11.9 Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen

Auch §10.14 überträgt sich entsprechend:

Spektralsatz: Für jeden selbstadjungierten Endomorphismus f eines unitären Vektorraums V gilt:

(a) Alle Eigenwerte sind reell.

(b) Ist $\dim V < \infty$, so existiert eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von f. Insbesondere ist f dann diagonalisierbar.

Bew.: (a) Sei $v \in V$ ein EV zum EW $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \langle v, f(v)\rangle &= \langle v, \lambda v\rangle = \lambda \cdot \langle v, v\rangle \\ \| \quad & \\ \langle f(v), v\rangle &= \langle \lambda v, v\rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle v, v\rangle \end{aligned} \quad \Bigg\} \quad \text{Da } \langle v, v\rangle = \|v\|^2 > 0 \text{ folgt } \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) wie über $\mathbb{R}$. qed.

Hauptachsentransformation: Für jede hermitesche Matrix A existiert eine unitäre Matrix Q, so dass $Q^{-1}AQ = Q^*AQ$ eine reelle Diagonalmatrix ist.

$A = A^*$

Bew.:

$\Rightarrow L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ erfüllt $L_A^* = L_{A^*} = L_A$ also selbstadjungiert.

$Q = (b_1, \dots, b_n)$ ONB aus EVen von L_A $\Rightarrow$

$A b_i = \lambda_i b_i$

$$\Rightarrow AQ = (Ab_1, \dots, Ab_n) = (\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n) = (b_1, \dots, b_n) \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}^{D} = Q \cdot D$$

$Q^*Q = I_n \Leftrightarrow Q^{-1} = Q^*$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ Q^{-1}AQ}}{Q^*AQ} = Q^*QD = D.$$

qed.

Beispiel: Eine 2×2-Matrix ist genau dann hermitesch, wenn sie die Form $\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}}$ hat für $a, d \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$. Eine direkte Rechnung liefert dann die reellen Eigenwerte

$$\frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4|b|^2}}{2}.$$

Weitere Beispiele siehe §$\boxed{11.14}$.

$$\det \begin{pmatrix} X - a & -b \\ -\bar{b} & X - d \end{pmatrix} = (X-a)(X-d) - b\bar{b} = X^2 - (a+d)X + (ad - |b|^2)$$

$$\frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - |b|^2)}}{2}$$

11.10 Normalform hermitescher Formen

Die Begriffe ausgeartet oder nicht-ausgeartet, positiv oder negativ definit oder semidefinit bzw. indefinit, und den Rang und und die Signatur, sowie deren Eigenschaften aus §10.15 gelten wieder wortwörtlich auch für hermitesche (anstatt symmetrischer) Formen auf unitären Vektorräumen, sowie für hermitesche Matrizen, und mit denselben Beweisen. Auch das symmetrische Gaussverfahren funktioniert analog, wobei man in (c) allerdings $S := I_n + cE_{i1}$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{C}$ setzen muss.

Beispiel: Für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^*AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar a & 1 & 0 \\ \bar b & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar a & 1 & 0 \\ \bar b & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1+a & i+b \\ 1 & a & b \\ -i & -ia & -ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+a & i+b \\ \cdot & - \cdot & \\ & \cdot & \end{pmatrix}$$

$$a := -1 \;;\; b := -i$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -i \\ -i & i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.11 Kriterien für Positiv-Definitheit

Auch §10.17 besitzt ein direktes Analogon, nämlich:

Satz: Für jede hermitesche $n \times n$-Matrix $A = \left(a_{k\ell}\right)_{k,\ell=1,\dots,n}$ sind äquivalent:

(a) Die Matrix A ist positiv definit.

(b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(c) Es existiert eine invertierbare Matrix B mit $A = B^*B$.

(d) Es existiert eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $A = R^*R$. (**Cholesky-Zerlegung**)

(e) Es existiert eine invertierbare hermitesche Matrix C mit $A = C^*C = C^2$.

(f) Die Determinante der Matrix $A_m := \left(a_{k\ell}\right)_{k,\ell=1,\dots,m}$ ist positiv für jedes $1 \leqslant m \leqslant n$. (**Hauptminorenkriterium**)

11.12 Singulärwertzerlegung

Auch §10.18 besitzt ein direktes Analogon, nämlich:

Satz: Für jede komplexe $m \times n$-Matrix A vom Rang r existieren eine unitäre $m \times m$-Matrix Q, eine unitäre $n \times n$-Matrix R, und eine $m \times n$-Matrix der Form

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

für reelle Zahlen $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$ und allen übrigen Einträgen 0, so dass gilt

$$A = QDR.$$

Dabei sind die Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ durch A eindeutig bestimmt. Genauer sind $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ genau die von Null verschiedenen Eigenwerte von A^*A, mit Vielfachheiten.

Definition: Die Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ heissen die *Singulärwerte* von A.

11.13 Spektralsatz für normale Endomorphismen

Wie vorher sei V ein unitärer Vektorraum.

Definition: Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, deren Adjungierte f^* existiert und die Gleichung $f^* \circ f = f \circ f^*$ erfüllt, heisst *normal.*

Proposition: (a) Jede selbstadjungierte lineare Abbildung ist normal.

(b) Jede unitäre lineare Abbildung $f\colon V \xrightarrow{\sim} V$ hat Adjungierte f^{-1} und ist normal.

