Integrierbarkeit

1. Treppenfunktionen: Eine Treppenfunktion ist eine μ-messbare Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$, so dass das Bild von Ω abzählbar ist. Im Gegensatz zu was man beim Namen Treppenfunktion vielleicht erwarten würde (und auch im Gegensatz zu was man für Riemannintegrierbarkeit verwendet), müssen die Urbilder $g^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}$, keine Intervalle sein, sondern lediglich messbare Mengen.

Beispiel. $g(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ ist eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}$ (bezüglich dem Mass $\mathscr{L}^1$).

Definition. Für eine Treppenfunktion g ist

$$\int_\Omega g d\mu = \sum_{a \neq 0} a\mu(g^{-1}\{a\}).$$

Beispiel. Da die rationalen Zahlen eine Nullmenge bezüglich dem Lebesguemass ist, gilt $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}\, d\mathscr{L}^1 = 0$. Diese Funktion ist das bekannteste Beispiel einer Funktion, welche Lebesgueintegrierbar ist, aber nicht Riemannintegrierbar.

2. messbare Funktionen: Für eine allgemeine Funktion approximieren wir von oben und von unten mit Treppenfunktionen:

Definition. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar. Dann definieren wir

$$\overline{\int_\Omega} f\, d\mu = \inf\{\int_\Omega s\, d\mu \mid s \geq f \text{ Treppenfunktion } \},$$
$$\underline{\int_\Omega} f\, d\mu = \sup\{\int_\Omega s\, d\mu \mid s \leq f \text{ Treppenfunktion } \}.$$

Falls $\overline{\int_\Omega} f\, d\mu = \underline{\int_\Omega} f\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$, so heisst f integrierbar und man nennt diesen Wert das Integral von f.

Bemerkung. In der Literatur wird integrierbar manchmal auch verwendet, um damit Funktionen zu bezeichnen, die zusätzlich $\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$ erfüllen. Nutzt man integrierbar im Sinne obiger Definition, dann werden Funktionen mit $\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$ L^1-Funktionen genannt (oder im Englischen manchmal "summable").

Beispiel. Sind f, g integrierbar und $f \leq g$, dann ist $\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$. Dies deswegen, weil wenn $s \geq g$ eine Treppenfunktion ist, so ist auch $s \geq f$ und wenn $s \leq f$, so ist auch $s \leq g$.

Falls umgekehrt $\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$, gilt natürlich noch nicht, dass $f \leq g$; dazu brauchen wir, dass $\int_A f \leq \int_A g$ für jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$ (Aufgabe 7.9).

Konvergenz von Funktionen

Für Funktionen gibt es diverse Arten von Konvergenz, zu den bekannten von punktweiser und gleichmässiger Konvergenz kommen in einem Massraum noch weitere dazu:

Seien jeweils $f_k, f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbare Funktionen.

Definition. f_k konvergieren punktweise fast überall (geschrieben: μ-f.ü.) gegen f, falls es eine Menge $A \subseteq \Omega$ gibt mit $\mu(A) = 0$ und $f_k \to f$ punktweise auf $\Omega \setminus A$.

Analog lässt sich die gleichmässige Konvergenz fast überall definieren. Dies sollte nicht verwechselt werden mit der fast gleichmässigen Konvergenz:

Definition. $f_k \to f$ fast gleichmässig, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $A \subseteq \Omega$ gibt mit $\mu(A) \leq \varepsilon$ und $f_k \to f$ gleichmässig auf $\Omega \setminus A$.

