeutet dies z.B., dass bei gleich langen ganzen Bruchstreifen – wie in der Abbildung oben – die Anteile mithilfe der markierten Teile verglichen werden können. Bei gleich langen Streifen ist der markierte Teil gleich lang, wenn die Anteile gleich groß sind.

Um fehlerhafte Vergleichswege zu vermeiden, ist eine gründliche inhaltliche Fundierung notwendig: Am Darstellungsmittel der Bruchstreifen bauen Lernende ein Verständnis dafür auf, was es bedeutet, wenn zwei Brüche gleich groß sind und wie man durch Verfeinern und Vergröbern der Einteilung gleichwertige Anteile bestimmt (siehe Baustein **B2 A** bzw. **B2 B**).

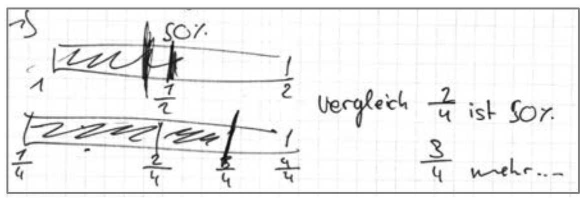
Auf diese inhaltlichen Vorstellungen kann beim Erzeugen größerer oder kleinerer Anteile zurückgegriffen werden. Dazu wird ein geeigneter Streifen vorgestellt, mit dem die gesuchten Brüche dargestellt werden können (siehe *Veranschaulichung und Material*). Die anschauliche Verknüpfung von Nenner und Streifen-Einteilung sowie Zähler und Teil (markierte Felder) kann dazu beitragen, dass Lernende nicht tragfähige komponentenweise Vergleichswege als ungeeignet entlarven.

Sind die Vorstellungen aufgebaut, werden die Vergleichswege flexibilisiert, bevor das Standardverfahren „Nenner gleichnamig machen" thematisiert wird. So lassen sich 3/5 und 3/4 z.B. auch über die Größe der Felder vergleichen (siehe Abbildung *Anteile im Bruchstreifen vergleichen*): Die Fünftel sind kleiner als die Viertel, also sind drei Fünftel auch kleiner als drei Viertel.

Leicht lassen sich demnach Brüche mit gleichem Zähler, aber auch mit gleichem Nenner vergleichen, was z.B. über Pizzaverteilungen erklärt werden kann.

- Sind die Nenner gleich, so ist der Bruch mit dem größeren Zähler größer. Wenn man sich mehr Stücke nehmen darf, bekommt man also mehr Pizza.
- Sind die Zähler gleich, so ist der Bruch mit dem kleineren Nenner größer. Wenn man sich von der Pizza mit den größeren Stücken genauso viele Stücke nehmen darf, wie von der gleichgroßen Pizza mit mehr Stücken, so bekommt man mehr Pizza.

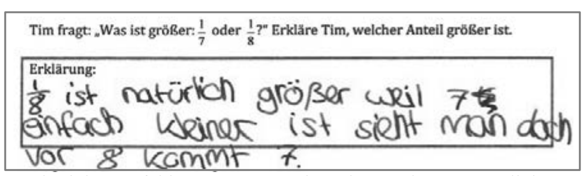
Geschult werden soll auch eine grundsätzliche Orientierung im Zahlenraum zwischen 0 und 1, um neben rein formalen Vergleichswegen über gleichnamige Brüche auch qualitative Vergleiche mit Vergleichsgrößen zu ermöglichen; dies stärkt den *Zahlenblick* (Marxer / Wittmann 2011, S. 26).



Qualitativer Vergleich von 3/4 und 50 % (wenn auch noch nicht mit idealer Bezeichnung der Streifen)

Typische Schwierigkeiten

Typische Schwierigkeiten von Lernenden bestehen darin, dass sie nur eine der beiden Zahlen jedes Bruches berücksichtigen, wie z.B. bei „3/4 < 3/8, da 4 < 8". Dabei wird häufig über Anzahlen argumentiert (4 Stücke sind weniger als 8 Stücke) und nicht gleichzeitig auch über die Größe der entstehenden Stücke (bzw. auch umgekehrt). Darüber hinaus werden auch Abstände zwischen Zähler und Nenner zur Beurteilung der Größe des Anteils herangezogen („3/4 = 5/6, da jeweils 1 zum Ganzen fehlt"). Beide Vorstellungen lassen sich durch Rückgriff auf die Bruchstreifen klären.


Tim fragt: „Was ist größer: $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{8}$?" Erkläre Tim, welcher Anteil größer ist.

Erklärung:
1/8 ist natürlich größer weil 7 einfach kleiner ist sieht man doch vor 8 kommt 7.

Noch nicht tragfähige Argumentation über Ordnung natürlicher Zahlen

Übungsformat: Brüche dazwischen suchen

Mit dem Übungsformat *Suche Brüche oder Prozente zwischen gegebenen Brüchen* kann eine interessante Erfahrung gemacht werden: *Brüche liegen dicht* beieinander. Das bedeutet, dass sich zwischen zwei beliebigen Brüchen immer weitere Brüche finden lassen: So folgt auf 1/3 nicht direkt der Bruch 2/3. An der Streifentafel kann bereits gesehen werden, dass weitere Brüche zwischen den Brüchen liegen bzw. durch systematisches Erweitern und der damit einhergehenden immer feineren Einteilung lassen sich unendlich viele weitere Brüche finden. 3/6 ist ein Beispiel für einen Bruch, der zwischen 1/3 und 2/3 liegt, denn 1/3 = 2/6 und 2/3 = 4/6.

Dieses Phänomen ist für die Lernenden insofern erstaunlich, als dass die vertrauten natürlichen Zahlen anders funktionieren. Zu jeder natürlichen Zahl (mit Ausnahme der 1), gibt es immer einen direkten Vorgänger und einen direkten Nachfolger. Das heißt, dass die Reihenfolge der Zahlen durch den Zählvorgang „1, 2, 3, …“ gestützt wird.

Prozente verhalten sich auf den ersten Blick wie natürliche Zahlen: Ordnet man Prozente, so ist ihre Reihenfolge durch den Zählvorgang gestützt, und es scheint, dass keine Zwischenzahlen möglich seien. Dieses auf den festen Nenner 100 zurückzuführende Phänomen wird aufgebrochen, wenn man auch Prozentzahlen mit Komma zulässt. Dies erfolgt in dieser Einheit jedoch nicht.

