Erinnerung: Sei V ein unitärer Vektorraum.

Definition: Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, deren Adjungierte f^* existiert und die Gleichung $f^* \circ f = f \circ f^*$ erfüllt, heisst *normal*.

Proposition: (a) Jede selbstadjungierte lineare Abbildung ist normal.

(b) Jede unitäre lineare Abbildung $f\colon V \xrightarrow{\sim} V$ hat Adjungierte f^{-1} und ist normal.

Spektralsatz: Für jeden Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V sind äquivalent:

(a) Der Endomorphismus f ist normal.

(b) Es existiert eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von f.

Insbesondere ist jeder normale Endomorphismus diagonalisierbar.

Beispiel: Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kommutiert nicht mit $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; also ist der Endomorphismus $L_A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ nicht normal. Tatsächlich ist er auch nicht diagonalisierbar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sei V der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx$. Dann hat die lineare Abbildung

$$D\colon V \to V,\ f \mapsto \frac{df}{dx}$$

die Adjungierte $-D$. Somit ist D normal. Die Eigenwerte von D sind die Zahlen in für alle $n \in \mathbb{Z}$, jeweils mit der Multiplizität 1 und der Eigenfunktion $f_n(x) := e^{inx}$. Die Funktionen $f_n/\sqrt{2\pi}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ bilden eine Orthonormalbasis des Teilraums aller durch Polynome in e^{ix} und e^{-ix} ausdrückbaren Funktionen.

$$\langle D(f), g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\frac{df}{dx}(x)}\cdot g(x)\,dx = \underbrace{\overline{f(x)}\cdot g(x)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\cdot \frac{dg}{dx}(x)\,dx$$

Partielle Integration

$$= \langle f, -D(g)\rangle$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist EW von $D \iff \exists f \in V\setminus\{0\}: Df = \lambda f$, d.h. $\frac{df}{dx}(x) = \lambda\cdot f(x)$.

$\iff f(x) = \text{const.}\cdot e^{\lambda x}$

$f(x+2\pi) = f(x) \iff e^{\lambda(x+2\pi)} = e^{\lambda x} \iff e^{\lambda\cdot 2\pi} = 1 \iff \lambda \in \mathbb{Z}i$

$$\|e^{inx}\|^2 = \int_0^{2\pi} \underbrace{\overline{e^{inx}}\cdot e^{inx}}_{1}\,dx = 2\pi$$

Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ sei $T_\xi : V \to V$, $f \mapsto T_\xi f$ mit $(T_\xi f)(x) = f(x+\xi)$.

$$\Rightarrow \langle T_\xi f, T_\xi g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(\underbrace{x+\xi}_{y})} \cdot g(x+\xi)\,dx = \left| \begin{matrix} x+\xi = y \\ dx = dy \end{matrix} \right| = \int_\xi^{\xi+2\pi} \overline{f(y)}\, g(y)\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \langle f, g\rangle.$$

$\Rightarrow T_\xi$ ist unitär.

$$(T_\xi f_n)(x) = \frac{e^{in(x+\xi)}}{\sqrt{2\pi}} = e^{in\xi} \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = e^{in\xi} f_n$$

$\Rightarrow f_n$ ist Eigenfunktion zum EW $e^{in\xi}$.

<u>Bem.</u>: $D(T_\xi(f))(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x+\xi)\right) = \left(\frac{df}{dx}\right)(x+\xi) = \left(T_\xi(D(f))\right)(x)$.

$\Rightarrow D \circ T_\xi = T_\xi \circ D$.

11.14 Klassifikation unitärer Endomorphismen

Satz: Für jeden unitären Endomorphismus f eines unitären Vektorraums V gilt:

(a) Alle Eigenwerte haben Absolutbetrag 1.

(b) Ist $\dim V < \infty$, so existiert eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von f. Insbesondere ist f dann diagonalisierbar.

Bem.: (b) Spezialfall von § 11.13.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein EW von f mit EV v.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle \neq 0 \\ \quad \parallel \\ \langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle = \bar{\lambda} \cdot \lambda \cdot \langle v, v \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\bar{\lambda}\lambda}_{=|\lambda|^2} = 1. \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

qed.