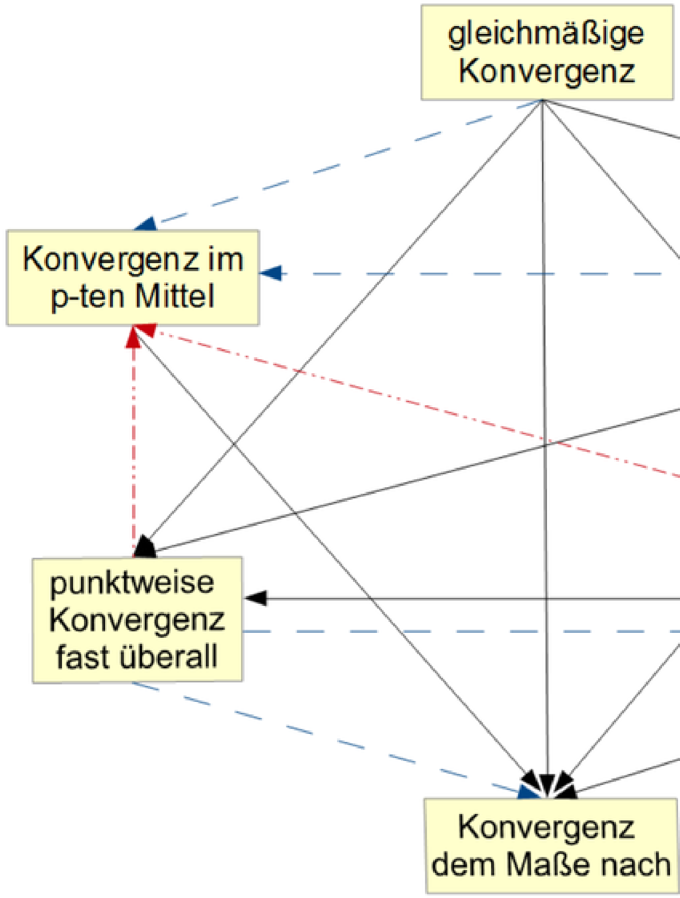
Aus der gleichmässigen Konvergenz fast überall folgt also die fast gleichmässige Konvergenz, umgekehrt im Allgemeinen aber nicht.

Definition. $f_k \to f$ in L^p, $1 \leq p < \infty$, falls $\int_\Omega |f - f_k| \, d\mu \to 0$, $k \to \infty$.

Definition. $f_k \to f$ im Mass, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$\mu(\{x \in \Omega \mid |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}) \to 0 \quad k \to \infty.$$

Als Übersicht über die Abhängigkeiten der einzelnen Konvergenzen möchte ich gerne folgende Graphik (gefunden auf Wikipedia; aus Ernst Henze: Einführung in die Maßtheorie, BI, Mannheim,1971) anfügen und danach auf einzelne Aspekte eingehen. Die Graphik ist so zu verstehen, dass die durchgezogenen schwarzen Linien Implikationen sind, die immer gelten. Die gestrichelten blauen Linien gelten, falls $\mu(\Omega) < \infty$. Die unregelmässigen roten Linien sind Implikationen, die unter weiteren zusätzlichen Bedingungen gelten. Ihr habt im Moment noch nicht alle Implikationen in der Vorlesung gesehen, betrachtet die Graphik deshalb einfach als Orientierung.



Von den hier erwähnten Konvergenzbegriffen ist die Konvergenz im Mass der schwächste. Beispielsweise gilt

Satz. Falls $\mu(\Omega) < \infty$, so folgt aus μ-f.ü. Konvergenz die Konvergenz im Mass

Bemerkung. Falls $\mu(\Omega) = \infty$, so ist dies im Allgemeinen nicht mehr korrekt. Betrachte beispielsweise $f_k = \chi_{[-k,k]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Offensichtlich konvergiert f_k punktweise gegen $f \equiv 1$, aber bezüglich Konvergenz im Mass gilt

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}) = \mu((-\infty, -k) \cap (k, \infty)) = \infty$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht, betrachte z.B. die Funktionenfolge $f_1 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_2 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$, $f_3 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}$, $f_4 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}$, etc. Im Mass konvergiert diese Folge zwar gegen $f \equiv 0$, aber für jeden Punkt $x \in [0,1]$ gibt es unendlich viele f_k, so dass $f_k(x) \neq 0$, damit haben wir keine Konvergenz f.ü.

In Aufgabe 7.2. zeigt ihr, dass man trotzdem punktweise Konvergenz kriegen kann, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Funktionen "genügend schnell gegen 0 geht". Dies ist kein Widerspruch zu obigem Beispiel, denn für diese f_k haben wir

$$\mathscr{L}^1(\{x \mid |f_k(x) - f_{k+1}(x)| > 2^{-k}\}) \sim \frac{1}{k},$$

da aber $\frac{1}{k}$ langsamer gegen 0 geht als 2^{-k}, ist der Satz aus Aufgabe 7.2 nicht anwendbar.

