Musterlösung Single Choice Aufgaben 24

Unitäre Vektorräume

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Mengen sind Unterräume des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$?

   (a) Die Menge der unitären $n \times n$-Matrizen.

   (b) Die Menge der selbstadjungierten $n \times n$-Matrizen.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen.

   (d) Die Menge der normalen $n \times n$-Matrizen.

   Erklärung: Für alle symmetrischen Matrizen A und B und komplexe Zahlen λ gilt $(\lambda A+B)^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B$; also ist (c) richtig. Hingegen ist die 1×1-Matrix $A := (1)$ unitär und selbstadjungiert, ihr Vielfaches $2iA = (2i)$ aber weder noch; somit sind (a) und (b) falsch. Schliesslich ist die Summe zweier normaler Matrizen im allgemeinen nicht normal; siehe Serie 23 Aufgabe 3 (d). [CHECK AGAIN???]

2. Sei A eine unitäre Matrix. Was kann man über die Eigenwerte von A aussagen?

   (a) Sie sind alle verschieden.

   (b) Sie sind alle gleich 1.

   (c) Sie sind alle reell.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Ihr Absolutbetrag ist gleich 1.

   Erklärung: Die Einheitsmatrix $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ ist ein Gegenbeispiel zu (a), und die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ ist ein Gegenbeispiel zu (b) und (c). Die Aussage (d) ist Teil der Klassifikation unitärer Endomorphismen.

3. Welche der folgenden Endomorphismen sind im Allgemeinen nicht diagonalisierbar?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Normale Endomorphismen von euklidischen Vektorräumen.

   (b) Selbstadjungierte Endomorphismen von euklidischen Vektorräumen.

   (c) Normale Endomorphismen von unitären Vektorräumen.

   (d) Unitäre Endomorphismen von unitären Vektorräumen.

   Erklärung: Normale Endomorphismen von euklidischen Vektorräumen können im Allgemeinen nur auf Blockdiagonalgestalt mit Blöcken der Grössen 1 und 2 gebracht werden, wie der Spektralsatz in diesem Fall besagt.

4. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension 2022. Wie viele Eigenvektoren, bis auf skalare Vielfache, besitzt ein normaler Endomorphismus von V mindestens?

   (a) 0

   $\boxed{\text{(b)}}$ 1

   (c) 1011

   (d) 2022

   Erklärung: Für jeden normalen Endomorphismus f von V existiert eine Orthonormalbasis, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von f Blockdiagonalform hat mit Blöcken der Grösse 1 und/oder 2. Weil 2022 gerade ist, kann es sein, dass alle Blöcke die Grösse 2 haben. Dann existiert kein Eigenvektor; somit ist (a) richtig.

5. Welche Aussage ist *falsch* in der orthogonalen Gruppe O(3) beziehungsweise der speziellen orthogonalen Gruppe SO(3)?

   (a) Jedes Element von O(3) besitzt einen Eigenvektor.

   (b) Jedes Element von O(3) mit Determinante 1 ist in SO(3).

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jedes Element von O(3) ist eine einfache Spiegelung.

   (d) Jedes Element von SO(3) ist eine Drehung um eine Drehachse.

   Erklärung: Die Aussagen (a) und (d) folgen aus der Klassifikation orthogonaler Endomorphismen. Die Aussage (b) ist die Definition von SO(3). Die Aussage (c) ist falsch, denn eine Drehung ist ebenfalls orthogonal und keine einfache Spiegelung.