Musterlösung Serie 1

FORMALE UND SEMI-FORMALE BEWEISE

---

4. $\mathsf{PA} \vdash \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{ss}0$

Lösung:

φ_0:	$\forall x \forall y(x + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(x+y))$	PA_3
φ_1:	$\forall x \forall y(x + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(x+y)) \to \forall y(\mathtt{s}0 + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + y))$	L_{10}
φ_2:	$\forall y(\mathtt{s}0 + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + y))$	MP (φ_0 & φ_1)
φ_3:	$\forall y(\mathtt{s}0 + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + y)) \to \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0)$	L_{10}
φ_4:	$\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0)$	MP (φ_2 & φ_3)
φ_5:	$\forall x(x + 0 = x)$	PA_2
φ_6:	$\forall x(x + 0 = x) \to \mathtt{s}0 + 0 = \mathtt{s}0$	L_{10}
φ_7:	$\mathtt{s}0 + 0 = \mathtt{s}0$	MP (φ_5 & φ_6)
φ_8:	$\mathtt{s}0 + 0 = \mathtt{s}0 \to \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0) = \mathtt{ss}0$	L_{16}
φ_9:	$\mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0) = \mathtt{ss}0$	MP (φ_7 & φ_8)
φ_{10}:	$\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0$	L_{14}
φ_{11}:	$\varphi_9 \to (\varphi_{10} \to (\varphi_{10} \wedge \varphi_9))$	L_5
φ_{12}:	$\varphi_{10} \to (\varphi_{10} \wedge \varphi_9)$	MP (φ_{11} & φ_{12})
φ_{13}:	$\varphi_{10} \wedge \varphi_9$	MP (φ_9 & φ_{12})
φ_{14}:	$(\varphi_{10} \wedge \varphi_9) \to (\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0) \to \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{ss}0)$	L_{15}
φ_{15}:	$\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0) \to \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{ss}0$	MP (φ_{13} & φ_{14})
φ_{16}:	$\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{ss}0$	MP (φ_4 & φ_{15})

5. $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(x = 0 \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)\big)$

Lösung: Definiere $\varphi(x) :\equiv x = 0 \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)$. Der Beweis soll mit Induktion, (also mit PA_6) gemacht werden. Wir zeigen zuerst die Induktionsverankerung $\mathsf{PA} \vdash \varphi(x/0) \equiv 0 = 0 \vee \exists y(0 = \mathtt{s}y)$:

$$\begin{array}{rl} \mathsf{L}_{14} & 0 = 0 \\ \mathsf{L}_6 & 0 = 0 \to (0 = 0 \vee \exists y(0 = \mathtt{s}y)) \\ \mathsf{MP} & \underbrace{0 = 0 \vee \exists y(0 = \mathtt{s}y)}_{\varphi(x/0)} \end{array}$$

Als Nächstes müssen wir den Induktonsschritt $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}x))$ nachweisen. Definiere dazu $\psi(y) :\equiv \mathtt{s}x = \mathtt{s}y$ und beachte, dass die Substitution durch x in ψ erlaubt ist:

$$\begin{array}{rl} \mathsf{L}_{14} & \psi(y/x) \equiv \mathtt{s}x = \mathtt{s}x \\ \mathsf{L}_{11} & \psi(y/x) \to \exists y \psi(y) \\ \mathsf{MP} & \exists y \psi(y) \equiv \exists y(\mathtt{s}x = \mathtt{s}y) \end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_7 & \exists y\psi(y) \to (\mathtt{s}x = \mathtt{0} \vee \exists y\psi(y)) \\
\mathsf{MP} & \mathtt{s}x = \mathtt{0} \vee \exists y\psi(y) \\
\mathsf{L}_1 & \mathtt{s}x = \mathtt{0} \vee \exists y\psi(y) \to (x = \mathtt{0} \vee \exists y(x = \mathtt{s}y) \to \mathtt{s}x = \mathtt{0} \vee \exists y\psi(y)) \\
\mathsf{MP} & \underbrace{x = \mathtt{0} \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)}_{\varphi(x)} \to \underbrace{\mathtt{s}x = \mathtt{0} \vee \exists y \mathtt{s}x = \mathtt{s}y}_{\varphi(\mathtt{s}x)} \\
\forall x & \chi(x) :\equiv \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}x))
\end{array}
$$

