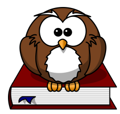
KOMPETENZHEFT – FINANZMATHEMATIK I

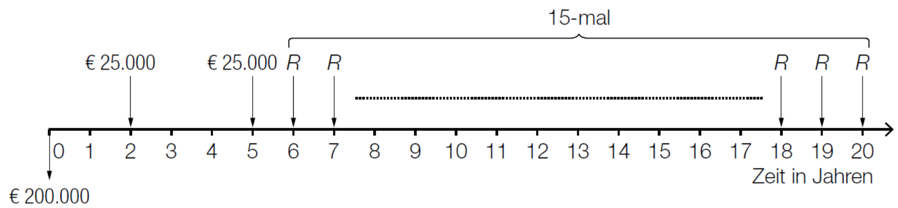
Inhaltsverzeichnis



1. Diagnoseaufgaben

Aufgabe 1.1. Ein Hersteller landwirtschaftlicher Geräte entwickelt innovative Produkte.

Für den Bau einer Produktionshalle muss das Unternehmen einen Kredit in Höhe von 200 000 € aufnehmen. Die folgende Grafik stellt das Angebot einer Rückzahlungsvariante dar:



– Beschreiben Sie den dargestellten Zahlungsverlauf.

– Berechnen Sie die Höhe der Rate R bei einem Zinssatz von 4 % p. a.

Aufgabe 1.2.

a) Von einem Sparbuch soll über 10 Jahre hinweg jeweils am Monatsende ein Betrag von 200 € abgehoben werden. Unmittelbar nach der letzten Abhebung sollen noch 1500 € am Sparbuch verbleiben. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

– Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrages, der zu Beginn auf das Sparbuch einbezahlt werden muss (ohne Berücksichtigung der KESt.).

b) Auf ein Sparbuch wird einmalig ein Betrag von 10 000 € und 5 Jahre später einmalig ein Betrag x einbezahlt. Nach insgesamt 8 Jahren soll ein Betrag von 20 000 € zur Verfügung stehen. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

– Erstellen Sie eine Zeitlinie, die diesen Sachverhalt darstellt.

– Berechnen Sie die Höhe des Betrages x ohne Berücksichtigung der KESt.

– Begründen Sie, warum sich die Höhe des Betrages x verringert, wenn er bereits nach 2 Jahren einbezahlt wird.

Datum: 31. August 2018.

Aufgabe 1.3. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Um ein zusätzliches Einkommen zu erwirtschaften, kauft ein Landwirt eine kleine Waldfläche. Er erwirbt eine Waldfläche mit einem Flächeninhalt von 18,6 Hektar (ha). Der Preis liegt bei 0,95 € pro Quadratmeter; der durchschnittliche Erlös pro Jahr soll 300 € pro Hektar betragen. Der Landwirt legt den Erlös an jedem Jahresende auf ein Sparbuch mit einem Zinssatz von i % p. a.

- Berechnen Sie den Kaufpreis.
- Erstellen Sie eine Gleichung, mit deren Hilfe man die Zeitdauer in Jahren, bis der Landwirt Gewinn erzielt, berechnen kann.
- Berechnen Sie den Gewinn 40 Jahre nach dem Kauf des Waldes bei einem Zinssatz von 0,8 % p. a.

Aufgabe 1.4. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Ein Unternehmen schafft für den Materialzuschnitt neue Maschinen an.

Durch den Kauf einer neuen Zuschnittmaschine erwartet man in den ersten 2 Jahren jeweils einen Gewinn von 60 000 €, in den weiteren 3 Jahren einen Gewinn von je 50 000 € und im 6. Jahr einen Gewinn von 35 000 €. Darüber hinaus erwartet man, dass am Ende des 6. Jahres die Maschine um 40 000 € verkauft werden kann.

Der Anschaffungspreis beträgt 284 000 €.

Die Gewinne werden vereinfachend als jährlich nachschüssig angenommen.

- Erstellen Sie eine Zeitlinie für diesen Sachverhalt.
- Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Wert des Anschaffungspreises und dem insgesamt erwirtschafteten Gewinn am Ende des 6. Jahres bei einem Zinssatz von 3 % p. a.

Aufgabe 1.5. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von 30 000 € aufnehmen.

Eine Bekannte bietet Frau Eberharter privat einen Kredit in Höhe von 30 000 € zu einem Zinssatz von 2 % p. a. an. Frau Eberharter soll diesen Kredit folgendermaßen zurückzahlen:

8000 € nach einem Jahr und 2 gleich hohe Raten, eine davon nach 3 Jahren und die andere nach 4 Jahren.

- Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse dar.
- Berechnen Sie die Ratenhöhe.
- Erklären Sie, warum sich diese Ratenhöhe verringert, wenn beide Raten früher bezahlt werden.

Aufgabe 1.6. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Der Außenbereich eines Kindergartens wird vergrößert und zu einem Erlebnisgarten umgestaltet.

Für die Gartengestaltung muss ein Kredit aufgenommen werden.

Die Rückzahlungsraten werden wie folgt jeweils am Ende des Jahres bei einem Jahreszinssatz von 4,5 % p. a. vereinbart:

	1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr	5. Jahr
Rate	€ 4.000	€ 5.000	€ 3.000	€ 0	€ 4.500

– Berechnen Sie den Barwert dieser Ratenzahlung.

– Dokumentieren Sie, wie man die Höhe einer gleichwertigen monatlichen nachschüssigen Rückzahlungsrate berechnen kann, wenn eine konstante Ratenhöhe und eine gleichbleibende Laufzeit angenommen werden.