Veranschaulichung und Material

Streifentafel, Bruchstreifen und Fortschrittsbalken

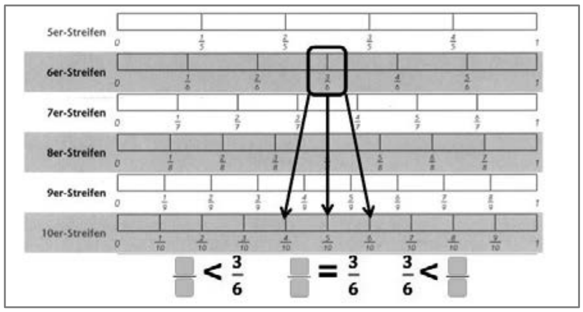
Für das inhaltliche Vergleichen und Ordnen von Anteilen wird auf einzelne Bruchstreifen bzw. die Streifentafel zurückgegriffen, die den Lernenden aus den vorangehenden Bausteinen bekannt sind. Die Größe eines Anteils lässt sich dabei *in gleich langen Streifen* über die Länge des markierten Teils vergleichen.

Diese Vorstellung wird dabei in zweierlei Hinsicht flexibilisiert bzw. erweitert: Neben den gleich langen Streifen werden nun auch bewusst (unter anderem für den Einstieg) ungleich lange Streifen – etwa in Form von Fortschrittsbalken – genutzt. Diese sollen den Blick bewusst von absoluten Zahlvergleichen ablenken, indem der Blick auf die benötigte und zunächst zu erschaffende übereinstimmende Bezugsgröße – den gleich langen Streifen – gerichtet wird.

Darüber hinaus wird der leere Bruchstreifen genutzt, der geeignet strukturiert werden muss und so eine qualitative Orientierung (etwa an Referenzgrößen wie 0, 1/2 oder 1) fokussiert.

Aufbau der Förderung

In **Fördereinheit 1 (Anteile in Bildern und Situationen vergleichen)** wird zunächst das qualitative Vergleichen und Ordnen von Brüchen in Streifen erarbeitet. Dabei werden bewusst ungleich lange Streifen präsentiert, um nicht tragfähigen Vergleichswegen – etwa über die absolute Betrachtung der Anzahl markierter bzw. nicht markierter Stücke – vorzubeugen und den Blick auf die Beziehung des Teils zum jeweiligen Ganzen zu lenken. Im weiteren Verlauf werden gleich lange Streifen genutzt und es wird an das Verfeinern und Vergröbern von Bruchstreifen angeknüpft: Gleich große Anteile zu einem vorgegebenen Anteil können gefunden werden, indem man die Einteilung des Streifens verändert, aber insgesamt denselben Teil vom Streifen markiert (siehe Bausteine **B2 A**, **B2 B**). Diese Vorstellung ist erweiterbar zu einer anschauungsgebundenen Strategie zum Finden kleinerer bzw. größerer Anteile auch mit anderen Nennern: Hat man einen Anteil in einen feineren oder gröberen Streifen übertragen, so steht die Einteilung des Streifens für den Nenner des Anteils. Größere bzw. kleinere Brüche findet man dann in diesem Streifen, indem man einen größeren bzw. kleineren Teil markiert.



Verfeinern nutzen, um kleinere / größere Brüche zu finden

In **Fördereinheit 2 (Brüche vergleichen mit Situationen, Bildern, Zahlbeziehungen)** werden verschiedene Vergleichswege für Brüche thematisiert, die sowohl inhaltlicher Natur sind (wie Situationen ausdenken, Bilder nutzen), als auch formale Kriterien nutzen (Zähler und Nenner betrachten). Insbesondere die Vergleichswege über die Betrachtung von Zähler und Nenner sollten dabei gut inhaltlich fundiert werden, denn sie werden häufig nicht tragfähig bzw. nicht flexibel genug genutzt. Darüber hinaus wird für ausgewählte Brüche eine Orientierung auf der Streifentafel angebahnt, um Brüche hinsichtlich zentraler Zahlwerte (etwa 1/2) schnell qualitativ verorten zu können.

Fördereinheit 3 (Brüche und Prozente ordnen) rundet die Förderung schließlich mit der Verknüpfung von Brüchen und Prozenten ab.

Weiterführende Literatur

Marxer, M. / Wittmann, G. (2011): Förderung des Zahlenblicks – Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. In: Der Mathematikunterricht 57(3), 25 - 34.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 57 - 70.

Prediger, S. (2011): Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. In: Der Mathematikunterricht 57(3), 5 - 14.

B3 B – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 25 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

1 a), 2 a): Erklärungen können sowohl Situationen als auch Rechnungen sein.

1 b): Einige Lernende können Brüche nicht im Bild vergleichen. Dann sollte man sie ermuntern, überhaupt Bilder zu zeichnen.

Kann ich Brüche und Prozente vergleichen und der Größe nach ordnen?

1 Anteile in Bildern und Situationen vergleichen

a) Tim fragt: „Was ist größer: $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{8}$?" Erkläre Tim, welcher Anteil größer ist.

Erklärung: $\frac{1}{7}$ ist größer: Wenn sich 7 Leute 1 Pizza teilen, bekommt jeder mehr Pizza, als bei 8 Leuten und 1 gleich großen Pizza.

b) Ist $\frac{5}{6}$ größer oder kleiner als $\frac{3}{4}$ oder sind beide gleich groß? Zeige mit einem Bild.

Bild: $\frac{5}{6}$ ist größer:

2 Brüche vergleichen mit Situationen, Bildern, Zahlbeziehungen

a) "Kleiner als (<)", "größer als (>)" oder "genau so groß wie (=)"? Trage ein.

(1) $\frac{1}{2}$ ist kleiner als $\frac{3}{4}$ <

(2) $\frac{3}{8}$ ist größer als $\frac{3}{24}$ >

b) Erkläre deine Lösung zu **a)** (2).

Erklärung: $\frac{3}{8}$ ist größer: Wenn man 1 Pizza in 24 Stücke schneidet, sind die Stücke kleiner als bei 8 Stücken. Man bekommt je 3 Stücke.

3 Brüche und Prozente ordnen

a) "Kleiner als (<)", "größer als (>)" oder "genau so groß wie (=)"? Trage ein.

(1) $\frac{15}{25}$ ist größer als 15 % >

(2) 30 % ist kleiner als $\frac{4}{5}$ <

b) Rechenweg zum Vergleich von $\frac{5}{8}$ und $\frac{4}{6}$: $\frac{4}{6}$ ist größer!

