ETHZ FS19

MMP 2 Serie 12 Prof. T. Willwacher

Aufgabe 1. Zerlege in irreduzible Darstellungen von $SU(2)$:

a) $V_{10} \otimes V_3$

b) $V_2 \otimes V_2 \otimes V_2$

c) $V_1 \otimes V_1 \otimes V_1$

d) $S^3 V_2$ (Hilbertraum von 3 identischen Spin 1-Bosonen.)

e) $\Lambda^3 V_3$ (Hilbertraum von 3 identischen Spin $\frac{3}{2}$-Fermionen.)

Aufgabe 2. Eine unitäre projektive Darstellung der Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$G \to U(n)/S^1 \quad \text{wobei} \quad S^1 = \{c\mathbb{1} \mid c \in \mathbb{C},\ |c| = 1\}$$

a) Zeige, dass jede irreduzible Darstellung von $SU(2)$ eine projektiven Darstellung von $SO(3)$ induziert, d.h. wir haben ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd} SU(2) \arrow[r] \arrow[dr] & U(n) \arrow[r] & U(n)/S^1 \\ & SO(3) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

b) Sei umgekehrt $\nu : SO(3) \to U(n)/S^1$ eine projektive Darstellung von $SO(3)$. Zeige, dass eine Darstellung von $SU(2)$ existiert, so dass ν die zugehörige projektive Darstellung von $SO(3)$ induziert. Gehe wie folgt vor.

i) Finde eine geeignete Darstellung $su(2) \to su(n)$ der Lie-Algebra.

ii) Da $SU(2)$ einfach zusammenhängend ist, kann man diese auf $SU(2)$ fortsetzen.

iii) Die zugehörige projektive Darstellung von $SO(3)$ ist ν.

Bemerkung. In der Quantenmechanik werden Zustände durch Einheitsvektoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ beschrieben. Da eine globale Phase aber nicht beobachtbar ist, ist eigentlich richtiger, den Zustand durch ein Element im projektiven Raum

$$\{v \in \mathcal{H} \mid \langle v, v\rangle = 1\}/S^1$$

zu beschreiben. Dies erklärt, mit der obigen Aufgabe, wieso man in der QM die Drehgruppe $SO(3)$ durch $SU(2)$ ersetzen darf, obwohl unsere Welt offenbar $SO(3)$-symmetrisch ist, nicht $SU(2)$-symmetrisch.

Aufgabe 3. Es sind

$$\begin{aligned} O(1,3) &= \{A \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) \mid (Ax, Ay) = (x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^4\} \\ O_+(1,3) &= \{A \in O(1,3) \mid A_{00} > 0\} \\ SO(1,3) &= O(1,3) \cap SL(4,\mathbb{R}) \\ SO_+(1,3) &= SO(1,3) \cap O_+(1,3) \end{aligned}$$

wobei $(-,-)$ das Minkowski Skalarprodukt ist. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Eine 4×4 Matrix ist genau dann in $O(1,3)$ wenn ihre Zeilen (oder equivalent Spalten) bezüglich dem Minkowski Skalarprodukt orthonormiert sind.

b) Jede Matrix $M \in SO_+(1,3)$ ist von der Form $R_1 L(\chi) R_2$ wobei $L(\chi)$ ein Lorentzboost mit Rapidität $\chi \in \mathbb{R}$ in die 3-Richtung ist und $R_1, R_2 \in SO(3)$.

Aufgabe 4 (Alte Prüfungsaufgabe)**.** Sei $G = SU(2)$ und, für jede ganze Zahl $l \geq 0$, sei U_l der Vektorraum der homogenen Polynome in zwei Variablen x_1, x_2 vom Grad l mit komplexen Koeffizienten. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für jede ganze Zahl $l \geq 0$ die Abbildung

$$\rho_l : G \to GL(U_l),$$

definiert durch

$$\rho_l(A)(f)(x) = f(A^{-1}x), \qquad f \in U_l, A \in G,$$

eine irreduzible Darstellung von G auf U_l definiert.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} U_2 \times U_2 &\to U_4 \\ (p,q) &\mapsto pq \end{aligned}$$

einen surjektiven Homomorphismus von G-Darstellungen

$$\phi : U_2 \otimes U_2 \to U_4$$

induziert.
Hinweis: In der Vorlesung wurde für Homomorphismen von G-Darstellungen auch der Begriff *G-äquivariante lineare Abbildung* verwendet.

b) Man kann zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} U_2 \times U_2 &\to U_0 \\ (p,q) &\mapsto \left(a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) q, \end{aligned}$$

wobei die komplexen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}$ durch

$$p(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

gegeben sind, einen Homomorphismus von G-Darstellungen

$$\psi : U_2 \otimes U_2 \to U_0$$

induziert. Ebenso kann man zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} U_2 \times U_2 &\to U_2 \\ (p,q) &\mapsto \frac{\partial p}{\partial x_1}\frac{\partial q}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}\frac{\partial q}{\partial x_1} \end{aligned}$$

einen Homomorphismus von G-Darstellungen

$$\chi : U_2 \otimes U_2 \to U_2$$

induziert. Sie dürfen im Folgenden annehmen, dass die Abbildungen ψ und χ Homomorphismen von G-Darstellungen sind. Zeigen Sie: Die drei Abbildungen ϕ, ψ, χ definieren zusammen einen Isomorphismus

$$U_2 \otimes U_2 \to U_4 \oplus U_2 \oplus U_0$$

von G-Darstellungen.