Satz. (Egorov) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, so folgt aus Konvergenz μ-f.ü. fast gleichmässige Konvergenz, d.h. für alle $\delta > 0$ gibt es $F \subseteq \Omega$ kompakt mit $\mu(\Omega \setminus F) \leq \delta$, so dass $\sup_{x\in F} |f_k(x) - f(x)| \to 0$, $k \to \infty$.

Bemerkung. Auch diese Aussage ist nicht wahr, wenn $\mu(\Omega) = \infty$, man kann dazu nochmals die Funktion $f_k(x) = \chi_{[-k,k]}(x)$ betrachten.

Es ist nicht möglich, den Satz zu verbessern und statt fast gleichmässiger Konvergenz stattdessen gleichmässige Konvergenz fast überall zu haben. (Aufgabe 7.5) Dies lässt sich zurückführen auf die Tatsache, dass aus punktweiser noch keine gleichmässige Konvergenz folgt.

Der Satz von Lusin schliesslich sagt aus, dass man jede messbare Funktion einigermassen gut durch eine stetige Funktion approximieren kann.

Satz. (Lusin) Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, $\mathscr{L}^1(\Omega) < \infty$. Dann existiert für jedes $\delta > 0$ ein kompaktes $F \subseteq \Omega$, so dass $\mu(\Omega \setminus F) \leq \delta$ und $f|_F : F \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Bemerkung. Der Satz sagt leider nicht aus, dass alle Punkte in F Stetigkeitspunkte von $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sind. Betrachte z.B. $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$. Auf $[0,1]$ ist diese Funktion nirgends stetig, schränken wir sie aber auf eine Teilmenge von $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ ein, so ist die Funktion konstant 0 und damit stetig.

Nebenbemerkung: Wie sieht eine kompakte Teilmenge von $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ mit Mass $1 - \delta$ aus? Wir konstruieren dazu das Komplement dieser Menge in $[0,1]$. Sei $\{r_k\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$ und betrachte die offene Menge

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty}(r_k - \frac{\delta}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\delta}{2^{k+1}}).$$

U enthält nach Konstruktion alle rationalen Zahlen in $[0,1]$, ausserdem ist das Komplement kompakt, da geschlossen. Rechnen wir nun das Mass von U aus, sehen wir dass gilt $\mathscr{L}^1(U) \leq \delta \sum 2^{-k} = \delta$. Also hat das Komplement, die gesuchte kompakte Menge, Mass, welches mindestens $1-\delta$ beträgt. (Dieses U ist übrigens auch ein Beispiel einer Menge, welche offen ist und endliches Lebesguemass hat, aber trotzdem nicht Jordan-messbar ist.)

Beispiel. Wir wollen den Satz von Lusin nutzen, um folgende Aussage zu zeigen: Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mathscr{L}^1(\Omega) < \infty$. Dann existiert eine Folge von stetigen Funktionen g_n auf Ω, so dass $g_n \to f$ $\mathscr{L}^1$-f.ü.

Die Folge g_n kann folgendermassen konstruiert werden: Zu $\delta = \frac{1}{2^n}$ sei F_n die kompakte Menge, welche vom Satz von Lusin gegeben ist, so dass f auf F_n stetig ist. Sei g_n dann die stetige Erweiterung von $f|_{F_n}$ auf ganz Ω. (Dies ist möglich, da F_n abgeschlossen ist z.B. mit dem Erweiterungssatz von Tietze oder auch mit einer expliziten Konstruktion). Setzen wir nun $E_n = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq g_n(x)\}$. Dann sind die Punkte, an welchen die punktweise Konvergenz nicht hält, genau die Punkte in $E = \limsup E_n$. (Warum?) Da aber $\mathscr{L}^1(E) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{L}^1(E_n) = 0$, sehen wir, dass wir tatsächlich f.ü. punktweise Konvergenz haben.