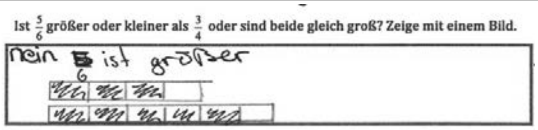
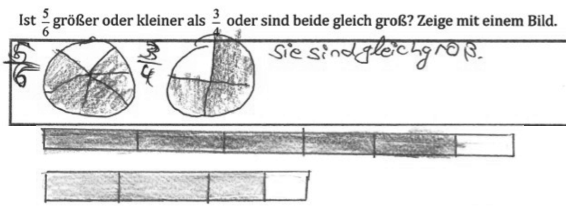
Gleichnamig machen: $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ und $\frac{4}{6} = \frac{16}{24}$

Hinweise zur Auswertung:

Übergreifende Fehler

Typische Fehler	Mögliche Ursache	Förderung
Rechenweg zum Vergleich von $\frac{5}{8}$ und $\frac{4}{6}$: $\frac{5}{8} > \frac{4}{6}$ 8 ist größer als 6	Annahme, dass der Bruch mit dem größeren Nenner größer ist, weil er aus mehr Stücken besteht.	Wiedererarbeitung des Anteils in **B1 A**.
Rechenweg zum Vergleich von 5/8 und 4/6: „5/8 ist größer, denn 5 · 8 = 40 und 4 · 6 = 24."	Zähler und Nenner werden miteinander multipliziert.	
Ist 5/6 größer oder kleiner als 3/4 oder sind beide gleich groß? „Beide sind gleich groß, weil nur noch 1 Zähler fehlt, dann ist es bei beiden voll, also 6/6 und 4/4."	Es wird absolut über den Abstand von Zähler und Nenner / Teil und Ganzem argumentiert: Ist dieser größer, ist der Bruch – je nach Einschätzung – kleiner bzw. größer.	Erarbeitung der Bedeutung des Nenners / des Ganzen und seiner Beziehung zum Zähler / Teil bei Größenvergleichen (1.1 - 1.4). Erarbeitung verschiedener Vergleichswege (2.1 - 2.2).
$\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$ weie 5 und 6 größer sind aes 3 und 4	Zähler und Nenner werden komponentenweise verglichen. Diese Regel gilt nur im Spezialfall, z.B. nicht bei 5/12 > 2/3.	
Ist $\frac{5}{6}$ größer oder kleiner als $\frac{3}{4}$ oder sind beide gleich groß? Zeige mit einem Bild. Beide sind gleich groß, weil man kann beide Nenner auf 12 bringen.	Gleichgroß wird mit dem Finden eines gemeinsamen Nenners erklärt. Evtl. liegt Verwechslung von *gleich groß* und *gleichnamig* vor.	Wiedererarbeitung des Herstellens gleichnamiger Brüche in **B3 A**.
$\frac{5}{8} = 62{,}5 > \frac{4}{6} = 66{,}6$	Beim Umwandeln in Dezimalzahlen treten Fehler auf.	Erarbeitung des Zusammenhangs von (einfachen) Brüchen und Dezimalzahlen in **DB**.

Diagnoseaufgabe 1: Anteile in Bildern und Situationen vergleichen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
b)		Es wird vom gleich großen Stück (gleich große Felder) ausgegangen.	Erarbeitung der Darstellung von Anteilen in Streifen als geeignetes tragfähiges Darstellungsmittel (1.1; 1.3; 1.4).
		Es wird ein Darstellungsmittel gewählt, das zum Vergleichen nicht gut geeignet ist (z.B. Anteile sind in unterschiedlich langen Streifen). Es werden unterschiedlich große Ganze gewählt bzw. es wird ungenau gezeichnet.	
	Es wird kein Bild gezeichnet.	Es besteht Unsicherheit dahingehend, wie Brüche geeignet in Bildern dargestellt werden können oder es wird lieber auf rechnerische Vergleichswege ausgewichen.	

Diagnoseaufgabe 2: Brüche vergleichen mit Situationen, Bildern, Zahlbeziehungen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
b)	**Erklärung:** Es ist gleich nur der Nenner wurde verändert	Es wird nur auf den Zähler geguckt. Stimmt dieser überein, sind die Brüche gleich groß.	Erarbeitung der Bedeutung des Nenners / des Ganzen und seiner Beziehung zum Zähler / Teil bei Größenvergleichen (1.1 - 1.4). Erarbeitung verschiedener Vergleichswege, insbesondere zur gezielten Nutzung von Zähler und Nenner (2.1 - 2.2).

Diagnoseaufgabe 3: Brüche und Prozente ordnen

Typische Fehler		Mögliche Ursache	Förderung
a.1)	(1) $\frac{15}{25}$ $\boxed{=}$ 15 %	Es wird nur der Nenner mit der Prozentzahl verglichen.	Zunächst ggf. Wiedererarbeitung von Prozenten in **B1 B** / **B2 C**, dann Größenvergleich üben (3.1 - 3.3).

1 Anteile in Bildern und Situationen vergleichen

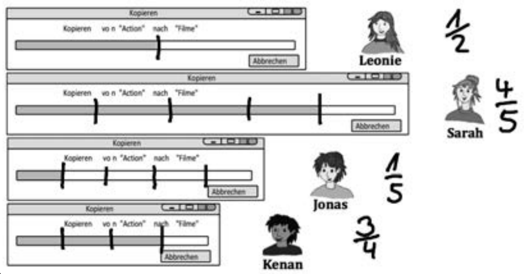
1.1 Erarbeiten (30 - 35 Minuten)

Ziel: Anteile in Streifen abschätzen, einzeichnen und der Größe nach ordnen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG; c) EA; d), e) jeweils EA, dann UG

1.1 Anteile in Fortschrittsbalken vergleichen



Zu beachten: Ungleich lange Bruchstreifen erfordern, dass der zu betrachtende Teil bewusster auf den jeweiligen Streifen hin interpretiert wird und der Fokus weniger auf absoluten Vergleichen liegt („Der eine Streifen ist länger.“). Streifen können eingeteilt und gedanklich gleich lang gezogen werden. Übertragung in Streifentafel ermöglicht Kontrolle. Typische Schwierigkeit: Lernende verbinden mit Fortschrittsbalken weitere Aspekte (z.B. Rechnerleistung), die in Beurteilung mit einfließen können. Lösung: Sarah: „Streifen für geladenen Teil ist in gleich langen Streifen am längsten“.

a) Die vier Freunde laden sich ihre Lieblingsfilme auf ihre Rechner.
- Welche Anteile wurden geladen?
- Wie sieht man das an den Streifen?

Zeichne Markierungen ein, so dass man die Anteile gut ablesen kann.
Übertrage die Anteile dann in die Streifentafel.
Wer hat den größten Anteil geladen? Wie sieht man das an den Streifen?