Aufgabe 1.7. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Ein Landwirt möchte einen größeren Stall bauen. Der Kostenvoranschlag beläuft sich auf 375 000 €.

a) Er spart seit 14 Jahren jährlich vorschüssig 2800 €, die zu 2,3 % p. a. verzinst werden. Zusätzlich hat er vor 22 Jahren 65 000 € auf ein Sparbuch gelegt, das jährlich mit 1,8 % verzinst wird.

– Berechnen Sie, wie viel Geld er für den Stallbau zusätzlich zu seinem vorhandenen Kapital aufbringen muss.

b) Der Landwirt nimmt einen Kredit zur Begleichung der Gesamtkosten von 375 000 € auf. Es werden nachschüssige Jahresraten R gleicher Höhe bei konstantem Zinssatz über einen Zeitraum von 30 Jahren vereinbart.

Er kann die 6., die 7. und die 8. Rate nicht bezahlen. Der Zahlungsausfall wird gleichmäßig auf die Raten der restlichen Laufzeit aufgeteilt.

– Erstellen Sie eine exakte Zeitlinie zur Beschreibung des Zahlungsverlaufs.

Die ursprüngliche Rate beträgt gerundet $R = 23\,841$ €. Der Zinssatz ist 4,8 % p. a.

– Berechnen Sie die neue Ratenhöhe R_{neu}. (Runden Sie das Ergebnis auf ganze Euro.)

c) Die Bank bietet zur Rückzahlung des Kredits von 375 000 € folgende Möglichkeit an:

5 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags wird einmalig eine Zahlung in Höhe von x € entrichtet. Der Rest wird durch eine 10 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags beginnende Rente mit vorschüssigen Jahresraten R über 20 Jahre abgedeckt.

Es ist bei allen Zahlungen von einem durchschnittlichen Jahreszinssatz i auszugehen.

– Modellieren Sie eine Formel zur Berechnung des Einmalbetrags x.

Aufgabe 1.8. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Frau Simon möchte eine Wohnung kaufen. Sie benötigt dazu einen Kredit und holt deswegen bei Banken verschiedene Angebote ein.
Bank A bietet Frau Simon einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. an. Die monatlichen Raten sind nach Auszahlung der Kreditsumme von 120 000 € jeweils am Ende jedes Monats fällig. Die Kreditlaufzeit beträgt 20 Jahre. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Ermitteln Sie den für die Berechnung notwendigen Monatszinssatz.
– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

Aufgabe 1.9. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Für die Finanzierung größerer Anschaffungen ist es oft nötig, einen Geldbetrag anzusparen.
Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

a) Andrea möchte einen Geldbetrag E ansparen.
Dazu legt sie einen Geldbetrag B, der mit dem jährlichen Zinssatz i verzinst wird, für n Jahre auf einem Sparkonto an.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von E, wenn B, n und i bekannt sind.

$$E = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

– Formen Sie diese Formel nach dem Zinssatz i um.

b) Bernhard möchte auf einem Konto in 4 Jahren 4000 € angespart haben. Dazu will er sofort 1000 € auf das Konto legen, nach 1 Jahr 1500 € und nach 3 Jahren den nötigen Restbetrag R. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.
– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
– Erklären Sie in Worten (ohne Rechnung), warum der Restbetrag R kleiner als 1500 € sein muss.
– Berechnen Sie den Restbetrag R.

c) Cornelia führt für ihren Ansparplan folgende Rechnung durch:

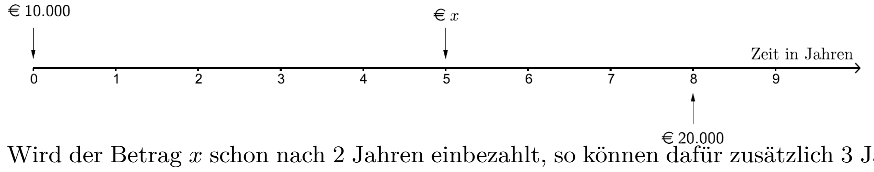
$$5000 \cdot 1{,}035^5 + 1000 \cdot 1{,}035^2 \approx 7009{,}66$$

– Beschreiben Sie diesen Ansparplan hinsichtlich der Zahlungen, des Zinssatzes, der Verzinsungsdauer und des angesparten Geldbetrags in Worten.

d) Daniel möchte in 2 Jahren insgesamt 10 000 € angespart haben. Seine Ersparnisse betragen derzeit 4000 €. Den Restbetrag will er ansparen, indem er jeweils am Ende jedes Monats einen gleichbleibenden Betrag anspart.
– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn die Beträge nicht verzinst werden.
– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn alle Beträge zu einem Zinssatz von 0,25 % p. m. veranlagt werden.

1.1 Der Kredit von 200 000 € wird zurückgezahlt, indem am Ende des 2. Jahres und am Ende des 5. Jahres jeweils 25 000 € bezahlt werden und ab dem 6. Jahr bis zum 20. Jahr immer am Ende des Jahres ein gleich hoher Betrag R bezahlt wird.
$R = 17\,107{,}60...$ €

1.2 **a)** 23 577,50... €

b)


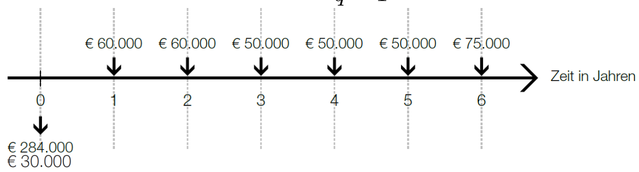
$x = 8353{,}49...$ €

Wird der Betrag x schon nach 2 Jahren einbezahlt, so können dafür zusätzlich 3 Jahre lang Zinsen lukriert werden.

