Lösung 1

Hinweise

3. Je ein nichttrivialer Teiler der Zahlen $n! + 2, \ldots, n! + n$ kann explizit angegeben werden.

4. Gehen Sie analog zum Beweis von Lemma 1.3 im Skript vor.

5. Gehen Sie die möglichen Kombinationen der Status der angetroffenen Einwohner durch. Immer, wenn Sie einen Widerspruch erhalten, können Sie diese Kombination ausschliessen.

6. Überlegen Sie, ab welchem $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$ nicht mehr wahr ist. Einer der Induktionsschritte vor diesem n muss dann falsch sein.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 3 und 6 zur Verfügung gestellt.

3. Um zu zeigen, dass eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist, reicht es einen natürlichen Teiler k von m anzugeben, der weder 1 noch m ist. Einen solchen Teiler nennen wir *nichttrivial*.

Seien also $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$n! + k = k \cdot \big(n \cdots (k+1)(k-1) \cdots 1 + 1\big).$$

Also ist k ein nichttrivialer Teiler von $n! + k$. Nach dem eingangs Bemerkten ist $n! + k$ also keine Primzahl.

6. Der Fehler liegt darin, dass der Induktionsschritt von $P(1)$ nach $P(2)$ nicht funktioniert. Beim Anlocken der zweiten Ente kann man nämlich nur dann schliessen, dass alle im Teich verbliebenen Enten gelb sind, wenn es dort zumindest eine Ente gibt, die auch beim Anlocken der ersten Ente im Teich zurückgeblieben ist. Wenn wir insgesamt nur zwei Enten haben, ist dies aber nicht der Fall.

Bemerkung: Für $k \geq 2$ ist der Induktionsschritt von $P(k)$ nach $P(k+1)$ korrekt. Dies ist aber nicht relevant, da $P(2)$ nicht wahr ist, da es zumindest zwei Enten unterschiedlicher Farbe gibt.[citation needed]