Zu beachten: Jonas und Sarahs Anteile ergeben (gleich lang gedacht) zusammen ein Ganzes. Lösung: 1. Sarah: 4/5, 2. Kenan: 3/4, 3. Leonie: 1/2, 4. Jonas: 1/5

b) Schreibe alle Anteile der Größe nach auf. Beginne mit dem **größten**.

Zu beachten: Von b) nach c) ändert sich Ordnung.

Zu beachten: Kann mit stärkeren Lernenden mit Erfahrungen in **B2 A** und **B2 B** kürzer behandelt bzw. übersprungen werden.

c) Schreibe auf, welche Anteile noch geladen werden müssen.
Schreibe auch diese Anteile der Größe nach auf. Beginne mit dem **kleinsten**.

d) Zeichne in die Streifentafel ein: Wie sieht man, dass $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}$ von einer Datei herunter geladen wurden? Welchen Streifen kannst du nehmen?

Hintergrund: Anknüpfen an **B1 A**: Bei Stammbrüchen ist der Anteil mit kleinerem Nenner größer. Lösung: Größter Anteil gehört zum längsten markierten Teil in Streifentafel (Streifen gleich lang).

e) Zeichne $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ in der Streifentafel ein.
Welcher Anteil ist der größte? Was hat das mit den Streifen zu tun?

1.2 Üben und Erarbeiten (10 - 15 Minuten)

Ziel: Anteile in Streifen vergleichen; typische Fehlvorstellung reflektieren und am Material widerlegen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG

1.2 Anteile in Streifen vergleichen

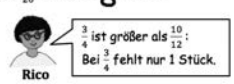
Methode: Wenn Lernende die Anteile im Vorfeld nach nicht tragfähigen Aspekten ordnen, diese am Material thematisieren.

a) Welcher Anteil ist größer? Vergleiche die Anteile in der Streifentafel.

(1) $\frac{4}{10}$ oder $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{4}{10}$ oder $\frac{8}{20}$ beide gleich.

Hintergrund: Manche Lernende schauen beim Größenvergleich absolut auf die Anzahl der Stücke, die noch zu einem Ganzen fehlt und nicht auf die Relation zum Ganzen. Hier kann mit Ricos Aussage ein kognitiver Konflikt erzeugt werden.

b) Rico vergleicht Anteile in Streifen.
Überprüfe: Stimmt Ricos Weg?
Finde Beispiele in der Streifentafel, für die sein Weg nicht funktioniert.



Ricos Weg stimmt nicht: Er muss auch darauf achten, wie viele Stücke der Streifen insgesamt hat.

1.3 **Üben (20 - 30 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

Ziel: Ordnung bei Brüchen in symbolischer und situativer Darstellung operativ nutzen

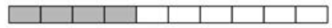
Material: MB: Ggf. Streifentafel(n), ggf. Folienstifte

Umsetzung: a) EA; b) EA, dann UG; c) EA, dann PA; d) EA, dann UG; e) Aufgabengenerator (PA)

1.3 Anteile in anderen Streifen und Situationen finden

Lösung: In demselben Streifen lassen sich kleinere bzw. größere Anteile durch Wegnehmen bzw. Hinzufügen von gefärbten Stücken erzeugen.

a) Lies den Anteil ab. Finde drei Anteile **im selben Streifen**,
- die **größer** sind.
- die **kleiner** sind.

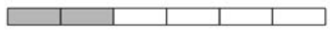


Hintergrund: Operatives Durcharbeiten. Rückgriff auf die inhaltliche Vorstellung vom Erweitern und Kürzen als Verfeinern bzw. Vergröbern (**B2 A**) und gleichzeitige Variation des Zählers (Verändern des Anteils).
Impuls: In welchem feineren / gröberen Streifen könntest du denselben Anteil darstellen? Wie heißt er da? → Z.B. im 8er-Streifen bzw. im 3er-Streifen. 6/8 bzw. 1/3.
Zu beachten: Lernende orientieren sich z.T. an den Streifen der anderen Teilaufgaben und finden zunächst in diesen über das direkte Abtragen der Anteile geeignete kleinere oder größere Anteile.

b) Finde drei Anteile **in verschiedenen Streifen** (also in verfeinerten oder vergröberten Streifen), die **größer** sind. z.B. $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{8}$

Wie hast du die Anteile gefunden? Kontrolliere mit der Streifentafel.

c) Finde drei Anteile **in verschiedenen Streifen**, die **kleiner** sind.



z.B. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{10}$

Zu beachten: *Situationen* klären: Es geht um verschiedene Schokoriegel-Anteile wie im Beispiel. Vorgehen ist analog zu dem in b) / c) möglich.

d) Tim hat $\frac{5}{8}$ vom Schokoriegel bekommen. Gib drei Situationen an, in der Sarah
- genau denselben Anteil von einem anderen Schokoriegel bekommt.
- einen größeren oder kleineren Anteil von einem anderen Riegel bekommt.

Methode: Streifentafel bzw. eigene Streifen zur Kontrolle nutzen.

e) Eine Person gibt einen Anteil (und einen Streifen) oder eine Situation vor, die andere findet dazu größere oder kleinere Anteile. Wechselt euch ab.

1.4 **Üben (15 - 20 Minuten)**

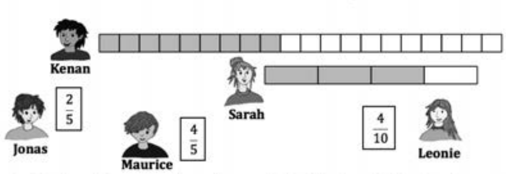
Ziel: Brüche in verschiedenen Darstellungen vergleichen; erste Vergleichswege auf Zahlebene entwickeln

Material: MB: Ggf. Streifentafel(n), ggf. Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils PA, dann UG

1.4 Verschiedene und gleiche Anteile in Fortschrittsbalken und Streifen

Die Kinder wollen wissen, wer am meisten von der Datei kopiert hat.



Zu beachten: Frage nach Ladefortschritt von Maurices und Jonas‘ Computer hat diagnostisches Potential. Daher zunächst ohne Streifen stellen.
Methode: Bei Schwierigkeiten in der Streifentafel operative Serien wie in 1.1 d) bearbeiten.
Typische Schwierigkeit: Lernende, die über Abstand von Zähler und Nenner argumentieren wie Rico (1.2), werten Maurices und Sarahs Anteil als gleich.
Lösung: Kein Streifen bei 2/5 und 4/5 nötig, da gleicher Nenner (größerer Zähler → größerer Anteil). Maurices Computer hat am meisten kopiert.

a) Hat Jonas' Computer schon mehr von der Datei kopiert oder Maurices Computer?
Vergleiche auch die anderen Brüche von oben.
Wo brauchst du keinen Streifen zum Vergleichen? Wie vergleichst du dort?
Wer hat schon am meisten von der Datei kopiert?