Nun müssen wir die Induktionsverankerung und den Induktionsschritt durch die Konjunktion $\wedge$ verbinden und dann können wir Induktion anwenden und den Satz beweisen:

$$
\begin{array}{rl}
\vdash & \varphi(x/\mathtt{0}) \equiv \mathtt{0} = \mathtt{0} \vee \exists y(\mathtt{0} = \mathtt{s}y) \\
\vdash & \chi(x) \equiv \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}x)) \\
\mathsf{L}_5 & \chi(x) \to (\varphi(x/\mathtt{0}) \to (\varphi(x/\mathtt{0}) \wedge \chi(x))) \\
\mathsf{MP} & \varphi(x/\mathtt{0}) \to (\varphi(x/\mathtt{0}) \wedge \chi(x)) \\
\mathsf{MP} & \underbrace{(\mathtt{0} = \mathtt{0} \vee \exists y(\mathtt{0} = \mathtt{s}y))}_{\varphi(x/\mathtt{0})} \wedge \underbrace{(\forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}x)))}_{\chi(x)} \\
\mathsf{PA}_6 & (\mathtt{0} = \mathtt{0} \vee \exists y(\mathtt{0} = \mathtt{s}y)) \wedge (\forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}x))) \to \forall x\varphi(x) \\
\mathsf{MP} & \forall x(\underbrace{x = \mathtt{0} \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)}_{\varphi(x)})
\end{array}
$$

6. Zeige mit semi-formalen Beweisen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathtt{0} + x = x)$
(b) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\forall y\forall z\big((x + y) + z = x + (y + z)\big)$
(c) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{s0} + x = \mathtt{s}x \;\wedge\; \mathtt{s}x = x + \mathtt{s0}\big)$
(d) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\forall y(x + y = y + x)$

Lösung:

(a) Für den Beweis verwenden wir Induktion über x. Die Induktionsverankerung $\mathtt{0}+\mathtt{0} = \mathtt{0}$ folgt aus PA_2. Für den Induktionsschritt können wir nun annehmen, dass $\mathtt{0} + x = x$ für ein x gilt. Nun ist $\mathtt{0} + \mathtt{s}x = \mathtt{s}(\mathtt{0} + x)$ nach PA_3 und mit der Induktionsannahme ist $\mathtt{s}(\mathtt{0} + x) = \mathtt{s}x$. Mit der Tranisitivität der Gleichheit und dem Induktonsaxiom PA_6 und Modus Ponens folgt nun die Aussage.

(b) Wir zeigen zuerst die Formel $\varphi(z) :\equiv (x + y) + z = x + (y + z)$ mit Induktion über z. Wir müssen also die Induktionsverankerung $\varphi(\mathtt{0})$ nachweisen:

$$(x + y) + \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_2}{=} x + y \overset{\mathsf{PA}_2}{=} x + (y + \mathtt{0})$$

Wir nehmen nun an, dass $\varphi(z)$ wahr ist für ein beliebiges, aber fixes z und zeigen, dass dann auch $\varphi(\mathtt{s}z) \equiv (x + y) + \mathtt{s}z = x + (y + \mathtt{s}z)$ wahr ist:

$$
\begin{aligned}
(x + y) + \mathtt{s}z &\overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathtt{s}((x + y) + z) \\
&\overset{\varphi(z)}{=} \mathtt{s}(x + (y + z)) \\
&\overset{\mathsf{PA}_3}{=} x + \mathtt{s}(y + z) \\
&\overset{\mathsf{PA}_3}{=} x + (y + \mathtt{s}z)
\end{aligned}
$$

Wenden wir nun PA_6 an und danach zweimal die VERALLGEMEINERUNGSREGEL für y und x, dann ist der Satz bewiesen.

(c) Definiere

$$\varphi(x) :\equiv (\underbrace{\mathtt{s}0 + x = \mathtt{s}x}_{\psi_1(x):\equiv} \wedge \underbrace{\mathtt{s}x = x + \mathtt{s}0}_{\psi_2(x):\equiv})$$

und beweise die Formel mit Induktion über x. Mit Verwendung von L_3, L_4 und MODUS PONENS können wir die beiden Formeln aufspalten zu $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ und mit L_5 und MODUS PONENS wieder zusammenfügen. Es reicht somit, die Induktionsverankerung und den Induktionsschritt für $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ zu zeigen. Wir beginnen mit den Induktionsverankerungen:

$$\psi_1(0) \equiv \mathtt{s}0 + 0 \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathtt{s}0$$
$$\psi_2(0) \equiv \mathtt{s}0 \overset{6.(a)}{=} 0 + \mathtt{s}0$$

Wir nehmen nun an, dass $\varphi(x)$ und somit auch $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ wahr sind und zeigen zeigen die Induktionsschritte bei beiden Formeln:

$$\psi_1(\mathtt{s}x) : \mathtt{s}0 + \mathtt{s}x \overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + x) \overset{\psi_1(x)}{=} \mathtt{ss}x$$
$$\psi_2(\mathtt{s}x) : \mathtt{ss}x \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathtt{s}(\mathtt{s}x + 0) \overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathtt{s}x + \mathtt{s}0$$

Der Satz folgt nun durch Anwendung von PA_6 und MODUS PONENS.