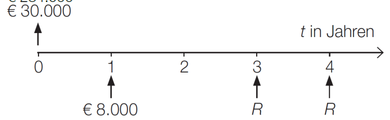
1.3 Kaufpreis: $K = 176\,700$ €
Aufzinsungsfaktor: $q = 1 + i$ $n \ldots$ Zeit in Jahren   Jährliche Einnahmen: $E = 5580$ €

Gleichung $E \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = K \cdot q^n$ nach n auflösen.

Gewinn nach 40 Jahren: $E \cdot \dfrac{q^{40} - 1}{q - 1} - K \cdot q^{40} = 18\,795{,}56...$ €

1.4


Gewinn: 32 157,47... €

1.5


$R = 11\,872{,}92...$ €

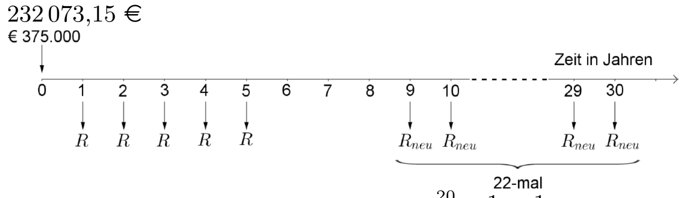
Wenn die Raten früher bezahlt werden, wird die ausstehende Kreditsumme über eine kürzere Zeitspanne verzinst.

1.6 $B \approx 14\,646{,}32$ €
Man berechnet den gleichwertigen monatlichen Aufzinsungsfaktor $r_{12} = \sqrt[12]{1{,}045}$.
Nach 60 Monaten muss der Wert der Einzahlungen gleich groß sein wie der Wert der Auszahlungen, also:

$$B \cdot r_{12}^{60} = R \cdot r_{12}^{59} + R \cdot r_{12}^{58} + \cdots + R \cdot r_{12} + R$$

Aus dieser Gleichung kann R berechnet werden. (R herausheben und geometrische Reihe. $R = 272{,}45...$ €)

1.7 **a)** 232 073,15 €

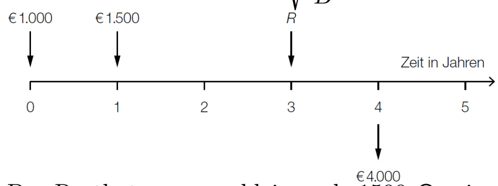
b)


$R_{\text{neu}} \approx 29\,436$ €

c) $q = 1 + i$ $x = 375\,000 \cdot q^5 - R \cdot q \cdot \dfrac{q^{20} - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^{25}}$

1.8 Monatlicher Zinsatz: 0,246... %   Monatsrate: 663,08... €

1.9 **a)** $E = B \cdot (1 + i)^n$ $i = \sqrt[n]{\dfrac{E}{B}} - 1$

b)


Der Restbetrag muss kleiner als 1500 € sein, da die Einzahlungen verzinst werden. $R \approx 1199{,}42$ €

c) 5000 € werden 5 Perioden lang mit einem Zinssatz von 3,5 % pro Periode veranlagt. Nach 3 Perioden kommen noch 1000 € dazu. Nach 5 Perioden beträgt der angesparte Geldbetrag 7009,66 €.

d) Ohne Verzinsung: 250 €   Mit Verzinsung: $\approx 232{,}89$ €

2. Sparen

Prozentrechnung

Erinnere dich, dass wir jede Multiplikation mit einer positiven Zahl auch als Prozentrechnung interpretieren können:

$$G \cdot 0{,}72 \iff G \cdot 72\,\% \iff 72\,\%\ \textbf{von}\ G \iff G\ \textbf{um}\ 28\,\%\ \text{verkleinert.}$$

$$G \cdot 1{,}25 \iff G \cdot 125\,\% \iff 125\,\%\ \textbf{von}\ G \iff G\ \textbf{um}\ 25\,\%\ \text{vergrößert.}$$

$$G \cdot 1{,}00 \iff G \cdot 100\,\% \iff 100\,\%\ \textbf{von}\ G \iff G\ \text{bleibt gleich.}$$

Beispiel 2.1. Ein Kapital von 150 € wächst jährlich um 2 %.

a) Wie groß ist das Kapital nach 8 Jahren?
b) Nach wie viel Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?
c) Mit b_n wird das Kapital nach n Jahren abgekürzt.
Erkläre, warum $\langle b_n \rangle$ eine geometrische Folge ist.

Lösung.

a) Eine Vergrößerung um 2 % erhalten wir durch Multiplikation mit dem Faktor $q = 102\,\% = 1{,}02$.
Nach 8 Jahren beträgt das Kapital also

$$150 \cdot \underbrace{1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot \ldots \cdot 1{,}02}_{8\ \text{Faktoren}} = 150 \cdot 1{,}02^8 \approx 175{,}75\ €.$$

b) Das Kapital nach n Jahren beträgt $150 \cdot 1{,}02^n$. Wir lösen also folgende Gleichung nach n auf:

$$150 \cdot 1{,}02^n = 300 \iff 1{,}02^n = 2 \iff n = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}02)} = 35{,}002\ldots\ \text{Jahre}$$

Das Kapital verdoppelt sich also innerhalb von etwas mehr als 35 Jahren.

c) Nach jedem Jahr ist das Kapital um 2 % größer als das Kapital im Vorjahr. Es gilt also

$$b_{n+1} = b_n \cdot 1{,}02.$$

Die Folge $\langle b_n \rangle$ ist somit eine geometrische Folge mit Quotient $q = 1{,}02$. □

Aufzinsungsfaktor & Zinssatz

Eine Multiplikation mit der Zahl $q = 1{,}02$ vergrößert ein Kapital um 2 % Zinsen.
Die Zahl $\boldsymbol{q}$ nennen wir deshalb auch **Aufzinsungsfaktor**.
Der zugehörige **Zinssatz** 2 % wird häufig mit $\boldsymbol{i}$ abgekürzt. „**i**nterest“ ist englisch für Zinsen.

