10.17 Kriterien für Positiv-Definitheit

Satz: Für jede reelle symmetrische $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ sind äquivalent:

(a) Die Matrix A ist positiv definit.

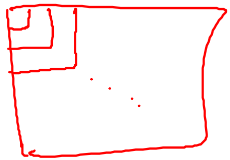
(b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(c) Es existiert eine invertierbare Matrix B mit $A = B^T B$.

(d) Es existiert eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $A = R^T R$.

(e) Es existiert eine invertierbare symmetrische Matrix C mit $A = C^T C = C^2$.

(f) Die Determinante der Matrix $A_k := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$ ist positiv für jedes $1 \leqslant k \leqslant n$. (**Hauptminorenkriterium**)



Bew.:

$$\begin{tikzcd}
(d) \arrow[r, Rightarrow, "B:=R"] & (c) \arrow[d, Rightarrow, "(*)"'] & (e) \arrow[l, Rightarrow, "B:=C"'] \\
 & (a) \arrow[ul, Rightarrow, "\S 10.7"] \arrow[r, Leftrightarrow, "(+)"] & (b) \arrow[u, Rightarrow, "(++)"']
\end{tikzcd}$$

(*) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \quad Bx \neq 0$

$x^T A x = x^T B^T B x = (Bx)^T (Bx) > 0$

Spektralsatz $\Rightarrow \exists Q$ orthogonal mit $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$

$\Rightarrow \forall x = (x_i)_i \in \mathbb{R}^n: \quad (Qx)^T A (Qx) = x^T Q^T A Q x = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$

(+) Also (a) $\Leftrightarrow \forall x \neq 0: \sum \lambda_i x_i^2 > 0 \Leftrightarrow \forall i: \lambda_i > 0 \Leftrightarrow$ (b)

(++) (b) $\Rightarrow$ $D := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \Rightarrow Q^T A Q = D^2$

invertierbar. $\Rightarrow A = \underbrace{QQ^T}A\underbrace{QQ^T} = Q D^2 Q^T$

$= QD\underbrace{Q^T Q}DQ^T \Rightarrow$ (e) für $C := QDQ^T$.

(a) $\Rightarrow$ (f): A pos. def.

$i : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\} : \underset{\substack{\vee \\ 0}}{i(x)^T A i(x)} = x^T A_k x$

$\Rightarrow A_k$ pos. def.

Aus (a) $\Rightarrow$ (b) für A_k folgt

dass alle EWe von A_k positiv sind.

A_k diagbar, da symmetrisch.

$\Rightarrow \det(A_k) =$ Produkt der EWe > 0.

(f) $\Rightarrow$ (a) Induktion über n.

$n = 0$ ✓.

$n-1 \rightsquigarrow n$: IV $\Rightarrow A_{n-1}$ pos. def.

und $\det(A) > 0$. Nach (a) $\Leftrightarrow$ (c) für A_{n-1} existiert

B invertierbar mit $A_{n-1} = B^T B$. Setze $C := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, n-1 \\ \}\, 1 \end{array}$

$\Rightarrow C^T A C = \begin{pmatrix} (B^T)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^T B & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} I_{n-1} & w \\ w^T & \lambda \end{pmatrix}$ für $w \in \mathbb{R}^{n-1}, \lambda \in \mathbb{R}$.

$D := \begin{pmatrix} I_{n-1} & -w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^T C^T A C D = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & w \\ w^T & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & -w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} I_{n-1} & w \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & -w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mu = \det(D^T C^T A C D) = \underbrace{\det(D)^2 \cdot \det(C)^2}_{>0} \cdot \underbrace{\det(A)}_{>0} > 0$

$E := \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \Rightarrow D^T C^T A C D = E^2 \Rightarrow A = (ED^{-1}C^{-1})^T \underbrace{(ED^{-1}C^{-1})}_{\text{invbar.}} \Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a)

qed.

Beispiel: Die Hauptminoren der reellen symmetrischen Matrix

$$A := \boxed{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}}$$

sind a und $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ und $a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$; daher ist die Matrix positiv definit genau dann, wenn $a > 1$ ist. Im Fall $a = 2$ gilt zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2}$$

Ansatz: $A = I_3 + v \cdot v^T$ für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C = a \cdot I_3 + b \cdot v v^T$ $\qquad v^T v = 3$

$\Rightarrow C^2 = a^2 I_3 + 2ab \cdot v v^T + b^2 \cdot v v^T v v^T =$

$= a^2 I_3 + (2ab + 3b^2) v v^T$

Will: $a^2 = 1$

$2ab + 3b^2 = 1$

Lösung: $a = -1$

$b = +1$

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{n \times m}{A^T} \cdot \underset{m \times n}{A} = \underset{n \times n}{A^T A}$$

10.18 Singulärwertzerlegung

In den Abschnitten 3.8, 8.3, 10.7, 10.10, 10.14, 10.17 haben wir schon verschiedene Matrixzerlegungen kennengelernt. Eine weitere ist:

Satz: Für jede reelle $m \times n$-Matrix A vom Rang r existieren eine orthogonale $m \times m$-Matrix Q, eine orthogonale $n \times n$-Matrix R, und eine $m \times n$-Matrix der Form

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

für reelle Zahlen $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$ und allen übrigen Einträgen 0, so dass gilt

$$A = QDR.$$

Dabei sind die Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ durch A eindeutig bestimmt. Genauer sind $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ genau die von Null verschiedenen Eigenwerte von $A^T A$, mit Vielfachheiten.