Bew.: (a) $f = f^* \Longrightarrow f \circ f^* = f^* \circ f$.

(b) f unitär: f Iso & $\forall v, w \in V$: $\langle f(v), \overbrace{f(w)}^{u} \rangle = \langle v, \overbrace{w}^{f^{-1}(u)} \rangle$

$\Longleftrightarrow \forall v, u \in V$: $\langle f(v), u \rangle = \langle v, f^{-1}(u) \rangle \Longrightarrow f^* = f^{-1}$.

$\Longrightarrow f \circ f^* = f \circ f^{-1} = id_V = f^{-1} \circ f = f^* \circ f$. qed.

Beispiel: Jede komplexe Diagonalmatrix D kommutiert mit ihrer Adjungierten D^*; also ist der Endomorphismus L_D von $\mathbb{C}^n$ normal.

Proposition: Ist f normal, so ist f^* normal.

Bew.: $f = (f^*)^* \Rightarrow (f^*)^* \circ f^* = f \circ f^* = f^* \circ f = f^* \circ (f^*)^*$. qed.

Der Begriff ist weniger aus sich heraus interessant als wegen der folgenden Sätze:

Satz: Sei f ein normaler Endomorphismus von V, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Der Eigenraum von f zum Eigenwert λ ist gleich dem Eigenraum von f^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

(b) Für jeden Eigenvektor v von f ist die Zerlegung $V = \mathbb{C}v \oplus (\mathbb{C}v)^\perp$ invariant unter f, das heisst, es gilt $f(\mathbb{C}v) \subset \mathbb{C}v$ und $f((\mathbb{C}v)^\perp) \subset (\mathbb{C}v)^\perp$.

(c) Die Eigenräume von f zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

Bew.: (a) Fall $\lambda = 0$. Dann gilt für alle $v \in V$:

$$v \in \mathrm{Eig}_0(f) \iff f(v) = 0 \iff \langle f(v), f(v) \rangle = 0$$

$$\langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, f^*(f(v)) \rangle = \langle v, f(f^*(v)) \rangle = \langle f^*(v), f^*(v) \rangle$$

$$\iff \langle f^*(v), f^*(v) \rangle = 0 \iff f^*(v) = 0 \iff v \in \mathrm{Eig}_0(f^*).$$

Fall λ beliebig: $g := f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$

$\Rightarrow g^* = f^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{id}_V$.

f, f^*, id_V kommutieren.

$\Rightarrow g, g^*$ kommutieren. $\Rightarrow g$ normal.

$\mathrm{Eig}_\lambda(f) = \mathrm{Eig}_0(g) = \mathrm{Eig}_0(g^*) = \mathrm{Eig}_{\overline{\lambda}}(f^*)$.

(b) $f(v) = \lambda v \Rightarrow f(\mathbb{C}v) = \mathbb{C}f(v) \subset \mathbb{C}v$.

Sei $w \in (\mathbb{C}v)^\perp \Rightarrow \langle w, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(w), v \rangle = \langle w, f^*(v) \rangle = \langle w, \overline{\lambda} v \rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle w, v \rangle = 0$

$f^*(v) = \overline{\lambda} v$ $\qquad \Rightarrow f(w) \in (\mathbb{C}v)^\perp$.

(c) Sei $f(v) = \lambda v$ mit $\lambda \neq \lambda'$.

$f(v') = \lambda' v'$

$$\Rightarrow \langle v, f(v') \rangle = \langle v, \lambda' v' \rangle = \lambda' \cdot \langle v, v' \rangle$$

$$\langle f^*(v), v' \rangle = \langle \overline{\lambda} \cdot v, v' \rangle = \lambda \cdot \langle v, v' \rangle$$

Wegen $\lambda \neq \lambda'$ folgt $\langle v, v' \rangle = 0$ also $v \perp v'$! qed.

Spektralsatz: Für jeden Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V sind äquivalent:

(a) Der Endomorphismus f ist normal.

(b) Es existiert eine Orthonormalbasis B ✓ von V bestehend aus Eigenvektoren von f.

Insbesondere ist jeder normale Endomorphismus diagonalisierbar.

Bew.: (b) ⇒ (a) B wie oben ⇒

$$\left.\begin{array}{l} {}_B[f]_B = \text{diagonal.} \\ {}_B[f^*]_B = {}_B[f]_B^* = \text{diagonal} \end{array}\right\} \text{ kommutieren miteinander} \Rightarrow f, f^* \text{ ebenso.}$$

(a) ⇒ (b): Induktion über $\dim(V) =: n$.

$n = 0$. ✓

$n > 0$ Wähle b_1 normierten EV von f.

Ergänze zu ON B $(b_1, \ldots, b_n) = B$

vorige Seite (b) ⇒

$${}_B[f]_B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right] \qquad f \text{ normal} \Rightarrow {}_B[f]_B, {}_B[f^*]_B \text{ kommutieren.}$$

$$\Rightarrow A', A'^* \quad \text{"}$$

$${}_B[f^*]_B = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\lambda} & 0 \\ \hline 0 & A'^* \end{array}\right] \qquad \Rightarrow f|_{(\mathbb{C}b_1)^\perp} \text{ normal.}$$

Wende IV darauf an. . . .

q.e.d.