Finanzmathematik

Wir verwenden folgende Begriffe und Abkürzungen aus der Finanzmathematik:

- Die Abkürzung **p. a.** („per annum“) bedeutet übersetzt „pro Jahr“.
  Ist ein Sparbuch mit „2 % p. a.“ verzinst, zahlt die Bank also pro Jahr 2 % Zinsen.
- Die Kapitalertragssteuer (kurz: **KESt**) beträgt in Österreich 25 %.
  Von den Zinsen zahlt die Bank also 25 % als Steuer an den Staat.
  Die anderen 75 % der Zinsen bleiben der sparenden Person tatsächlich übrig.
- Bewirbt eine Bank ein Sparbuch mit dem Zinssatz „2 % p. a.“, wächst das Kapital wegen der KESt nicht um 2 % pro Jahr, sondern um

$$2\,\% \cdot 0{,}75 = 1{,}5\,\%.$$

  Der tatsächliche Zinssatz nach Berücksichtigung aller Steuern/Gebühren/Spesen heißt auch **effektiver Zinssatz**.

Beispiel 2.2. Innerhalb von 8 Jahren wächst ein Kapital auf einem Sparbuch mit fixem Zinssatz von 3000 € um 334 €. Berechne den jährlichen Zinssatz vor Abzug der KESt.

Lösung. Das Kapital ist innerhalb von 8 Jahren von 3000 € auf 3334 € gewachsen.
Der jährliche Aufzinsungsfaktor q erfüllt also

$$3000 \cdot q^8 = 3334 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q = \sqrt[8]{\frac{3334}{3000}} = 1{,}013\,28... = 101{,}328...\%.$$

Der effektive Zinssatz pro Jahr beträgt somit 1,328...%. Für den Zinssatz i vor Abzug der KESt gilt

$$i \cdot 0{,}75 = 1{,}328...\% \qquad \Longleftrightarrow \qquad i = \frac{1{,}328...\%}{0{,}75} = 1{,}771...\%. \qquad \square$$

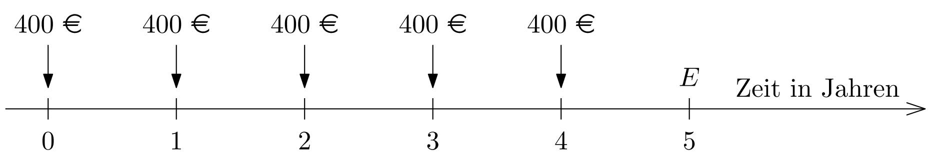
Beispiel 2.3. Du eröffnest ein Sparbuch mit dem effektiven Zinssatz 1,725 % p. a., auf das du zu Jahresbeginn immer den gleichen Betrag R einzahlst.

Bei regelmäßigen Zahlungen an jedem Periodenbeginn sprechen wir auch von einer **vorschüssigen Rente**.

a) Wie viel Geld befindet sich am Ende des fünften Jahres auf dem Sparbuch, wenn du zu Jahresbeginn immer $R = 400$ € einzahlst?

b) Wie groß muss die Rate R sein, damit du nach 5 Jahren 3000 € angespart hast?

Lösung. **a)** Wir stellen die Einzahlungen auf einer **Zeitachse** dar:



Der jährliche Aufzinsungsfaktor q beträgt $q = 101{,}725\,\% = 1{,}017\,25$. Die erste Einzahlung von 400 € wird 5 Mal verzinst, die zweite Einzahlung 4 Mal, ..., die fünfte Einzahlung wird einmal verzinst. Nach 5 Jahren beträgt der Gesamtwert aller Einzahlungen also

$$E = 400 \cdot q + 400 \cdot q^2 + 400 \cdot q^3 + 400 \cdot q^4 + 400 \cdot q^5.$$

E steht für **Endwert**.

Geometrische Reihe

Im Kompetenzheft – Folgen und Reihen haben wir die folgenden Formeln für geometrische Reihen erklärt:

$$\underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Mit $(q-1)$ multiplizieren.

$$\underbrace{b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

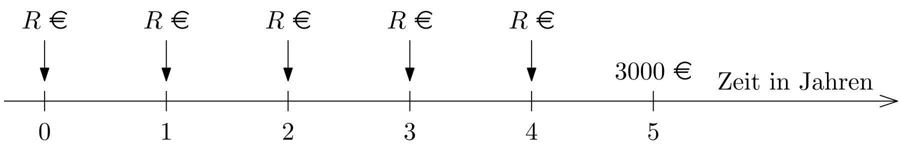
b_1 herausheben.

Wir berechnen also die Summe der ersten $n = 5$ Glieder einer geometrischen Folge $\langle b_n \rangle$ mit Quotient q und erstem Folgenglied $b_1 = 400 \cdot q$:

$$E = 400 \cdot q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} \approx 2105{,}91 \text{ €}.$$

Am Ende des fünften Jahres befinden sich rund 2105,91 € am Sparbuch.

b) Wir stellen die Einzahlungen auf einer Zeitachse dar:

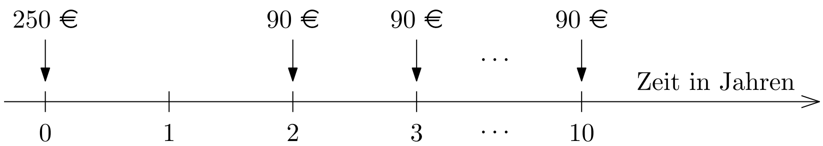


Genau wie in **a)** stellen wir eine Gleichung auf, um die Rate R zu berechnen:

$$R \cdot q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 3000 \quad \iff \quad R = \frac{3000 \cdot (q-1)}{q \cdot (q^5 - 1)} \approx 569{,}82 \text{ €}.$$

□

Beispiel 2.4. Dein Sparkonto hat vor Abzug der KESt den Zinssatz $i = 0{,}8\,\%$ p. a. Deine Einzahlungen auf das Sparkonto sind auf der folgenden Zeitachse dargestellt:



Berechne den Endwert nach 10 Jahren.