(d) Setze $\varphi(y) :\equiv x + y = y + x$ und zeige zuerst die Induktionsvoraussetzung $\varphi(0)$:

$$x + 0 \overset{\mathsf{PA}_2}{=} x \overset{6.(a)}{=} 0 + x$$

Wir nehmen nun an, dass die Induktionsannahme $\varphi(y)$ wahr ist und zeigen, dass daraus $\varphi(\mathtt{s}y)$ folgt:

$$\begin{aligned} x + \mathtt{s}y &\overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathtt{s}(x + y) \\ &\overset{\varphi(y)}{=} \mathtt{s}(y + x) \\ &\overset{6.(c)}{=} \mathtt{s}0 + (y + x) \\ &\overset{6.(b)}{=} (\mathtt{s}0 + y) + x \\ &\overset{6.(c)}{=} \mathtt{s}y + x \end{aligned}$$

Verwende nun PA_6 und MODUS PONENS sowie die VERALLGEMEINERUNGSREGEL für x und daraus folgt der Satz.

7. Zeige mit semi-formalen Beweisen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\mathsf{PA} \vdash \forall x(0 \cdot x = 0)$

(b) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{s}0 \cdot x = x \ \wedge \ x = x \cdot \mathtt{s}0\big)$

(c) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big((x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)\big)$

(d) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

(e) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$

(f) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$

Lösung:

(a) Definiere $\varphi(x) :\equiv \mathtt{0} \cdot x = \mathtt{0}$ und zeige die Formel mit Induktion über x. Die Induktionsverankerung $\varphi(\mathtt{0}) \equiv \mathtt{0} \cdot \mathtt{0} = \mathtt{0}$ folgt direkt aus PA_4. Sei nun $\varphi(x)$ wahr, dann folgt der Induktionsschritt direkt aus

$$\mathtt{0} \cdot \mathtt{s}x \overset{\mathsf{PA}_5}{=} \mathtt{0} \cdot x + \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathtt{0} \cdot x \overset{\varphi(x)}{=} \mathtt{0}.$$

Der Satz folgt nun aus PA_6 und MODUS PONENS.

(b) Setze

$$\varphi(x) :\equiv \underbrace{\mathtt{s0} \cdot x = x}_{\psi_1(x):\equiv} \wedge \underbrace{x = x \cdot \mathtt{s0}}_{\psi_2(x):\equiv}$$

und zeige $\varphi(x)$ analog zu Aufgabe 6. (c) mit Induktion über x. Zeige zuerst die Induktionsverankerung $\varphi(\mathtt{0})$:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathtt{0}) &: \mathtt{s0} \cdot \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathtt{0} \\ \psi_2(\mathtt{0}) &: \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathtt{0} \cdot \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathtt{0} \cdot \mathtt{0} + \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_5}{=} \mathtt{0} \cdot \mathtt{s0} \end{aligned}$$

Mit L_5 und MODUS PONENS können wir schliesslich $\psi_1(\mathtt{0})$ und $\psi_2(\mathtt{0})$ zu $\varphi(\mathtt{0})$ zusammensetzen. Nehmen wir an, dass die Induktionsannahme $\varphi(x) \equiv \psi_1(x) \wedge \psi_2(x)$ wahr ist, dann können wir mit L_3, L_4 und MODUS PONENS auch annehmen, dass $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ wahr sind. Für den Induktionsschritt müssen wir zeigen, dass $\varphi(\mathtt{s}x)$ wahr ist:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathtt{s}x) : \mathtt{s0} \cdot \mathtt{s}x &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} \mathtt{s0} \cdot x + \mathtt{s0} \\ &\overset{\psi_1(x)}{=} x + \mathtt{s0} \\ &\overset{6.(c)}{=} \mathtt{s}x \\ \psi_2(\mathtt{s}x) : \mathtt{s}x &\overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathtt{s}x \cdot \mathtt{0} + \mathtt{s}x \\ &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} \mathtt{s}x \cdot \mathtt{s0} \end{aligned}$$

Mit L_5 und MODUS PONENS lässt sich dass nun zusammensetzen zu $\varphi(\mathtt{s}x) \equiv \psi_1(\mathtt{s}x) \wedge \psi_2(\mathtt{s}x)$. Der Satz folgt nun durch Induktion.

