Übungsblatt 12

1. Es sei $B = [-1,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ von f durch den Rand ∂B von B auf zwei Arten:

a) direkt anhand der Definition von Flussintegralen;

b) unter Verwendung des Divergenzsatzes.

2. In der Vorlesung wurde bemerkt, dass die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

im Sinne uneigentlicher Mehrfachintegrale nicht integrierbar ist. Beweisen Sie diese Aussage.

3. Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die Formel

$$\operatorname{div}(A \circ f \circ A^{-1})(x) = \operatorname{div}(f)(A^{-1}x).$$

Bemerkung: Die Divergenz eines differenzierbaren n-dimensionalen Vektorfelds $g = (g_1, \ldots, g_n)^t$ ist definiert als $\operatorname{div}(g) = \partial_1 g_1 + \cdots + \partial_n g_n$.

4. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\langle Ax, x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Bitte wenden!

5. Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der n-dimensionalen Polarkoordinatenabbildung Φ_n (vgl. Aufgabe 5 der Serie 8).

b) Seien $r_0, r_1 \in [0, \infty]$ mit $r_0 < r_1$ und setze $K_{r_0,r_1} = B_{r_1}^{\mathbb{R}^n}(0) \setminus \overline{B_{r_0}^{\mathbb{R}^n}(0)}$. Jede Funktion $f\colon (r_0, r_1) \to \mathbb{R}$ definiert dann eine rotationssymmetrische Funktion

$$f^\circ\colon K_{r_0,r_1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(\|x\|_2).$$

Sei nun f stetig und nichtnegativ. Zeigen Sie, dass f° genau dann über K_{r_0,r_1} uneigentlich Riemann-integrierbar ist wenn $r \mapsto f(r)r^{n-1}$ über (r_0, r_1) uneigentlich Riemann-integrierbar ist, und dass in diesem Fall die Formel

$$\int_{K_{r_0,r_1}} f^\circ(x)\,\mathrm{dvol}(x) = n\omega_n \int_{r_0}^{r_1} f(r)r^{n-1}\,\mathrm{d}r$$

gilt. Hierbei bezeichnet ω_n wie üblich das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes.

6. Beweisen Sie die Identität

$$\int_{[0,1)^2} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{dvol}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Was ist der Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2+xy-y^2}\,\mathrm{dvol}(x,y)?$$

(a) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(b) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$

(d) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B = [a,b] \times [c,d] \subset U$ ein Rechteck und $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld auf U. Sei des Weiteren $\mathbf{n}\colon \partial B \to \mathbb{R}^2$ ein Aussennormalenfeld auf B und

$$I_u = \int_a^b \langle f(x,c), \mathbf{n}(x,c)\rangle\,\mathrm{d}x,\ \ I_r = \int_c^d \langle f(b,y), \mathbf{n}(b,y)\rangle\,\mathrm{d}y,$$

$$I_o = \int_a^b \langle f(x,d), \mathbf{n}(x,d)\rangle\,\mathrm{d}x,\ \ I_l = \int_c^d \langle f(a,y), \mathbf{n}(a,y)\rangle\,\mathrm{d}y.$$

Welcher der folgenden Ausdrücke stimmt dann mit dem Fluss $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ von f durch ∂B überein?

(a) $I_u + I_r + I_o + I_l$

(b) $I_u + I_r - I_o - I_l$

(c) $I_u - I_r + I_o - I_l$

Bitte wenden!

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welcher der folgenden Ausdrücke stimmt im Allgemeinen mit $\operatorname{div}(\varphi f)$ überein?

(a) $\varphi \operatorname{div}(f)$

(b) $\langle \operatorname{div}(\nabla\varphi), f\rangle + \varphi \operatorname{div}(f)$

(c) $\operatorname{div}(f)\nabla\varphi$

(d) $\langle \nabla\varphi, f\rangle + \varphi \operatorname{div}(f)$

4. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon B \to \mathbb{R}$ eine fast überall stetige Funktion. Reicht es für den Nachweis der uneigentlichen Riemann-Integrierbarkeit von f über B zu zeigen, dass für eine einzige Ausschöpfung $(B_m^*)_m$ von B der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m^*} |f| \operatorname{dvol}$ existiert?

(a) Ja, dies reicht immer.

(b) Nein, man muss annehmen, dass der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} |f| \operatorname{dvol}$ für jede Ausschöpfung $(B_m)_m$ von B existiert und denselben Wert hat.

(c) Nein, man muss zusätzlich annehmen, dass eine Ausschöpfung $(B_m)_m$ von B existiert, so dass $f|_{B_m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist.

(d) Nein, Betrachtung von $|f|$ sagt nie etwas über f aus.

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$. Wie im Skript am Ende von Abschnitt 12.7.1 angemerkt ist für eine im Sinne uneigentlicher Mehrfachintegrale integrierbare Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}$ automatisch auch der Betrag $|f|\colon B \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Ist Folgendes ein korrekter Beweis dieser Aussage?

Äquivalent zu Grenzwerten von Integralen über Mengen in Ausschöpfungen können in der Definition von uneigentlichen Mehrfachintegralen auch Summen von Integralen über Mengen in abzählbaren Jordan-messbaren Partitionen betrachtet werden. Wegen $|f| \geq 0$ reicht es für die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$ daher zu zeigen, dass eine solche Partition $(A_m)_m$ von B existiert mit $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} |f| \,\mathrm{dvol} < \infty$. Dazu wählen wir eine Partition $(A_m)_m$ mit der Eigenschaft, dass die Einschränkungen $f|_{A_m}$ keine Vorzeichenwechsel haben. (Dies ist möglich, indem man mit einer beliebigen Partition startet und dann die Schnitte mit den Mengen $\{x \in B \mid f(x) \geq 0\}$ und $\{x \in B \mid f(x) < 0\}$ bildet.) Die Integrierbarkeit von f impliziert nun, dass jede Umordnung der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} f \,\mathrm{dvol}$ gegen denselben Wert konvergiert. Nach dem Riemannschen Umordnungssatz ist diese Reihe daher sogar absolut konvergent. Da für alle $m \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion aber $\left|\int_{A_m} f \,\mathrm{dvol}\right| = \int_{A_m} |f| \,\mathrm{dvol}$ gilt, beweist dies die Konvergenz von $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} |f| \,\mathrm{dvol}$, und dies ist genau was wir zeigen mussten.

(a) Ja.

(b) Nein.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 11. Mai 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 11. Mai 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.

- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 14. Mai 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.