Lösung. Der effektive jährliche Zinssatz ist $0{,}8\,\% \cdot 0{,}75 = 0{,}6\,\%$.
Der jährliche Aufzinsungsfaktor ist also $q = 100{,}6\,\% = 1{,}006$.
Wir berechnen damit den Gesamtwert der Einzahlungen nach 10 Jahren:

$$250 \cdot q^{10} + \underbrace{90 \cdot q^8 + 90 \cdot q^7 + \cdots + 90 \cdot q + 90}_{\text{Geom. Reihe mit } b_1 = 90,\ n = 9 \text{ und } q = 1{,}006} = 250 \cdot q^{10} + 90 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} \approx 1095{,}13 \text{ €}. \qquad \square$$

Verzinsungsperioden

Für Zinssätze gelten folgende Abkürzungen:

p. a.	pro Jahr	
p. s.	pro Semester	(also 2 Mal pro Jahr)
p. q.	pro Quartal	(also 4 Mal pro Jahr)
p. m.	pro Monat	(also 12 Mal pro Jahr)

Beispiel 2.5. Du möchtest ein Kapital K mit einem Sparbuch veranlagen.
Zwei (großzügige) Banken bieten dir folgende Konditionen für das Sparbuch an:
Bank A bietet einen effektiven Zinssatz von $24\,\%$ p. a.
Bank B bietet einen effektiven Zinssatz von $2\,\%$ p. m.

a) Bei welcher Bank erhältst du pro Jahr insgesamt mehr Zinsen?
b) Bei welchem monatlichen Zinssatz würdest du jährlich gleich viel Zinsen wie bei Bank A erhalten?

Lösung.

a) Bank B verzinst pro Jahr 12 Mal mit dem Aufzinsungsfaktor $q = 1{,}02$, also insgesamt mit

$$q^{12} = 1{,}02^{12} = 1{,}268\,24... = 126{,}824...\%$$

Der jährliche Zinssatz bei Bank B beträgt also rund $26{,}82\,\%$. Bei Bank B erhält man pro Jahr also mehr Zinsen als bei Bank A. Wir sprechen dabei von **Zinseszinsen**.

b) Der gesuchte Aufzinsungsfaktor ist die positive Lösung der folgenden Gleichung:

$$q^{12} = 1{,}24 \qquad \Longrightarrow \qquad q = \sqrt[12]{1{,}24} = 1{,}018\,08... = 101{,}808...\%$$

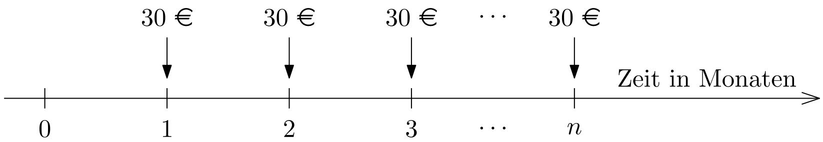
Ein monatlicher Zinssatz von rund $1{,}81\,\%$ entspricht also einem jährlichen Zinssatz von $24\,\%$.

$\square$

Beispiel 2.6. Du eröffnest zu Beginn des Jahres 2018 ein Sparkonto mit dem Zinssatz 1,4 % p. a. vor Abzug der KESt. Jeden Monatsende zahlst du 30 € auf das Konto ein.
Wie lange dauert es, bis du 3000 € angespart hast? Überlege zuerst, wie lange es höchstens dauern kann.
Stelle die Zahlungen auf einer Zeitachse dar.

Bei regelmäßigen Zahlungen an jedem Periodenende sprechen wir auch von einer **nachschüssigen Rente**.

Lösung. Wir stellen die Einzahlungen auf einer Zeitachse dar:



Gesucht ist die kleinste ganze Zahl n, für die der Gesamtwert der Einzahlungen mindestens 3000 € beträgt. Ohne Zinsen hätten wir nach genau $n = 100$ Einzahlungen die 3000 € angespart.
Die Zinsen helfen uns dabei, das Sparziel von 3000 € früher zu erreichen:

Der effektive Zinssatz pro Jahr beträgt $1{,}4\,\% \cdot 0{,}75 = 1{,}05\,\%$.
Der jährliche Aufzinsungsfaktor ist also $101{,}05\,\% = 1{,}0105$.
Der monatliche Aufzinsungsfaktor ist dann $q = \sqrt[12]{1{,}0105} = 1{,}000\,870...$ Speichere den Wert im TR ab.
Wir berechnen, wie viel Geld unmittelbar nach der n-ten Einzahlung angespart ist:
Die letzte Einzahlung von 30 € wurde noch nicht verzinst.
Die Einzahlung aus dem Vormonat wurde einmal mit $q = \sqrt[12]{1{,}0105}$ verzinst.
Die Einzahlung aus dem vorletzen Monat wurde zweimal mit q verzinst.
⋮
Die erste Einzahlung wurde $n - 1$ Mal mit q verzinst.
Unmittelbar nach der n-ten Einzahlung beträgt der Gesamtwert aller Einzahlungen also

$$E_n = 30 + 30 \cdot q + 30 \cdot q^2 + \cdots + 30 \cdot q^{n-1} = 30 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

