Serie 5 - Bonusaufgabe

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt am **Freitag, den 20. März** als Scan per E-mail (oder via polybox, falls angeboten) an ihre/ihren Übungsgruppenleiterin/Übungsgruppenleiter. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

---

1. Betrachten Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume der beiden Matrizen A_1 und A_2. Zeichnen Sie die Eigenräume von A_1 und A_2 in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

Die Matrix A_1 kann wie folgt diagonalisiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:T_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:T_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=:D_1}.$$

(b) Vergleichen Sie die Transformationsmatrix T_1 und die Diagonalmatrix D_1 mit Ihren Berechnungen in Teilaufgabe (a). Was fällt Ihnen auf?

(c) Ist es auch möglich, die Matrix A_1 mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe (a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Die Matrix A_2 kann wie folgt diagonalisiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:T_2^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:T_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:D_2}.$$

(d) Vergleichen Sie die Transformationsmatrix T_1 und die Diagonalmatrix D_1 mit Ihren Berechnungen in Teilaufgabe (a). Was fällt Ihnen auf?

(e) Ist es auch möglich, die Matrix A_2 mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe (a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

2. Betrachten Sie die Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume der Matrizen B_1 und B_2.

   (b) Diagonalisieren Sie die Matrix B_1 mithilfe Ihrer Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (b) und (d) aus der vorhergehenden Aufgabe. Denn: Die Diagonalisierung von 2×2-Matrizen und 3×3-Matrizen verläuft analog.

   (c) Ist es auch möglich, die Matrix B_1 mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

   (d) Diagonalisieren Sie die Matrix B_2 mithilfe Ihrer Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (b) und (d) aus der vorhergehenden Aufgabe.

   (e) Ist es auch möglich, die Matrix B_2 mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

3. Vergleichen und kontrastieren Sie die Matrizen A_1 und B_1. Welche Eigenschaft haben diese beiden Matrizen gemeinsam?

Serie 5

Die Aufgaben 1–5 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Donnerstag, den 27. März um 14:00 Uhr** ab. Die Abgabe der Serie erfolgt als Scan per E-mail (oder via polybox, falls angeboten) an ihre/ihren Übungsgruppenleiterin/Übungsgruppenleiter.

---

1. Die Abbildung $V^n \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$, die jedem Vektor seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ zuordnet, ist linear.

(a) richtig

(b) falsch

2. Bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 im $\mathbb{R}^3$ ist die Orthogonalprojektion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \langle x, e_1 \rangle e_1$ gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) richtig

(b) falsch

3. Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linear. Dann existiert ein Vektor, der gleichzeitig im Kern und im Bild von $\mathcal{F}$ liegt.

(a) richtig

(b) falsch

4. Sei x eine Linearkombination von Spalten der Matrix A und y eine Lösung von $A^\top y = 0$. Dann stehen x und y bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander.

(a) richtig

(b) falsch

5. Falls der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur aus dem Nullvektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

6. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\operatorname{Kern} A$ und $\operatorname{Bild} A$.

7. Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

a) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschrieben?

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\dim(\operatorname{Kern} A)$.

c) Bestimmen Sie $\operatorname{Bild} A$ und $\dim(\operatorname{Bild} A)$.

8. Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_2$ in sich:

$$P(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad Q(x) = (2-x)\, P'(x) \in \mathcal{P}_2.$$

$\mathcal{F}$ ordnet jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = (2-x)\, P'(x)$ zu ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis 1, x, x^2 von $\mathcal{P}_2$ beschrieben?