Von Klein nach groß: Jonas / Leonie, Kenan, Sarah, Maurice

Hintergrund: Vorbereitung Vergleichswege: Wenn Zähler gleich groß sind, kann man auf die Anzahl der gleich großen Stücke schauen. 2/5 ist zu 4/10 erweiterbar. Bei verschiedenen Nennern ist das Vergleichen eher schwer.

b) Welche Anteile sind leicht zu vergleichen, welche schwieriger?
Vergleiche die schwierigen Brüche in 20 cm langen Streifen oder der Streifentafel.

2 Brüche vergleichen mit Situationen, Bildern, Zahlbeziehungen

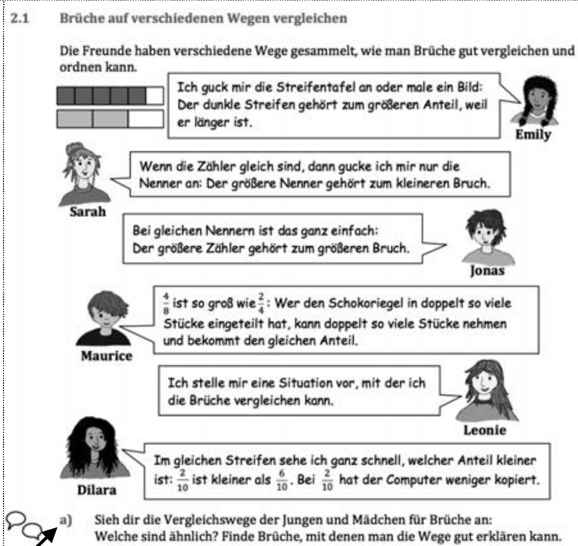
2.1 **Erarbeiten (35 - 40 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

Ziel: Verschiedene Vergleichswege (inhaltliche und formal-kalkülhafte) erarbeiten und nutzen, um Brüche zu vergleichen

Material: MB: Ggf. Streifentafel(n), ggf. Folienstifte

Umsetzung: a) UG; b) EA, dann PA, dann UG; c) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund: Vergleichswege sind für Lernende nicht leicht zu erfassen und zu unterscheiden. Eigenes Beispiel soll helfen, Charakteristika der Vergleichswege zu erarbeiten und inhaltliches Verständnis zu sichern. Bei Schwierigkeiten mit einzelnen Wegen hilft es, sich Bilder zu den Anteilen zu malen und davon ausgehend die mehr rechnerischen Wege (wie von Maurice) zu erschließen.
Emily: Gleich langer Streifen wichtig. Weg funktioniert theoretisch für alle Brüche, praktisch Beschränkung durch Zeichengenauigkeit (z.B. bei großen Nennern). Kreisbild ist als Darstellung eher ungeeignet, da es schwer vergleichbar ist.
Sarah: Verallgemeinerung der Regel für die Stammbrüche: Je mehr Leute sich eine Pizza teilen, desto weniger bekommt jeder.
Jonas und Dilara sind gleich: Rückgriff auf die Erfahrung, dass der Zähler zählt.
Weg von Maurice bereitet häufig Schwierigkeiten: Erweitern und Kürzen wird in neuem Kontext aufgegriffen.
Leonie: Weg passt zu vielen anderen Wegen, da er den Darstellungswechsel thematisiert, der auch z.B. bei Maurice genutzt wird.


2.1 Brüche auf verschiedenen Wegen vergleichen

Die Freunde haben verschiedene Wege gesammelt, wie man Brüche gut vergleichen und ordnen kann.

Emily: Ich guck mir die Streifentafel an oder male ein Bild: Der dunkle Streifen gehört zum größeren Anteil, weil er länger ist.

Sarah: Wenn die Zähler gleich sind, dann gucke ich mir nur die Nenner an: Der größere Nenner gehört zum kleineren Bruch.

Jonas: Bei gleichen Nennern ist das ganz einfach: Der größere Zähler gehört zum größeren Bruch.

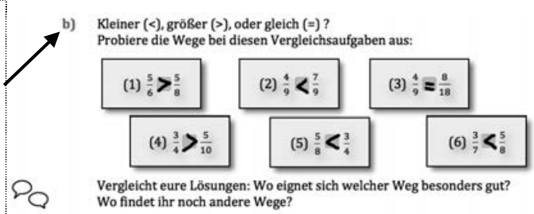
Maurice: $\frac{4}{8}$ ist so groß wie $\frac{2}{4}$: Wer den Schokoriegel in doppelt so viele Stücke eingeteilt hat, kann doppelt so viele Stücke nehmen und bekommt den gleichen Anteil.

Leonie: Ich stelle mir eine Situation vor, mit der ich die Brüche vergleichen kann.

Dilara: Im gleichen Streifen sehe ich ganz schnell, welcher Anteil kleiner ist: $\frac{2}{10}$ ist kleiner als $\frac{6}{10}$. Bei $\frac{2}{10}$ hat der Computer weniger kopiert.

a) Sieh dir die Vergleichswege der Jungen und Mädchen für Brüche an: Welche sind ähnlich? Finde Brüche, mit denen man die Wege gut erklären kann.

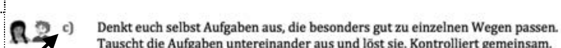
Lösung: Es gibt tendenziell Zuordnungen, aber Lernende können auch individuelle Präferenzen haben. Teilweise argumentieren Lernende auch über gleichnamige Brüche oder nutzen weitere Wege oder Mischformen. Diese thematisieren bzw. zurückstellen für spätere Aufgaben.
(1) Sarah; (2) Jonas / Dilara; (3) Maurice; (4) Emily; hier auch u.U. Vergleich mit 1/2, siehe 2.2; (5) Emily; oder Abwandlung von Maurice: 3/4 erweitert ergibt 6/8; (6) Emily; u.U. Vergleich mit 1/2
Methode: Fehlerhafte Ergebnisse an der Streifentafel kontrollieren und besprechen.
Typische Schwierigkeit: Lernende setzen die Ordnungszeichen < / > z.T. verkehrt, da sie sie nicht sicher unterscheiden können. Zudem lesen sie auch von rechts nach links und nutzen die Zeichen symmetrisch, wie etwa bei (1): 5/8 ist kleiner als 5/6. „<" bedeutet kleiner, also 5/6 < 5/8.


b) Kleiner (<), größer (>), oder gleich (=) ?
Probiere die Wege bei diesen Vergleichsaufgaben aus:

(1) $\frac{5}{6} > \frac{5}{8}$ (2) $\frac{4}{9} < \frac{7}{9}$ (3) $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$
(4) $\frac{3}{4} > \frac{5}{10}$ (5) $\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$ (6) $\frac{3}{7} < \frac{5}{8}$

Vergleicht eure Lösungen: Wo eignet sich welcher Weg besonders gut? Wo findet ihr noch andere Wege?