Für jede komplexe quadratische Matrix A sei $\exp(A) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ definiert wie in Abschnitt 9.6. Zusätzlich zu den dortigen Eigenschaften gilt dann:

exp(A+B) = exp(A) · exp(B)

$$\exp(A^T) = (\exp A)^T \qquad \text{und} \qquad \exp(A^*) = (\exp A)^*.$$

$A^* = \overline{A^T}$

Proposition: Für jede hermitesche Matrix A ist die Matrix $\exp(A)$ hermitesch. Ist weiter Q eine unitäre Matrix und $Q^{-1}AQ$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist $Q^{-1}\exp(A)Q$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$.

$\in \mathbb{R}$

Bew.: $A = A^* \Rightarrow \exp(A) = \exp(A^*) = \exp(A)^*$

$$Q^{-1} \cdot \exp(A) \cdot Q = \exp(Q^{-1}AQ) = \exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

qed.

Proposition: Für jede hermitesche $n \times n$-Matrix A ist die Matrix $\exp(iA)$ unitär, und jede unitäre Matrix ist in dieser Form darstellbar.

Bew.: $\exp(iA) \cdot \exp(iA)^* = \exp(iA) \cdot \exp((iA)^*) = \exp(\underbrace{iA + (iA)^*}) = I_n$

$= iA - iA^*$

$= iA - iA = 0.$

$$Q^{-1}\exp(iA)Q = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\lambda_n} \end{pmatrix}$$

U unitär $\Rightarrow$ Wähle Q unitär mit $Q^{-1}UQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$, $|\mu_j| = 1$

Schreibe $\mu_j = e^{i\lambda_j}$, setze $A := Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^{-1} \Rightarrow Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ und

$\bar{Q}^{-1} \exp(iA) Q = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix} = \bar{Q}^{-1} U Q$

$\Rightarrow \exp(iA) = U$.

10.19 Spektralsatz für normale Endomorphismen

Wie vorher sei V ein euklidischer Vektorraum.

Definition: Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, deren Adjungierte f^* existiert und die Gleichung $f^* \circ f = f \circ f^*$ erfüllt, heisst *normal.*

Proposition: (a) Jede selbstadjungierte lineare Abbildung ist normal.

(b) Jede orthogonale lineare Abbildung $f\colon V \xrightarrow{\sim} V$ ist normal.

Beispiel: Insbesondere induziert jede reelle Diagonalmatrix einen normalen Endomorphismus.

Beispiel: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ kommutiert die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit $A^T = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$; also ist die Abbildung $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ normal.

Bemerkung: Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus, also ein Ringisomorphismus von $\mathbb{C}$ auf sein Bild. Man kann dies zur Konstruktion von $\mathbb{C}$ verwenden anstelle der üblichen Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix}$$

$(a+ib)(c+id) \qquad (ac-bd) + i(ad+bc) = (a+ib)(c+id)$

Spektralsatz: Für jeden normalen Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V existiert eine geordnete Orthonormalbasis B von V, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von f die folgende Blockdiagonalgestalt hat:

$$ {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad D_k = \begin{cases} a_k & \text{mit } a_k \in \mathbb{R} \text{ oder} \\ \left(\begin{smallmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{smallmatrix}\right) & \text{mit } a_k,\, b_k \in \mathbb{R}. \end{cases} $$

Bew.: Wähle Isometrie $V \cong \mathbb{R}^n$
$\rightsquigarrow$ f entspricht $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $AA^T = A^TA$.] Genügt für $\mathbb{R}^n$, L_A. $\Rightarrow A^T = A^*$.

Dann ist $AA^* = A^*A$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die reellen EWe von A,
und $\mu_1 \pm i\nu_1, \dots, \mu_s \pm i\nu_s$ die nichtreellen EWe von A
$\lambda_j, \mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}$.
$\nu_j > 0$.