Wir lösen die Gleichung $E_n = 3000$ nach n auf:

$$30 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3000 \iff q^n - 1 = \frac{3000 \cdot (q-1)}{30} \iff n = \frac{\lg\left(100 \cdot (q-1) + 1\right)}{\lg(q)} = 95{,}92... \text{ Monate}$$

Nach rund 8 Jahren befinden sich 3000 € am Sparkonto. □

Annahmen

In der Praxis sind für exakte Berechnungen weitere Faktoren wichtig:
- Es wird auf den Werktag genau gerechnet.
  So wird auch die unterschiedliche Anzahl an Tagen pro Monat berücksichtigt.
- Je nach Finanzprodukt gibt es Verzinsungen zu bestimmten Stichtagen.
- Es können weitere Steuern/Gebühren/Spesen anfallen.

3. Kredite

Beispiel 3.1. Zu Jahresbeginn nimmst du einen Kredit über 10 000 € auf, der jährlich mit einem effektiven Zinssatz von 3 % verzinst wird.
Du möchtest jedes Jahresende einen fixen Betrag von R € bezahlen, sodass der Kredit nach 8 Jahren abbezahlt ist. Wie hoch muss die Rate R sein? Wie viel Geld zahlst du insgesamt an die Bank zurück?

Lösung. Der jährliche Aufzinsungsfaktor beträgt $q = 1{,}03$.

Zahlungsplan

Wir erstellen mit Technologieeinsatz einen Zahlungsplan in Abhängigkeit von der Rate R:

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Schulden zu Jahresbeginn		Aufzinsungsfaktor	1.03
2	0	10000		Rate	1250
3	1	9050			
4	2	8071.5			
5	3	7063.65			
6	4	6025.55			
7	5	4956.32			
8	6	3855.01			
9	7	2720.66			
10	8	1552.28			

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Schulden zu Jahresbeginn		Aufzinsungsfaktor	1.03
2	0	10000		Rate	1424.56
3	1	8875.44			
4	2	7717.14			
5	3	6524.1			
6	4	5295.26			
7	5	4029.56			
8	6	2725.88			
9	7	1383.1			
10	8	0.03			

Ratenzahlungen mit $R = \frac{10\,000}{8} = 1250$ € sind nicht ausreichend. Warum?
Durch Probieren finden wir die passende Rate R. Jetzt wollen wir R auch berechnen können.

1. Lösungsweg: Mit a_n bezeichnen wir die Schulden nach Bezahlung der n-ten Rate. Dann gilt:

Dieser Lösungsweg ist intuitiver, aber langsamer.

$$\begin{aligned} a_1 &= 10\,000 \cdot q - R \\ a_2 &= a_1 \cdot q - R = 10\,000 \cdot q^2 - R \cdot q - R \\ a_3 &= a_2 \cdot q - R = 10\,000 \cdot q^3 - R \cdot q^2 - R \cdot q - R \\ &\vdots \\ a_8 &= 10\,000 \cdot q^8 - R \cdot q^7 - R \cdot q^6 - \cdots - R \cdot q - R \end{aligned}$$

Nach Bezahlung der 8. Rate sollen die Schulden getilgt sein. Wir lösen also $a_8 = 0$ nach R auf:

$$R + R \cdot q + \cdots + R \cdot q^7 = 10\,000 \cdot q^8 \quad \iff \quad R = \frac{10\,000 \cdot q^8 \cdot (q-1)}{q^8 - 1} \approx 1424{,}56 \text{ €}.$$

Insgesamt zahlst du also $8 \cdot R \approx 11\,397$ € zurück an die Bank.

Grundidee des 2. Lösungswegs

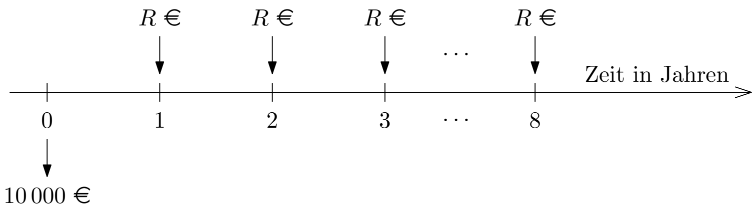
Ich gebe dir einen Kredit von 100 €, und du gibst mir einen Kredit von 100 €.
Wir verlangen beide den gleichen Zinssatz.
Dann sind wir uns *insgesamt* zu keinem Zeitpunkt etwas schuldig.

Du hast einen Kredit und zahlst R € zurück an die Bank.
Deine Schulden werden dadurch also um R € reduziert.
(Gedanklich) könnte die Bank aber auch die Schulden unverändert lassen und dafür ein Sparbuch mit R € und gleichem Zinssatz eröffnen.

So gibt die Bank dir (gedanklich) einen Kredit von R €, indem sie die Schulden unverändert lässt.

Und du gibst der Bank (gedanklich) einen Kredit von R €, indem sie ein Sparbuch mit gleichem Zinsssatz eröffnet.

2. Lösungsweg: Wir zeichnen eine Zeitachse: Dieser Lösungsweg ist flexibler und schneller.



Jede Rate ist (gedanklich) ein Sparbuch bei der Bank mit Aufzinsunsfaktor q.
Der Gesamtwert dieser Einzahlungen nach 8 Jahren ist

$$R \cdot q^7 + R \cdot q^6 + \cdots + R \cdot q + R = R \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1}.$$

Der Kredit wird (gedanklich) nicht reduziert. Der Wert dieser Auszahlung nach 8 Jahren ist

$$10\,000 \cdot q^8 = 12\,667{,}70... \text{ €}.$$

Nach 8 Jahren soll der Kredit abbezahlt sein. Zu diesem Zeitpunkt muss also der Gesamtwert der Einzahlungen gleich groß sein wie der Gesamtwert der Auszahlung:

$$R \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 12\,667{,}70... \text{ €} \quad \Longleftrightarrow \quad R \approx 1424{,}56 \text{ €}$$

□

Kochrezept für Spar- und Kreditaufgaben

1) Aufzinsungsfaktor(en) berechnen.

