# Lineare Algebra II – Winter 2018

**1.** *(25 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
**Bewertung:**
- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

**(i)** Jede reelle $2018 \times 2018$ Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

**(ii)** Sei $A$ eine Matrix mit $\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 3X$, so ist $A$ invertierbar.

**(iii)** Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenvektoren.

**(iv)** Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei $\mathrm{char}_T$ das charakteristische Polynom von $T$. Dann gilt $\mathrm{char}_T(T) = 0$.

**(v)** Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

**(vi)** Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sodass $AB$ nilpotent ist, aber $BA$ nicht nilpotent ist.

**(vii)** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $S \subset V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = S$.

**(viii)** Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum, sei $W$ ein Unterraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls $W$ $T$-invariant ist, dann ist $W^\perp$ auch $T$-invariant.

**(ix)** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei $T$ ein Endomorphismus auf $V$. Dann besitzen $T$ und $T^*$ dieselben Eigenvektoren.

**(x)** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine selbstadjungierte Abbildung. So gilt $\dim \mathrm{Ker}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T^2)$.

**(xi)** Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zwei selbstadjungierte Matrizen. Dann ist $AB - BA$ ebenfalls selbstadjungiert.

**(xii)** Sei $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und $A = A^T$. Dann liegen alle Eigenwerte von $A$ in $\{-1, 1\}$.

**(xiii)** Jede orthogonale Abbildung ist diagonalisierbar.

**(xiv)** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Sei $T$ ein orthogonaler Endomorphismus auf $V$ und sei $\det(T) = -1$. Dann ist $T$ eine Reflexion.

**(xv)** Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zwei kongruente Matrizen. Dann haben $A$ und $B$ dieselben Eigenwerte.

**(xvi)** Jede Bilinearform auf einem reellen Vektorraum definiert ein inneres Produkt.

**(xvii)** Jedes innere Produkt auf einem reellen Vektorraum definiert eine Bilinearform.

**(xviii)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist $\mathrm{tr}(A) > 0$.

**(xix)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist $A^{-1}$ auch positiv definit.

**(xx)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann ist $A$ ähnlich zu $A^T$.

**(xxi)** Alle unitären Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

**(xxii)** Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$.

**(xxiii)** Für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$ und für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $u^*Av = (u^*Av)^T$.

**(xxiv)** Sei $V$ ein komplexer Vektorraum. Für jede Sesquilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ gilt $\forall u \in V : \gamma(u, u) \in \mathbb{R}$.

**(xxv)** Jede normale Matrix ist entweder selbstadjungiert oder unitär.

**2.** **a)** *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition der Diagonalisierbarkeit für Endomorphismen auf endlichdimensionalen Vektorräumen.

Betrachten Sie die Abbildung $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$T(p) = p(2) + p'(0)x + \big(p'(0) + \tfrac{3}{2}p''(0)\big)x^2.$$

**b)** *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass $T$ diagonalisierbar ist.

**c)** *(4 Punkte)* Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $P_2(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von $T$.

**d)** *(4 Punkte)* Sei $S : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ die lineare Abbildung definiert durch

$$S(1) = -2, \quad S(x) = 1 + x + x^2, \quad S(x^2) = 10 + 3x^2.$$

Zeigen Sie, dass eine Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ von $P_2(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von $S$ und $T$ existiert.

**3.** **a)** *(2 Punkte)* Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Geben Sie die Definition einer Bilinearform auf $V$.

**b)** *(3 Punkte)* Es gelte $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$. Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $\beta$ eine nicht-triviale symmetrische Bilinearform auf $V$. Beweisen Sie, dass ein $v \in V$ existiert mit $\beta(v, v) \neq 0$.

**c)** *(5 Punkte)* Sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sei $\beta_A$ gegeben durch $\beta_A(v, w) = \beta(v, Aw)$. Zeigen Sie, dass $\beta_A$ genau dann symmetrisch ist, wenn $GA = A^T G$ gilt für die Darstellungsmatrix $G$ von $\beta$ bezüglich der Standardbasis.

**d)** *(5 Punkte)* Sei $\beta$ eine nicht-degenerierte, symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Definieren Sie

$$O(\beta) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \beta(Au, Av) = \beta(u, v)\},$$

und zeigen Sie, dass $O(\beta)$ versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

**4.** **a)** *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition einer Jordanbasis.

**b)** *(3 Punkte)* Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Zwei lineare Abbildungen, die das gleiche, in Linearfaktoren zerfallende, charakterische Polynom besitzen, besitzen (bis auf Ähnlichkeit) dieselbe Jordannormalform.

**c)** *(4 Punkte)* Bestimmen Sie eine Jordannormalform der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{6\times 6}(\mathbb{K}).$$

**Bitte wenden!**

**d)** *(6 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $I_n - J_{n,0}$ und $I_n + J_{n,0}$ über $\mathbb{K}$ zueinander ähnlich sind, wobei $J_{n,0}$ der $n \times n$-Jordanblock zum Eigenwert 0 ist.

**5.** Im Folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Gegeben $u \in V$, definieren Sie eine Abbildung $H_u : V \to V$ durch $H_u(v) = v - 2\langle u, v \rangle u$.

**a)** *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $H_u$ linear ist.

**b)** *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $H_u = I_V \iff u = 0$.

**c)** *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $H_u^*$ existiert. Folgern Sie, dass $H_u$ selbstadjungiert ist.

**d)** *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $H_u$ genau dann unitär ist, wenn $\|u\| \in \{0, 1\}$ ist.

**e)** *(3 Punkte)* Sei $V$ ist endlichdimensional. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $H_u$.

**6.** **a)** *(10 Punkte)* Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Zeigen Sie, dass $A$ eine eindeutige symmetrische, positiv definite Quadratwurzel besitzt, d.h. es existiert genau eine Matrix $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit, sodass $A = B^2$.

**b)** *(5 Punkte)* Bestimmen Sie die symmetrische, positiv definite Quadratwurzel der Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$