Für jeden reellen EW λ_j: Wähle ONB des reellen Eigenraums
$\mathrm{Ker}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto Av - \lambda_j v)$

Für jedes Paar nichtreeller EWe $\mu_j \pm i\nu_j$: Wähle ONB des komplexen Eigenraums
$\mathrm{Ker}(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ v \mapsto Av - (\mu_j + i\nu_j)v)$

$b_1, \dots, b_{n_j} \in \mathbb{C}^n$. Schreibe $b_k = c_k + i d_k$ mit $c_k, d_k \in \mathbb{R}^n$.

$$\underline{(c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_{n_j}, d_{n_j})}$$

$$A b_k = (\mu_j + i\nu_j)(c_k + i d_k) = \underbrace{(\mu_j c_k - \nu_j d_k)} + i\,\underbrace{(\nu_j c_k + \mu_j d_k)}$$

$$\parallel$$

$$A(c_k + i d_k) = \underbrace{(A c_k)} + i\,\underbrace{(A d_k)} \implies \boxed{\begin{aligned} A c_k &= \mu_j \cdot c_k - \nu_j \cdot d_k \\ A d_k &= \nu_j \cdot c_k + \mu_j \cdot d_k \end{aligned}}$$

$\forall k: \quad \langle b_k, b_k \rangle = 1$

$\forall k < l: \quad \langle b_k, b_l \rangle = 0$

$\forall k, l: \quad \langle \overline{b_k}, b_l \rangle = 0$ da $\overline{b_k}$ ist EV zum EW $\mu_j - i\nu_j \neq \mu_j + i\nu_j$.

$$\implies 1 = \langle c_k + i d_k, c_k + i d_k \rangle = \langle c_k, c_k \rangle + \underline{i \cdot \langle c_k, d_k \rangle - i \langle d_k, c_k \rangle} + \langle d_k, d_k \rangle$$

$$= |c_k|^2 + |d_k|^2$$

$$\forall k, l: \quad 0 = \langle \overline{c_k + i d_k}, c_l + i d_l \rangle = \langle c_k - i d_k, c_l + i d_l \rangle$$

$$= \langle c_k, c_l \rangle + i \langle c_k, d_l \rangle + i \langle d_k, c_l \rangle - \langle d_k, d_l \rangle$$

$$= (\langle c_k, c_l \rangle - \langle d_k, d_l \rangle) + i(\langle c_k, d_l \rangle + \langle d_k, c_l \rangle)$$

$$\implies \boxed{\begin{aligned} \langle c_k, c_l \rangle - \langle d_k, d_l \rangle &= 0 \\ \langle c_k, d_l \rangle + \langle d_k, c_l \rangle &= 0. \end{aligned}}$$

$\forall k<l:\ 0 = \langle c_k + i d_k, c_l + i d_l\rangle = \langle c_k, c_l\rangle + i\langle c_k, d_l\rangle - i\langle d_k, c_l\rangle + \langle d_k, d_l\rangle$

$= (\langle c_k, c_l\rangle + \langle d_k, d_l\rangle) + i(\langle c_k, d_l\rangle - \langle d_k, c_l\rangle)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\langle c_k, c_l\rangle + \langle d_k, d_l\rangle = 0\\ \langle c_k, d_l\rangle - \langle d_k, c_l\rangle = 0\end{array}}$$

$\Rightarrow \forall k<l:\ \langle c_k, c_l\rangle = \langle d_k, d_l\rangle = \langle c_k, d_l\rangle = \langle d_k, c_l\rangle = 0.$

$$\forall k:\ \left.\begin{array}{l}|c_k|^2 + |d_k|^2 = 1\\ \langle c_k, c_k\rangle = \langle d_k, d_k\rangle\\ 2\langle c_k, d_k\rangle = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Rightarrow |c_k|^2 = |d_k|^2 = 1/2.\\ \\ \Rightarrow \langle c_k, d_k\rangle = 0.\end{array}$$

Also ist $\underline{(\sqrt{2}\,c_1, \sqrt{2}\,d_1, \ldots, \sqrt{2}\,c_{n_j}, \sqrt{2}\,d_{n_j})}$ ein ONS.

Füge alle diese zusammen. $\rightsquigarrow$ ONB B von $\mathbb{R}^n$.

mit $_B[L_A]_B$ = Blockdiagonalmatrix mit Blöcken $\begin{pmatrix}\mu_j & \nu_j\\ -\nu_j & \mu_j\end{pmatrix}$ λ_j $j = 1..r$ übrige.

$\|$

$(x_{ij}):\ Av_j = \sum_i x_{ij} v_i$

$B = (v_1, \ldots, v_n)$

qed.