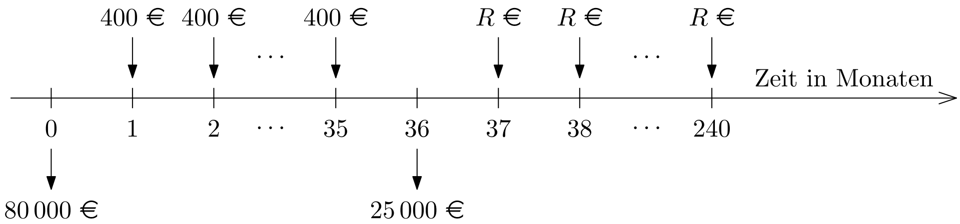
2) Bezugszeitpunkt wählen. Wähle zum Beispiel den letzten genannten Zeitpunkt in der Aufgabenstellung.
Den Gesamtwert der Einzahlungen und Auszahlungen zum Bezugszeitpunkt berechnen.

Bei regelmäßigen Zahlungen über einen längeren Zeitraum kannst du die Rechnung mit einer geometrischen Reihe abkürzen.

3) Mit den beiden Gesamtwerten eine Gleichung aufstellen.

4) Aus der Gleichung die gesuchte Größe berechnen.

Beispiel 3.2. Für einen Wohnungskauf nimmst du einen Kredit in Höhe von 80 000 € auf.
Der effektive Zinssatz beträgt 3,75 % p.a.
Du vereinbarst mit der Bank eine flexible Rückzahlung, bei der du jederzeit Teilbeträge zurückzahlen kannst. Für den Kauf eines Autos nimmst du nach 3 Jahren einen zusätzlichen Kredit unter den gleichen Bedingungen auf. Der Zahlungsverlauf ist auf der folgenden Zeitachse dargestellt:



Wie groß muss die Rate R sein, damit die Schulden nach insgesamt 20 Jahren getilgt sind?
Wie viel Geld zahlst du zur Tilgung der Schulden insgesamt an die Bank zurück?

Lösung.

1) Der jährliche Aufzinsungsfaktor ist $103{,}75\% = 1{,}0375$.
Der monatliche Aufzinsungsfaktor ist also $q = \sqrt[12]{1{,}0375} = 1{,}003\,072....$

2) Wir berechnen den Wert aller Ein- und Auszahlungen zum Bezugszeitpunkt nach 240 Monaten:
Der Gesamtwert der ersten 35 Einzahlungen beträgt nach 240 Monaten

$$400 \cdot q^{239} + 400 \cdot q^{238} + \cdots + 400 \cdot q^{205} = 400 \cdot q^{205} \cdot \frac{q^{35} - 1}{q - 1} = 27\,676{,}83... \text{ €}.$$

Der Gesamtwert der $240 - 36 = 204$ Ratenzahlungen in Höhe von R € beträgt nach 240 Monaten

$$R \cdot q^{203} + R \cdot q^{202} + \cdots + R \cdot q + R = R \cdot \frac{q^{204} - 1}{q - 1}.$$

Der Gesamtwert der beiden Auszahlungen beträgt nach 240 Monaten

$$80\,000 \cdot q^{240} + 25\,000 \cdot q^{204} = 213\,797{,}44... \text{ €}.$$

3) Nach 240 Monaten sollen die Schulden getilgt sein. Der Gesamtwert der Einzahlungen muss also gleich groß sein wie der Gesamtwert der Auszahlungen:

$$27\,676{,}83... \text{ €} + R \cdot \frac{q^{204} - 1}{q - 1} = 213\,797{,}44... \text{ €}$$

4) Aus dieser Gleichung berechnen wir die gesuchte Rate R:

$$R = 186\,120{,}60... \cdot \frac{q - 1}{q^{204} - 1} \approx 657{,}46 \text{ €}$$

Ingesamt werden zur Tilgung der Schulden $R \cdot 204 + 400 \cdot 35 \approx 148\,121{,}17$ € an die Bank zurückgezahlt. □

Barwert

Du darfst wählen:

- Entweder du bekommst in 5 Jahren garantiert eine Zahlung von $E = 4200$ €.
- Oder du bekommst heute einen Betrag B, den du zu einem fixen Zinssatz $i = 2\,\%$ p. a. veranlagen kannst.

Ab welchem Betrag B solltest du dich jedenfalls für die zweite Option entscheiden?

Erkläre, warum $B = \dfrac{4000}{1{,}02^5} \approx 3622{,}92$ € gilt.

Dem **Aufzinsungsfaktor q** entspricht der **Abzinsungsfaktor $\frac{1}{q}$**.

Barwert

Der **Barwert B** gibt an, welchen Wert zukünftige Zahlungen zu einem bestimmten früheren Zeitpunkt haben.