Definition: Die Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ heissen die *Singulärwerte* von A.

Tipp: Vergleiche mit der LR-Zerlegung aus §3.8 und der QR-Zerlegung aus §10.10.

Beweis: Eindeutigkeit: Aus $A = QDR$ folgt $A^T A = R^T D^T \underbrace{Q^T Q}_{} D R = R^T D^T D R = R^{-1} D^T D R$

Also hat $A^T A$ dieselben Eigenwerte wie $D^T D = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^2 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_r^2 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$.

Existenz: Spektralsatz $\Rightarrow$ Wähle ONB $v_1,\dots,v_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus EVen von A^TA.

Also $A^TAv_i = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \|v_i\|^2 = 1$

$\lambda_i = \langle v_i, \lambda_i v_i\rangle = \langle v_i, A^TAv_i\rangle = \langle Av_i, Av_i\rangle = \|Av_i\|^2 \geq 0.$

$\langle v,w\rangle = v^T\cdot w$.

$\langle Av,Aw\rangle = v^TA^TAw = \langle v, A^TAw\rangle$.

OBdA: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$.

$\forall i > s$: $\|Av_i\| = 0 \Rightarrow Av_i = 0$.

$\forall i \leq s$: Setze $w_i := \dfrac{Av_i}{\sqrt{\lambda_i}} \in \mathbb{R}^m$

$$\forall i,j \leq s: \langle w_i, w_j\rangle = \left\langle \frac{Av_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{Av_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right\rangle = \frac{\langle Av_i, Av_j\rangle}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} = \frac{\langle v_i, A^TAv_j\rangle}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} = \frac{\langle v_i, \lambda_j v_j\rangle}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}$$

$$= \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\cdot\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i = j\end{cases}$$

$\Rightarrow (w_1,\dots,w_s)$ ist ein ONS in $\mathbb{R}^m$.

Erweitere zu einer ONB $(w_1,\dots,w_m)$ von $\mathbb{R}^m$.

Setze $Q := (w_1,\dots,w_m) \in O_m(\mathbb{R})$

$R := (v_1,\dots,v_n)^T \in O_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow Q^TAR^T = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_m^T\end{pmatrix} A(v_1 \dots v_n) = \left(w_i^TAv_j\right)_{i,j}$$

$$w_i^T\underbrace{Av_j}\; = \begin{cases} j > s \Rightarrow 0 \\ j < s \Rightarrow \dots = w_i^T\cdot\sqrt{\lambda_j}\cdot w_j \\ \quad = \sqrt{\lambda_j} \text{ falls } i=j \\ \quad\;\, 0 \text{ sonst.}\end{cases}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_s}\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \}\, s \\ \}\, m-s \end{matrix} = D \quad \text{mit } \sqrt{\lambda_1} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_s} > 0.$$

(column blocks: s, $n-s$)

$\Rightarrow A = QQ^TAR^TR = QDR.$

q.e.d.

Beispiel: Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}2&3\\0&2\end{smallmatrix}\right)$ hat die Singulärwertzerlegung

$$A = \begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\boxed{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}}\cdot\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}}.$$

$$A^TA = \begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4&6\\6&13\end{pmatrix}}$$

$$\det\begin{pmatrix}x-4&-6\\-6&x-13\end{pmatrix} = (x-4)(x-13)-(-6)^2$$
$$= x^2-17x+52-36$$
$$= x^2-17x+16$$
$$= (x-1)(x-16)$$

A^TA hat EWe $1, 16$

$\Rightarrow$ Singulärwerte $4, 1$

Beispiel: Für jedes $\underline{x \in \mathbb{R}}$ sind die Singulärwerte der Matrix $\underline{\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)} = A$ gleich

$$\underline{\sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot\left(2+x^2\pm\sqrt{x^2(4+x^2)}\right)}}.$$

Für $|x|\to\infty$ verhalten sie sich asymptotisch wie $|x|$ und $|x|^{-1}$, während die Faktoren Q und R der Singulärwertzerlegung in dem Kompaktum $\mathrm{O}(n)$ bleiben.

$$A^TA = \begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&x\\x&x^2+1\end{pmatrix}$$

char. Pol. $= (T-1)(T-(x^2+1)) - x^2$
$= T^2-(x^2+2)T+1$

EWe $\lambda = \dfrac{x^2+2\pm\sqrt{(x^2+2)^2-4}}{2} = \dfrac{x^2+2\pm\sqrt{x^4+4x^2}}{2}$

$\sigma_1, \sigma_2 = \sqrt{\dfrac{x^2+2\pm\sqrt{x^2(4+x^2)}}{2}}$

Für $|x|\to\infty$ ist

$\sigma_1 \sim \sqrt{\frac{1}{2}(2+x^2+x^2)} \sim \sqrt{x^2} = |x|$.

$\sigma_1\sigma_2 = \det(D) = \pm\det(A) = \pm 1$.

$\Rightarrow \sigma_2 \sim \dfrac{1}{|x|}$.