Zu beachten: Nicht tragfähige Vergleichswege nicht einschleifen lassen. Variation von Aufgabentypen anregen, wenn nur gleichartige gestellt werden.


c) Denkt euch selbst Aufgaben aus, die besonders gut zu einzelnen Wegen passen. Tauscht die Aufgaben untereinander aus und löst sie. Kontrolliert gemeinsam.

2.2 **Erarbeiten (15 - 20 Minuten zzgl. Aufgabengenerator)**

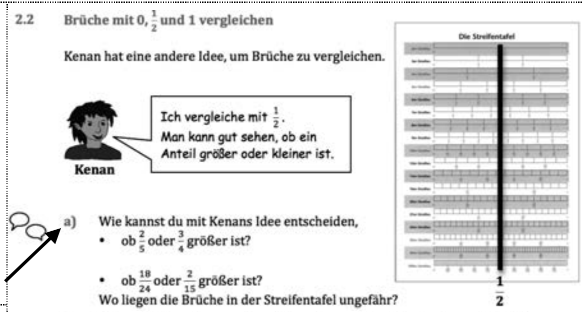
Ziel: Anteile über Vergleichsgrößen 0, 1 und 1/2 vergleichen; auf dem leeren Bruchstreifen orientieren

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a) UG; b), c) jeweils EA, dann UG; d) Aufgabengenerator (PA)

Hintergrund: Kenans Idee ist besonders hilfreich, wenn ein Bruch größer und der andere Bruch kleiner als 1/2 ist, bzw. wenn Abstände zu 1/2 stark voneinander abweichen. Nähe zur 0 bzw. 1 kann alternativ ebenfalls helfen, Brüche zu ordnen.

Lösung: 2/5 ist kleiner, 3/4 ist größer als 1/2, also 2/5 < 3/4. 18/24 ist größer, 2/15 kleiner als 1/2, also 18/24 > 2/15.



2.2 Brüche mit 0, $\frac{1}{2}$ und 1 vergleichen

Kenan hat eine andere Idee, um Brüche zu vergleichen.

Ich vergleiche mit $\frac{1}{2}$. Man kann gut sehen, ob ein Anteil größer oder kleiner ist.

Kenan

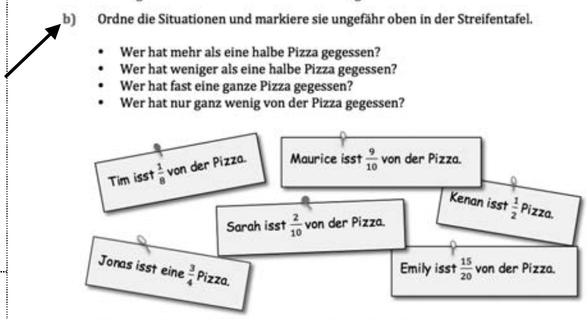
Die Streifentafel

a) Wie kannst du mit Kenans Idee entscheiden,
- ob $\frac{2}{5}$ oder $\frac{3}{4}$ größer ist?
- ob $\frac{18}{24}$ oder $\frac{2}{15}$ größer ist?

Wo liegen die Brüche in der Streifentafel ungefähr?

$\frac{1}{2}$

Zu beachten: Begriff *fast* hat Interpretationsspielraum. Lernende sortieren hier sehr unterschiedlich, deshalb nach Begründungen fragen. Der Vergleich mit 1/2 ist hier aussagekräftiger. Verweis auf Kenans Weg hilft, die unterschiedlichen Situationen (a): Vergleich von zwei Brüchen über den Bruch 1/2 und b): Einschätzung von Situationen mit 1/2 und einem weiteren Bruch) zu verknüpfen.



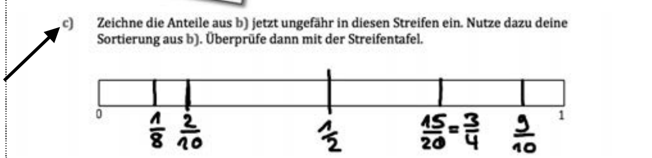
b) Ordne die Situationen und markiere sie ungefähr oben in der Streifentafel.
- Wer hat mehr als eine halbe Pizza gegessen?
- Wer hat weniger als eine halbe Pizza gegessen?
- Wer hat fast eine ganze Pizza gegessen?
- Wer hat nur ganz wenig von der Pizza gegessen?

Tim isst $\frac{1}{8}$ von der Pizza.
Maurice isst $\frac{9}{10}$ von der Pizza.
Kenan isst $\frac{1}{2}$ Pizza.
Sarah isst $\frac{2}{10}$ von der Pizza.
Jonas isst eine $\frac{3}{4}$ Pizza.
Emily isst $\frac{15}{20}$ von der Pizza.

Methode: Anteile nur ungefähr eintragen lassen.

Zu beachten: Lernende sehen die Aufgabenteile b) und c) oft als voneinander getrennt an und greifen in c) dann nicht auf b) zurück, sondern strukturieren den Streifen in Viertel, Zwanzigstel etc.

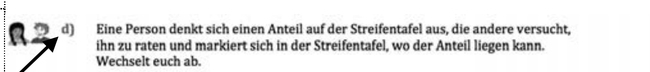
Impuls: Wie kann die Sortierung aus b) jetzt helfen, die Anteile einzuzeichnen? → Zunächst Referenzgröße 1/2 eintragen, dann weiß man, was weiter links und was weiter rechts liegt. Danach leichtere Anteile wie 3/4 einzeichnen.



c) Zeichne die Anteile aus b) jetzt ungefähr in diesen Streifen ein. Nutze dazu deine Sortierung aus b). Überprüfe dann mit der Streifentafel.