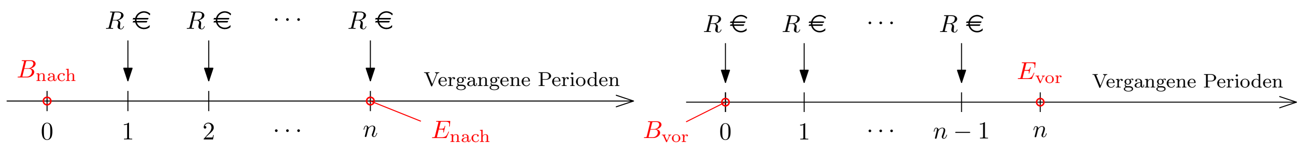
Rentenrechnung

Du zahlst zu periodischen Zeitpunkten insgesamt n Raten in Höhe von R €.
Der Aufzinsungsfaktor pro Periode ist q.
Für den Endwert und den Barwert gelten dann die folgenden Formeln:

	nachschüssig	vorschüssig
Endwert E	$E_{\text{nach}} = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	$E_{\text{vor}} = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$
Barwert B	$B_{\text{nach}} = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^n}$	$B_{\text{vor}} = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^{n-1}}$

Formeln in der Rentenrechnung

Erkläre die Formeln für den Endwert bei vorschüssigen bzw. nachschüssigen Zahlungen:



Erkläre anhand der Zeitachsen die Zusammenhänge

$$E_{\text{nach}} = B_{\text{nach}} \cdot q^n \quad \text{und} \quad E_{\text{vor}} = B_{\text{vor}} \cdot q^n.$$

Erkläre damit die Formeln für den Barwert bei vorschüssigen bzw. nachschüssigen Zahlungen.

Zum Lösen der Spar- und Kreditaufgaben sind diese Formeln aber nicht notwendig.

Es reicht das vorgestellte Kochrezept und die Summenformel für geometrische Folgen.

4. Weitere Aufgabenstellungen

Aufgabe 4.1. Du eröffnest zu Jahresbeginn ein Sparbuch mit effektivem Zinssatz 2,125 % p. a. und einem jährlich gleichen Einzahlungsbetrag.
Du berechnest den Endwert des Sparbuchs folgendermaßen:

$$E = 800 \cdot q^6 + 800 \cdot q^5 + 800 \cdot q^4 + \dots + 800 \cdot q$$

a) Gib den Aufzinsungsfaktor q an.
b) Du zahlst jährlich 800 € ein. Woran erkennst du, ob der Betrag zu Jahresanfang oder zum Jahresende eingezahlt wird?
c) Wie viele Jahre Laufzeit hat das Sparbuch?
d) Berechne den Endwert des Sparbuchs.

Aufgabe 4.2. Für eine private Pensionsvorsorge zahlst du über 40 Jahre am Monatsende 50 € auf ein Pensionskonto. Berechne den Endwert, wenn die jährliche Verzinsung effektiv 3,25 % beträgt.

Aufgabe 4.3. Ein Kredit von 25 000 € wird jährlich mit einem effektiven Zinssatz von 4 % verzinst. Du möchtest jedes Monatsende einen fixen Betrag von R € bezahlen, sodass der Kredit nach 20 Jahren abbezahlt ist. Wie hoch muss die monatliche Rate R sein? Wie viel Geld zahlst du insgesamt an die Bank zurück?

Aufgabe 4.4. Lucina und Lukas nehmen zu Jahresbeginn jeweils einen Kredit in Höhe von $K = 12\,000$ € mit einem effektiven Zinssatz von $i = 2{,}25\,\%$ p. a. auf.

a) Berechne nach wie viel Jahren die Schulden von Lucina erstmals mehr als 16 000 € betragen, wenn sie kein Geld zurückzahlt.
b) Lukas möchte seine Schulden durch fixe monatliche Raten in Höhe von $R = 100$ € tilgen.
Stelle den Zahlungsverlauf auf einer Zeitachse dar.
Wie lange dauert es, bis Lukas den Kredit abbezahlt hat?

Aufgabe 4.5. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Bei einem Bausparvertrag werden jährlich am Jahresanfang 1200 € eingezahlt. Die Laufzeit beträgt 6 Jahre. Jeweils am Jahresende erhält der Kunde eine steuerfreie Prämie von 36 €. Die Kapitalertragsteuer (KESt) beträgt jährlich 25 %.
Die Raiffeisen-Bausparkasse gibt dem Kunden für das 1. Jahr einen Einstiegszinssatz vor KESt von $i = 3{,}125\,\%$ p. a. In den restlichen 5 Jahren wird ein Zinssatz vor KESt von 1,64 % p. a. bezahlt.
Berechnen Sie unter Berücksichtigung der KESt und der vom Staat erstatteten Prämie von jährlich 36 € den Kontostand am Ende der Laufzeit. Beachten Sie, dass die Prämien jeweils am Ende jedes Jahres KESt-frei zum Gesamtkapital addiert, die Zinsen der Prämienbeträge aber mit 25 % KESt versteuert werden.

4.1 **a)** $q = 1{,}021\,25$

b) Einzahlung zu Jahresanfang („vorschüssig“), weil die letzte Einzahlung auch verzinst wurde. $(800 \cdot q)$

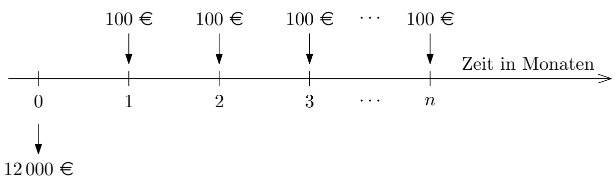
c) 6 Jahre

d) $E \approx 5169{,}92$ €

4.2 $E \approx 48\,602{,}24$ €

4.3 Die monatliche Rate beträgt $R = 150{,}55...$ €. Insgesamt werden $240 \cdot R \approx 36\,133$ € an die Bank zurückgezahlt.

4.4 **a)** Nach 13 Jahren sind die Schulden erstmals über 16 000 €.

b) 

Der Kredit ist nach rund 136 Monaten abbezahlt.

4.5 7753,35 €