(c) Definiere $\varphi(z) :\equiv (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ und zeige diese Formel mit Induktion über z. Wir starten mit dem Induktionsanfang $\varphi(\mathtt{0})$:

$$(x+y) \cdot \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathtt{0} + \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} x \cdot \mathtt{0} + \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} x \cdot \mathtt{0} + y \cdot \mathtt{0}$$

Sei nun $\varphi(z)$ die Induktionsannahmen, dann lässt sich der Induktionsschritt $\varphi(\mathtt{s}z)$ wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned}
(x+y)\cdot \mathrm{s}z &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} (x+y)\cdot z + (x+y)\\
&\overset{\varphi(z)}{=} (x\cdot z + y\cdot z) + (x+y)\\
&\overset{6.(b)}{=} x\cdot z + (y\cdot z + (x+y))\\
&\overset{6.(b)}{=} x\cdot z + ((y\cdot z + x) + y)\\
&\overset{6.(d)}{=} x\cdot z + ((x + y\cdot z) + y)\\
&\overset{6.(b)}{=} x\cdot z + (x + (y\cdot z + y))\\
&\overset{\mathsf{PA}_5}{=} x\cdot z + (x + y\cdot \mathrm{s}z)\\
&\overset{6.(b)}{=} (x\cdot z + x) + y\cdot \mathrm{s}z\\
&\overset{\mathsf{PA}_5}{=} x\cdot \mathrm{s}z + y\cdot \mathrm{s}z
\end{aligned}$$

Der Satz folgt nun mit Induktion über z sowie mit der VERALLGEMEINERUNGSREGEL über y und x.

(d) Setze $\varphi(y) :\equiv x\cdot y = y\cdot x$ und zeige die Formel mit Hilfe von Induktion über y. Die Induktionsverankerung $\varphi(0)$ geht wie folgt: $x\cdot 0 \overset{\mathsf{PA}_4}{=} 0 \overset{7.(a)}{=} 0\cdot x$. Wir nehmen an, dass $\varphi(y)$ wahr ist und zeigen $\varphi(\mathrm{s}y)$:

$$\begin{aligned}
x\cdot \mathrm{s}y &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} x\cdot y + x\\
&\overset{\varphi(y)}{=} y\cdot x + x\\
&\overset{7.(b)}{=} y\cdot x + \mathrm{s}0\cdot x\\
&\overset{7.(c)}{=} (y+\mathrm{s}0)\cdot x\\
&\overset{6.(c)}{=} \mathrm{s}y\cdot x
\end{aligned}$$

Mit Indutkion über y sowie einmaliger Anwendung der VERALLGEMEINERUNGSREGEL nach x folgt nun der Satz.

(e) Wir zeigen die Formel $\varphi(x,y,z) :\equiv x\cdot(y+z) = (x\cdot y) + (x\cdot z)$ direkt (also ohne Induktion):

$$\begin{aligned}
x\cdot(y+z) &\overset{7.(d)}{=} (y+z)\cdot x\\
&\overset{7.(c)}{=} y\cdot x + z\cdot x\\
&\overset{7.(d)}{=} x\cdot y + z\cdot x\\
&\overset{7.(d)}{=} x\cdot y + x\cdot z
\end{aligned}$$

Der Satz folgt nun, wenn man auf die obige Formel dreimal die VERALLGEMEINERUNGSREGEL anwendet für z, y und x.

(f) Definiere $\varphi(z) :\equiv x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ und zeige die Aussage mit Induktion über z. Beginne mit der Induktionsverankerung $\varphi(0)$:

$$x\cdot(y\cdot 0) \overset{\mathsf{PA}_4}{=} x\cdot 0 \overset{\mathsf{PA}_4}{=} 0 \overset{\mathsf{PA}_4}{=} (x\cdot y)\cdot 0$$

Sei nun $\varphi(z)$ die Induktionsannahme, dann lässt sich der Induktionsschritt $\varphi(\mathrm{s}z)$ wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned}
x \cdot (y \cdot \mathrm{s}z) &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} x \cdot (y \cdot z + y) \\
&\overset{7.(e)}{=} x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y \\
&\overset{\varphi(z)}{=} (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y \\
&\overset{\mathsf{PA}_5}{=} (x \cdot y) \cdot \mathrm{s}z
\end{aligned}$$

Verwenden wir nun Induktion über z und wenden wir zweimal die VERALLGEMEINERUNGSREGEL an (für y und x), dann resultiert daraus, was wir zeigen wollten.