0 $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ $\frac{9}{10}$ 1

Hintergrund: Lernende grenzen durch geschickte Fragen den Bruch immer weiter ein. Auswahl möglicher Fragen:
Ist der Anteil größer als 1/2? Ist er kleiner als 1/2?
Ist er im 5er-Streifen darstellbar? Ist er größer als 3/4?



d) Eine Person denkt sich einen Anteil auf der Streifentafel aus, die andere versucht, ihn zu raten und markiert sich in der Streifentafel, wo der Anteil liegen kann. Wechselt euch ab.

3 Brüche und Prozente ordnen

3.1 **Erarbeiten (25 - 30 Minuten)**

Ziel: Brüche durch Suchen gleichnamiger Brüche vergleichen und ordnen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG; c), d) jeweils EA, dann PA, dann UG

Voraussetzung: Lernende sollten bereits Erfahrungen zu gleichnamigen Brüchen gesammelt haben.

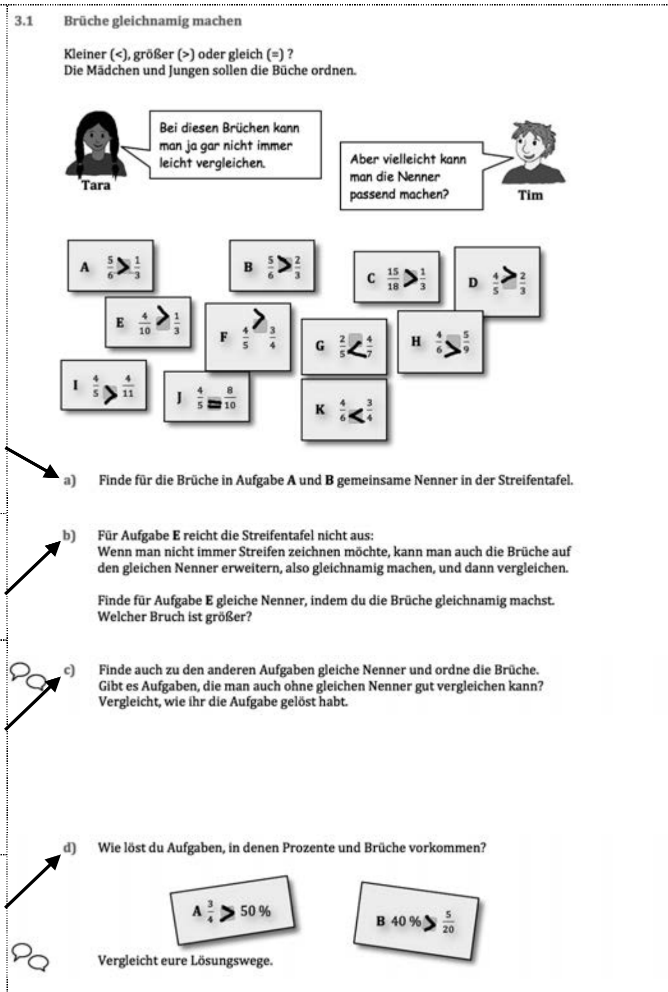
Hintergrund: Hier wird die Gleichnamigkeit als Werkzeug genutzt, um beliebige Brüche vergleichen zu können. Bei Schwierigkeiten mit gleichnamigen Brüchen auf **B3 A** zurückgreifen.

Hintergrund: Anknüpfen an die inhaltliche Bestimmung gleichnamiger Brüche in der Streifentafel.

Hintergrund: Ablösung vom Material.

Zu beachten: Hier lassen sich auch die Vergleichswege aus 2.1 und 2.2 nutzen. Wichtig ist, dass Lernende nach Möglichkeit flexibel Brüche vergleichen können und nicht stur Standardverfahren nutzen. Wenn alle Brüche gleichnamig gemacht werden, auch explizit weitere Vergleichswege ansprechen.

Hintergrund: Bei Prozenten bietet sich der gemeinsame Nenner 100 an.


3.1 Brüche gleichnamig machen

Kleiner (<), größer (>) oder gleich (=) ?
Die Mädchen und Jungen sollen die Büche ordnen.

Tara: Bei diesen Brüchen kann man ja gar nicht immer leicht vergleichen.

Tim: Aber vielleicht kann man die Nenner passend machen?

A $\frac{5}{6} > \frac{1}{3}$ B $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ C $\frac{15}{18} > \frac{1}{3}$ D $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$ E $\frac{4}{10} > \frac{1}{3}$ F $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ G $\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$ H $\frac{4}{6} > \frac{5}{9}$ I $\frac{4}{5} > \frac{4}{11}$ J $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ K $\frac{4}{6} < \frac{3}{4}$

a) Finde für die Brüche in Aufgabe **A** und **B** gemeinsame Nenner in der Streifentafel.

b) Für Aufgabe **E** reicht die Streifentafel nicht aus:
Wenn man nicht immer Streifen zeichnen möchte, kann man auch die Brüche auf den gleichen Nenner erweitern, also gleichnamig machen, und dann vergleichen.

Finde für Aufgabe **E** gleiche Nenner, indem du die Brüche gleichnamig machst.
Welcher Bruch ist größer?

c) Finde auch zu den anderen Aufgaben gleiche Nenner und ordne die Brüche.
Gibt es Aufgaben, die man auch ohne gleichen Nenner gut vergleichen kann?
Vergleicht, wie ihr die Aufgabe gelöst habt.

d) Wie löst du Aufgaben, in denen Prozente und Brüche vorkommen?

A $\frac{3}{4} > 50\,\%$ B $40\,\% > \frac{5}{20}$

Vergleicht eure Lösungswege.

3.2 **Üben (15 - 20 Minuten)**

Ziel: Brüche und Prozente am 100er-Streifen und durch Erweitern auf den Nenner 100 ordnen

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

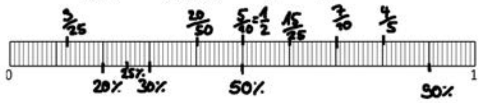
Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann PA, dann UG

Zu beachten: Lernende haben z.T. Schwierigkeiten, Struktur des 100er-Streifens für alle Brüche zu nutzen. Hier hilft es, zunächst einfache Brüche (z.B. 1/2, 5/10 oder 4/5) zu besprechen und jeweils geeignete Einteilung des Streifens zu markieren.
Impuls: Wie viele Stücke müsste der Streifen haben, damit du gut 4/5 eintragen kannst? → 5. Wie viele Stücke musst du beim 100er-Streifen dann immer zusammenfassen? → Immer 20 zusammenfassen.

3.2 Immer Nenner 100

a) Ordne diese Brüche und Prozente nach ihrer Größe.
Trage sie im 100er-Streifen ein und überprüfe mit der Streifentafel.

$\frac{5}{10}, \frac{1}{2}$, 20 %, $\frac{3}{25}, \frac{20}{50}, \frac{15}{25}$, 50 %, $\frac{4}{5}$, 30 %, $\frac{7}{10}$, 90 %, 25 %



Zu beachten: Aufgabe greift Kalkül auf (Erweitern auf 100). Wenn Lernende in a) bereits so argumentiert haben, kann sie übersprungen werden.

b) Man kann viele Brüche und Prozente auch ohne Streifen vergleichen, wenn man alle auf den Nenner 100 erweitert:
Finde damit heraus, ob $\frac{15}{25}$ oder $\frac{5}{10}$ oder 20 % größer ist.
Überprüfe deine Rechnung mit der Streifentafel.

3.3 **Üben (15 - 20 Minuten)**

Ziel: Brüche und Prozente zwischen zwei Grenzen angeben

Material: MB: Streifentafel(n), Folienstifte

Umsetzung: a), b) jeweils EA, dann UG; c), d) jeweils PA, dann UG

Hintergrund: Zwischen Prozenten und Brüchen flexibel übersetzen.

3.3 Was liegt dazwischen?

a) Gib drei Prozente an, die zwischen $\frac{3}{25}$ und $\frac{20}{50}$ liegen.
Zeichne die Prozente in der Streifentafel ein.

b) Gib drei Brüche an, die zwischen 10 % und 20 % liegen.

Hintergrund: Brüche liegen dicht: Durch Erweitern (d.h. Verfeinern) findet man zwischen beliebigen Grenzen weitere Brüche.

c) Emily wundert sich:

Wie soll man denn drei Brüche finden, die zwischen $\frac{3}{10}$ und $\frac{4}{10}$ liegen?
$\frac{4}{10}$ kommt doch direkt nach $\frac{3}{10}$. Ich zähle doch 1,2,3,4,5...
Zwischen 3 und 4 gibt es doch keine Zahl mehr!

Emily

Was meint Emily? Wie kann sie einen passenden Bruch finden?

Lösung: Verdoppeln der Zähler erzeugt größeren Abstand zwischen Brüchen. Man findet dann Bruch mit gleichem Nenner (7/10). Beim Verdoppeln der Nenner ändert sich nur der Streifen (Verfeinern).
Impuls: In welchen Streifen kannst du 3/10 noch einzeichnen? → Z.B. im 20er-Streifen.

d) Was verändert sich in c), wenn die Zähler verdoppelt werden?
Was verändert sich, wenn die Nenner verdoppelt werden?

3.4 **Üben (5 - 10 Minuten)**

Ziel: Ordnen von Brüchen mit anderen Grenzen üben

Material: -

Umsetzung: EA, dann PA

Hintergrund: Aufgabe greift Kenans Strategie aus 2.2 auf und variiert sie.

3.4 Brüche und Prozente vergleichen

Sieh dir diese Zahlen an: $\frac{1}{8}$, 40 %, $\frac{11}{12}$, 20 %, $\frac{2}{5}, \frac{2}{3}$, 45 %, $\frac{4}{8}, \frac{2}{6}$, 15 %, $\frac{4}{5}$
Welche sind

- kleiner als $\frac{1}{4}$?
- größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{2}$?

Kann ich Brüche gleichnamig machen?

1 Gleichnamige Brüche mit Streifen finden

a) Schreibe $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ so auf, dass sie denselben Nenner haben, also gleichnamig sind.

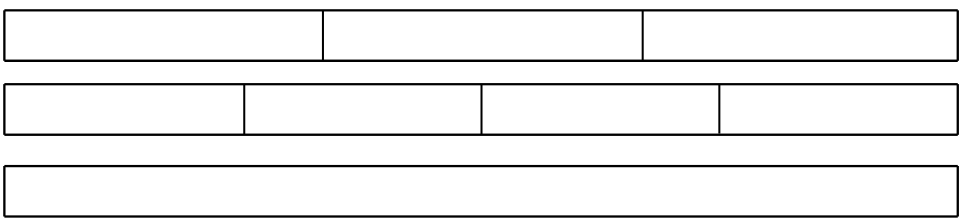
$$\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} = \frac{\square}{\boxed{\square}} \quad \text{und} \quad \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} = \frac{\square}{\boxed{\square}}$$

=

Erkläre, wie du den Nenner gefunden hast:

b) (1) Zeichne zuerst $\frac{2}{3}$ im 3er-Streifen ein. Zeichne dann $\frac{3}{4}$ im 4er-Streifen ein.

(2) Im 3er- Streifen kann man $\frac{2}{3}$ gut einzeichnen, $\frac{3}{4}$ aber nicht.
In welchem Streifen kann man beide Brüche gleichzeitig gut einzeichnen?
Teile den letzten Streifen so ein und markiere darin beide verfeinerten Anteile.



2 Gleichnamige Brüche berechnen

Mache die Brüche gleichnamig: Schreibe sie so, dass sie denselben Nenner haben.

(1) $\frac{7}{8} = \frac{\square}{\square}$ und $\frac{3}{5} = \frac{\square}{\square}$

(2) $\frac{5}{11} = \frac{\square}{\square}$ und $\frac{6}{7} = \frac{\square}{\square}$

(3) $\frac{8}{10} = \frac{\square}{\square}$ und $\frac{4}{12} = \frac{\square}{\square}$

Kann ich Brüche und Prozente vergleichen und der Größe nach ordnen?

1 Anteile in Bildern und Situationen vergleichen

a) Tim fragt: „Was ist größer: $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{8}$?“ Erkläre Tim, welcher Anteil größer ist.

Erklärung:

b) Ist $\frac{5}{6}$ größer oder kleiner als $\frac{3}{4}$ oder sind beide gleich groß? Zeige mit einem Bild.

Bild:

2 Brüche vergleichen mit Situationen, Bildern, Zahlbeziehungen

a) “Kleiner als (<)”, “größer als (>)” oder “genau so groß wie (=)”? Trage ein.

(1) $\frac{1}{2}$ ____________ $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{8}$ ____________ $\frac{3}{24}$

b) Erkläre deine Lösung zu **a)** (2).

Erklärung:

3 Brüche und Prozente ordnen

a) “Kleiner als (<)”, “größer als (>)” oder “genau so groß wie (=)”? Trage ein.

(1) $\frac{15}{25}$ ____________ 15 % (2) 30 % ____________ $\frac{4}{5}$

b) Rechenweg zum Vergleich von $\frac{5}{8}$ und $\frac{4}{6}$: