ARBEITSBLATT – BREMSWEG

Einleitung

Diese Arbeitsblätter sollen dich Schritt für Schritt an den Zusammenhang zwischen Fahrgeschwindigkeit und Bremsweg heranführen. Der Reaktionsweg, also der Weg, den man während der Reaktionszeit zurücklegt, wird hier nicht berücksichtigt. Zu den einzelnen Punkten gibt es im Anhang helfende Hinweise und Lösungen. Die mit * versehenen Fragen sind anspruchsvoll. Wenn im Unterricht gleichmäßige Beschleunigung und Bremsweg bereits durchgenommen wurden, kann direkt mit dem Experiment in Punkt 4 begonnen werden.

Abb. 1

1 Allgemeine Überlegungen zu Bremsverzögerung und Bremsweg

1.1 Tippe zunächst mehr oder weniger intuitiv, wie der **Bremsweg** von der **Fahrgeschwindigkeit** abhängen könnte. Wie verändert er sich, wenn man die Fahrgeschwindigkeit erhöht? Wir gehen in allen Fällen davon aus, dass die Bremsverzögerung über den gesamten Bremsvorgang konstant bleibt. Welche der drei Möglichkeiten in Abb. 2 trifft dann wahrscheinlich am ehesten zu?

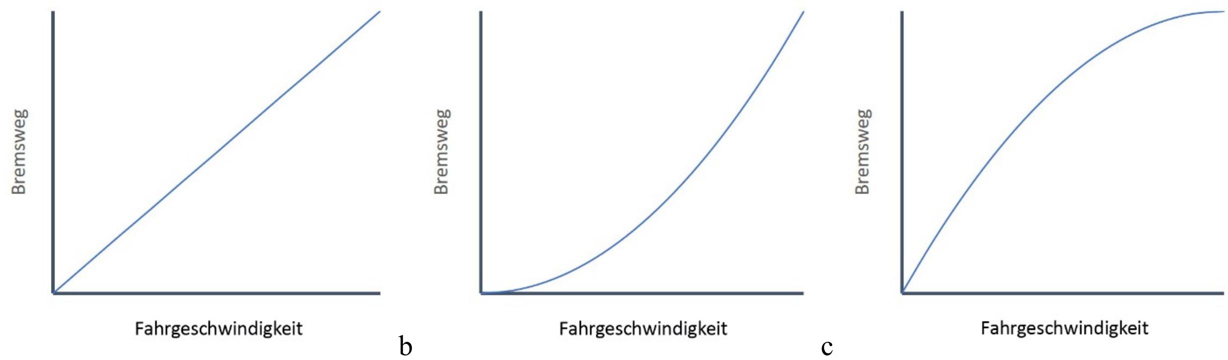


Abb. 2: Welcher Zusammenhang zwischen Fahrgeschwindigkeit und Bremsweg erscheint am plausibelsten?

1.2 Wir gehen im Folgenden vereinfacht davon aus, dass bei der Bremsung eine **konstante Bremsverzögerung** a vorliegt, dass also salopp gesagt die Bremsung während des gesamten Bremsvorganges immer gleich stark ist und nicht zum Beispiel zu Beginn oder am Ende stärker. Eine konstante Bremsverzögerung liegt zum Beispiel bei einer Vollbremsung vor. Allgemein gilt der Zusammenhang $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Das Δ (delta) steht immer für ein Differenz. Δv ist die Geschwindigkeitsdifferenz (Endgeschwindigkeit minus Anfangsgeschwindigkeit) im Zeitintervall Δt (Endzeit minus Startzeit). Je nach Situation können v, und Δv und a auch negative Werte aufweisen, wir werden im Folgenden aber vereinfacht immer den Betrag angeben. Nach diese Vorüberlegungen eigentliche Aufgabe: Beschleunigungen werden im internationalen Einheitensystem (SI) in m/s^2 angegeben. Überlege, wie es zu dieser etwas seltsamen Einheit kommt. Wo kommt diese Quadratsekunde im Nenner her?

1.3 Es ist in Österreich gesetzlich vorgeschrieben, dass Autos eine **Mindestbremsverzögerung** von 5 m/s^2 erreichen müssen. Was soll man sich konkret unter der Mindestbremsverzögerung vorstellen? Was bedeutet das zum Beispiel für eine Vollbremsung bei 50 km/h? Verwende dabei deine Überlegungen zur Einheit von a aus **1.2**.

2 Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg herleiten

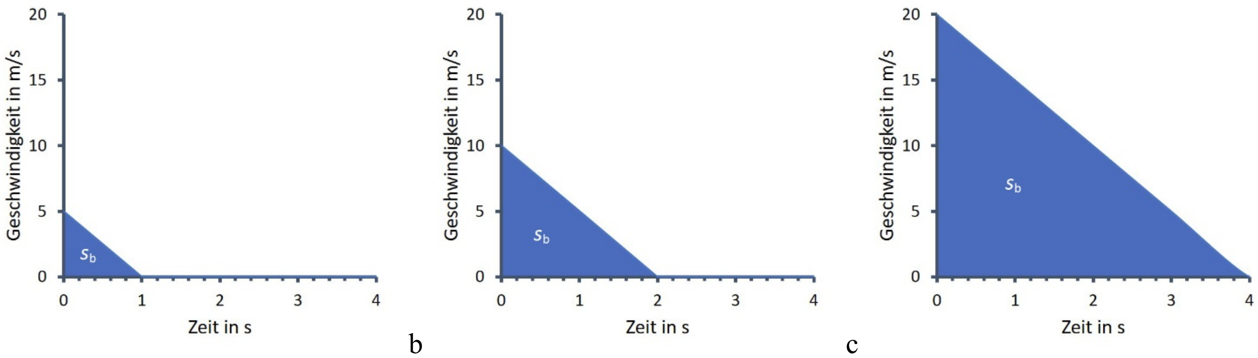
2.1 Überlege mit Hilfe von **1.2**, welcher allgemeine Zusammenhang zwischen der **Fahrgeschwindigkeit** v und der **Bremszeit** $t_{\square}$ bei einer Vollbremsung besteht.

2.2 Zeichne Diagramme mit den **Zeit-Geschwindigkeitsverläufen**, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten 5 m/s, 10 m/s und 20 m/s betragen. Nimm als Bremsverzögerung jeweils 5 m/s^2 an.

Abb. 3: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Geschwindigkeit und dem Bremsweg?

2.3 Die Überlegungen in **2.2** zeigen, dass die Bremszeit $t_{\square}$ proportional zur Fahrgeschwindigkeit v beim Beginn der Bremsung (zum Zeitpunkt t_0) ist, dass also $t_{\square} \sim v(t_0)$ gilt. Nun ist beim Bremsen im Alltag aber nicht die Bremszeit, sondern der **Bremsweg** interessant. Man will wissen, ob man in der verbleibenden Distanz bis zu einem Hindernis oder einem Stopp-Punkt noch stehen bleiben kann. Überlege zunächst, welche Größe ganz allgemein die Fläche unter einer Zeit-Geschwindigkeits-Kurve repräsentiert. Wofür steht die Fläche daher offensichtlich?

2.4 Die Fläche unter der Zeit-Geschwindigkeits-Kurve bei einer Bremsung repräsentiert also den Bremsweg. Welcher proportionale Zusammenhang zwischen **Fahrgeschwindigkeit** und **Bremsweg** ergibt sich daher bei einer Vollbremsung? Verwende für deine Überlegungen die Diagramme aus **2.2**, die in Abb. 4 noch einmal etwas plakativer dargestellt sind.



a b c

Abb. 4: Wie wachsen die Bremswege, also die Flächen unter den Kurven, mit der Fahrgeschwindigkeit an?

2.5 Überprüfe mit dem Ergebnis von **2.4**, welche Antwort bei Aufgabe **1.1** richtig ist.

2.6 Überlege, wie sich die Kurve im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm (also z.B. in Abb. 4 b) bei unterschiedlicher Bremsverzögerung verändert. Was bedeutet eine **größere** oder **kleiner Bremsverzögerung**? Stelle die unterschiedlichen Bremsverzögerungen 2,5 m/s^2, 5 m/s^2 und 10 m/s^2 in verschiedenen Diagrammen dar.
2.7 Überlege mit Hilfe der Lösung zu **2.6**, in welchem proportionalen Zusammenhang daher s_{b} und a stehen.

2.8* Leite aus der **allgemeinen Formel** für die Beschleunigung aus **1.2**, aus Abb. 4 und den Antworten aus **2.4** bis **2.7** eine Formel ab, die die Abhängigkeit des Bremswegs von Bremsverzögerung a und Startgeschwindigkeit $v(t_0)$ beschreibt.

2.9 Zeichne mit Hilfe der Formel aus **2.8** ein Diagramm, das den Zusammenhang zwischen **Fahrgeschwindigkeit** in km/h und **Bremsweg** in m bei der gesetzlich vorgeschriebenen Bremsverzögerung von 5 m/s^2 zeigt. Gib vorher einen Tipp ab, wie lange die Bremswege bei 30 km/h, 50 km/h und 130 km/h sind.

Ziehen wir eine kurze **Zwischenbilanz**: Beim Bremsen sinkt – gleichbleibende Bremsverzögerung vorausgesetzt – die Geschwindigkeit pro Sekunde um einen konstanten Wert ab. Das sieht dann zum Beispiel so wie in Abb. 5 a und b aus. Der bei der Bremsung zurückgelegte Weg entspricht der Fläche unter der Kurve. Bei Verdopplung der Geschwindigkeit verdoppelt sich die Bremszeit. Dadurch vervierfacht sich die Fläche unter der Kurve und somit auch der Bremsweg. Aus diesen Überlegungen kann man für den Bremsweg die Formel $s = \frac{v^2}{2a}$ ableiten. Der Bremsweg ist somit proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ($s \sim v^2$; siehe Abb. 5 c) und indirekt proportional zur Bremsverzögerung ($s \sim \frac{1}{a}$).

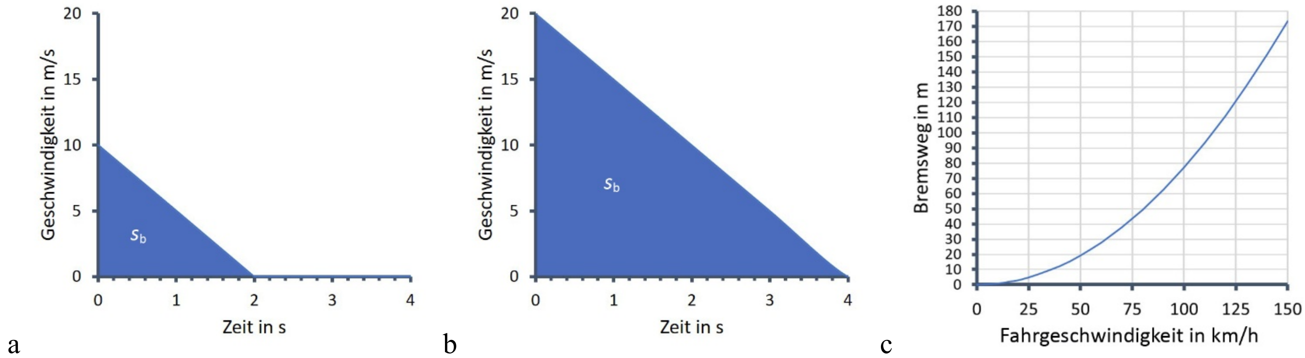


Abb. 5: Zusammenhang zwischen Bremszeit und Fahrgeschwindigkeit (a und b) sowie Bremsweg und Geschwindigkeit (c) bei einer Bremsverzögerung von 5 m/s^2.

3 Die Rolle von kinetischer Energie und Reibungskraft beim Bremsen

3.1 Der **Energieerhaltungssatz** besagt, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet, sondern nur von einer Form in eine andere umgewandelt werden kann. Überlege, welche Energieformen beim Bremsen ineinander umgewandelt werden.

3.2 Wie lautet die Formel für die **Bewegungsenergie**? Wie kann man mit Hilfe dieser Formel und der Antwort auf **3.1** ableiten, dass der Bremsweg proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist, dass also $s \sim v^2$ gilt?

Abb. 6: Welche Energieformen spielen beim Bremsen eine Rolle?

3.3* Wie groß die Bremsverzögerung werden kann, hängt letztlich von der **Reibungskraft** F_R zwischen Reifen und Straße ab. Diese wird folgendermaßen beschrieben: $F_R = \mu \cdot F_N$. Dabei ist μ der Reibungskoeffizient und F_N die Normalkraft, also die Kraft, die senkrecht von unten vom Boden auf die Reifen wirkt. Die Normalkraft entsteht durch die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ des Autos, wobei m die Masse des Autos ist und $g \approx 10\ \square/\square^2$ die Fallbeschleunigung. Die Normalkraft ist eine Folge des 3. Newton'schen Axioms „actio est reactio": Die Reifen üben eine Kraft auf den Untergrund aus, und dieser übt eine Kraft auf die Reifen aus. Nehmen wir einmal vereinfacht an, dass bei einer Vollbremsung die Reifen komplett blockieren. Der Reibungskoeffizient zwischen Rädern und Straße beträgt in diesem Fall etwa 0,5. Zeige mit Hilfe des 2. Newton'schen Axioms $F = m \cdot a$, dass daraus eine Bremsverzögerung von 5 m/s^2 folgt.

3.4 Die **Haftreibungskraft** ist immer größer als die **Gleitreibungskraft**. Es ist also schwerer, etwas in Bewegung zu setzen, als es in Bewegung zu halten. Warum? Alle Oberflächen sind mikroskopisch gesehen uneben. Wenn zum Beispiel eine Kiste ruht, greifen die Verzahnungen der einander berührenden Oberflächen tief ineinander. Wenn du die Haftreibungskraft überschreitest und die Kiste in Bewegung setzt, dann hebt es vereinfacht gesagt die oberen Unebenheiten etwas aus den unteren heraus und diese rumpeln dann mit weniger Kontakt leichter aneinander vorbei. Deshalb ist die Gleitreibungskraft immer kleiner als die Haftreibungskraft, und deshalb unterscheidet man in der Regel auch immer zwischen Gleitreibungs- und Haftreibungskoeffizienten. Bei der Vollbremsung in **3.3** wurde zum Bespiel genau genommen der Gleitreibungskoeffizient angegeben. Überlege mit Hilfe dieser Informationen, wie das **Antiblockiersystem** (ABS) beim Auto funktioniert und warum es auf festem Grund den Bremsweg verkürzt.

3.5 In Tab. 1 siehst du einige Werte für Haft- und Gleitreibungskoeffizienten μ_{H} und μ_{G}. Überlege, um welchen Faktor sich der **Bremsweg** durch ABS im Extremfall verringern kann und um welchen Faktor sich der Bremsweg bei nasser, eisiger und eisig-nasser Fahrbahn verändert. Was folgt daraus für den Alltag?

Stoffpaare	μ_{H}	μ_{G}
Gummi auf Beton (trocken)	0,65	0,5
Gummi auf Beton (nass)	0,4	0,35
Gummi auf Eis (trocken)	0,2	0,15
Gummi auf Eis (nass)	0,1	0,08
Stahl auf Teflon	0,04	0,04
Schlittschuh auf Eis	0,03	0,01

Tab. 1: einige gerundete Beispiele für Reibungskoeffizienten (Quelle: Big Bang 5, ÖBV)

4 Zusammenhang zwischen Fahrtempo und Bremsweg experimentell überprüfen

Mit einfachen Mitteln lässt sich der Zusammenhang $s \sim v^2$ zwischen Bremsweg und Geschwindigkeit **experimentell überprüfen**. Man benötigt dazu nur ein Fahrrad, Handys zum Stoppen der Zeit, Maßstab und eventuell Kreide zum Zeichnen von Start- und Stopplinie. Bei diesem Experiment lernt man nebenbei eine Menge über Messungen, Mittelwerte, Standardabweichgungen und Kurvenanpassungen. Bei Durchführung und Auswertung sind einige Dinge zu beachten, damit das Ergebnis exakter wird, die hier Schritt für Schritt besprochen werden.

Abb. 7: Der Zusammenhang $s \sim v^2$ gilt natürlich auch für Fahrräder

4.1 Was braucht man für das Experiment?

Fahrrad und Fahrer*in, Signalgeber*in (steht bei A; siehe Abb. 8), möglichst viele Zeitnehmer*innen um die Messgenauigkeit zu erhöhen (stehen bei B), Maßband und Weitenmesser*innen, Protokollführer*in. Im Mindestfall braucht man vier Personen.

4.2 Wie wird der Versuch durchgeführt?

Ein*e Schüler*in nimmt mit dem Fahrrad auf einer Beschleunigungsstrecke Schwung (Abb. 8 a). Er*sie fährt die letzten 10 m – also von A nach B – ohne zu treten, rollt in diesem Abschnitt also einfach mit konstanter Geschwindigkeit weiter, damit man später durch die Zeitnehmungen über $v = s/t$ die Geschwindigkeit ermitteln kann. Ein*e Signalgeber*in bei A gibt ein Handzeichen, wenn das Vorderrad gerade Linie A berührt und die Zeitnehmer*innen bei B stoppen ein. Sie stoppen wieder ab, wenn das Vorderrad die Linie bei B überfährt, also nach 10 m. Dort beginnt der*die Fahrer*in voll zu bremsen. Der Bremsweg von B nach C wird anschließend von idealerweise zwei Personen gemessen. Alle Werte eines Versuches werden dokumentiert. Es sollten viele Fahrten mit völlig verschiedenen Geschwindigkeiten durchgeführt werden, also von sehr langsam bis so schnell wie möglich, damit sich später ein deutlicher Kurvenverlauf ergibt.

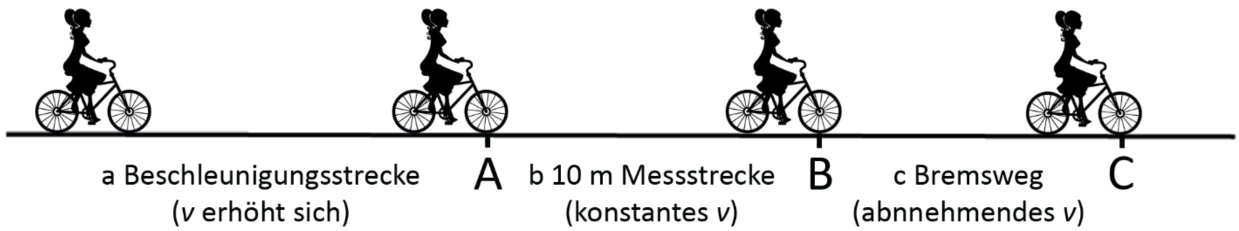


Abb. 8: So wird das Experiment durchgeführt: Bei A steht ein*e Signalgeber*in, bei B stehen die Stopper*innen, von B bis C wird der Bremsweg ermittelt.

4.3 Ein paar wichtige Punkte

1) Es muss bei allen Messungen (also beim Ein- und Abstoppen der Zeit, beim Beginn des Bremsens und beim Messen des Bremsweges) immer die gleiche Stelle des Rads berücksichtigt werden, am besten der Auflagepunkt des Vorderrades, wie in Abb. 8 dargestellt.

2) Ein neuer Versuch darf erst wieder unternommen werden, wenn Signalgeber*in und Stopper*innen bereit sind.

3) Um die Stoppungen genauer zu machen, sollten möglichst viele Personen stoppen. Von den gemessenen Zeiten wird dann der Mittelwert berechnet.

4) Die Bremsung muss immer so stark wie möglich sein, damit auch die Bremsverzögerung a immer gleich groß ist. Nur dann lässt sich die Kurve sinnvoll auswerten. Mach aber vor den eigentlichen Versuchen ein paar Bremstest, bei denen du sachte beginnst und dann immer stärker bremst. Achte unbedingt darauf, dass Vorder- und Hinterbremse gleich stark eingestellt sind, damit du keinen Salto schlägst.

5) Alle Werte müssen gut und sauber dokumentiert werden, damit später eine sinnvolle Auswertung möglich ist.

6) Sollte es nicht möglich sein, eigene Tests durchzuführen, können die Rohdaten eines realen Experiments aus Abb. 10 verwendet werden. Im Anhangteil bei den Lösungen zu 4.3 befindet sich eine Tabelle, aus der man die Daten mit *Strg + C* direkt kopieren kann.

Wenn man alle oben angeführten Punkte berücksichtigt, dann ergibt sich eine Kurve, die ähnlich aussehen wird wie Abb. 9. Mit freiem Auge ist zu erkennen, dass der Bremsweg ganz offensichtlich nicht linear mit der Geschwindigkeit ansteigt, sondern Abb. 2 b ähnelt. Die einzelnen Auswertungsschritte und was man später noch alles aus den Daten herauslesen kann, werden in den folgenden Punkten genauer erklärt.

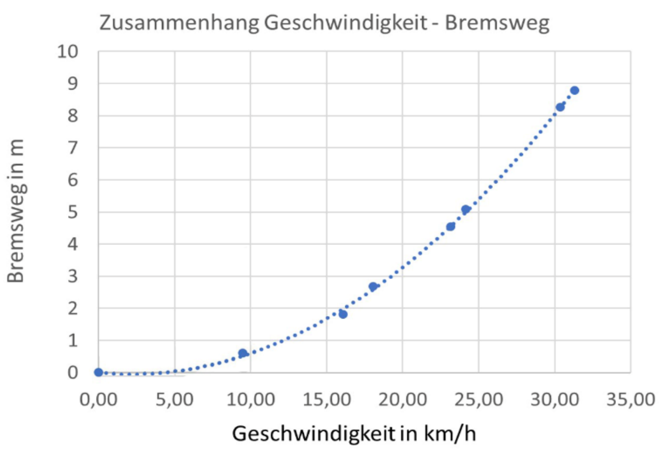


Abb. 9: So sieht die Auswertung eines mit Schüler/innen im Rahmen einer Schulstunde durchgeführten Tests aus.

4.4 Durchschnittszeiten berechnen

Zunächst werden die gestoppten Zeiten von allen Versuchen in eine Tabellenkalkulation eingetragen (Abb. 10). In unserem Beispiel wurde Excel verwendet, über das die meisten Schüler*innen in den Schulen verfügen. Die Rohdaten finden sich auch im Anhang unter 4.3 oder in der Datei *Fahrrad_Bremsweg.xlsx*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Versuche				Zeiten in s						
2	1	3,78	3,66	3,82	3,80	3,77	3,83	3,82	3,75	3,78	3,80
3	2	2,30	2,21	2,37	2,28	2,25	2,15	2,16	2,17	2,30	2,21
4	3	2,00	1,90	2,03	2,02	1,98	2,00	2,12	1,99	2,00	1,90
5	4	1,70	1,69	1,41	1,55	1,48	1,50	1,60	1,53	1,67	1,50
6	5	1,44	1,55	1,39	1,52	1,60	1,50	1,58	1,38	1,44	1,49
7	6	1,25	1,25	1,18	1,11	1,25	1,10	1,17	1,29	1,19	1,15
8	7	1,13	1,09	1,23	1,22	1,18	1,03	1,10	1,26	1,14	1,15

Abb. 10: Rohdaten für die gestoppten Zeiten aus den Versuchen.

Berechne nun für jeden der Versuche den Zeitmittelwert (Abb. 11). Gibt dazu in der rechten Zelle „=MITTELWERT(B2:K2)“ ein oder markiere mit der Maus die Zellen B2 bis K2 in Zeile 2. Wenn du auf Enter drückst, wird der Durchschnittswert in Zelle L2 dargestellt (Abb. 12).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Versuche				Zeiten in s							Mittelwert Zeit	
2	1	3,78	3,66	3,82	3,80	3,77	3,83	3,82	3,75	3,78	3,80	=MITTELWERT(B2:K2)	

Abb. 11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Versuche				Zeiten in s							Mittelwert Zeit	
2	1	3,78	3,66	3,82	3,80	3,77	3,83	3,82	3,75	3,78	3,80	3,78	

Abb. 12

Berechne nun auch den Mittelwert für alle anderen Versuche. Entweder wiederholst du die oben beschriebene Prozedur für alle Zeilen oder du fährst mit dem Kreuz in die rechte untere Ecke von Zelle L2. Das normalerweise dicke Kreuz (Abb. 13 a) wird dann dünner (b). Wenn du nun mit der linken Maustaste einen Doppelklick machst, füllen sich die Zellen unten automatisch mit dem Mittelwert auf (c).

a

L	M
Mittelwert Zeit	
3,78	

b

L	M
Mittelwert Zeit	
3,78	

c

L	M
Mittelwert Zeit	
3,78	
2,24	
1,99	
1,56	
1,49	
1,19	
1,15	

Abb. 13

4.5 Geschwindigkeiten berechnen

Über $v = s/t$ lässt sich nun die Geschwindigkeit, mit der die Strecke zwischen A und B durchfahren wurde (Abb. 8), berechnen. Dabei ist t der eben berechnete Mittelwert der Stoppungen in Spalte L. Weil die Messstrecke 10 m beträgt, rechnet man $v = 10\ \mathrm{m}/t$. Die Messstrecke beträgt 10 m. Durch Einsetzen dieser beiden Werte in die Formel $v = s/t$ erhält man die Geschwindigkeit aber in der Einheit m/s. Um auf km/h zu kommen, unter denen man sich mehr vorstellen kann, muss man noch mit 3,6 multiplizieren (siehe Abb. 14). Führe diesen Arbeitsschritt nun auch für alle anderen Zellen durch, wie in Abb. 13 erklärt.

L	M	N
Mittelwe	Geschwindigkeit	
3,78	=3,6*(10/L2)	

Abb. 14

4.6 Tabelle fertig machen und Grafik erstellen

Damit du den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg darstellen kannst, fehlen noch zwei Schritte. Erstens musst du in der rechten Spalte noch die Bremswege bei den einzelnen Versuchen eintragen. Zweitens solltest du ganz oben noch eine Zeile einfügen, in der du für Geschwindigkeit und Bremsweg jeweils den Wert 0 einträgst, weil dann die Kurvenanpassung besser funktioniert. In Summe sollte das Tabellenblatt dann so ähnlich aussehen wie in Abb. 15.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Versuche**				**Zeiten in s**							Mittelwe	Geschwindigk	Bremsweg
2													0	0
3	1	3,78	3,66	3,82	3,80	3,77	3,83	3,82	3,75	3,78	3,80	3,78	9,52	0,60
4	2	2,30	2,21	2,37	2,28	2,25	2,15	2,16	2,17	2,30	2,21	2,24	16,07	1,80
5	3	2,00	1,90	2,03	2,02	1,98	2,00	2,12	1,99	2,00	1,90	1,99	18,05	2,67
6	4	1,70	1,69	1,41	1,55	1,48	1,50	1,60	1,53	1,67	1,50	1,56	23,03	4,54
7	5	1,44	1,55	1,39	1,52	1,60	1,50	1,58	1,38	1,44	1,49	1,49	24,18	5,08
8	6	1,25	1,25	1,18	1,11	1,25	1,10	1,17	1,29	1,19	1,15	1,19	30,15	8,26
9	7	1,13	1,09	1,23	1,22	1,18	1,03	1,10	1,26	1,14	1,15	1,15	31,22	8,78

Abb. 15: Rohdaten in B3:K9 und alle Berechnungen in M3:N9 um den Test auswerten zu können.

Die Daten, auf die es für die graphische Auswertung ankommt, befinden sich in den Spalten M und N und den Zeilen 2 bis 9, also im Bereich M2:N9. Markiere diesen Bereich, gehe auf *Einfügen -> Diagramm*, wähle ein Punktdiagramm aus (Abb. 16) und klicke auf *OK*.

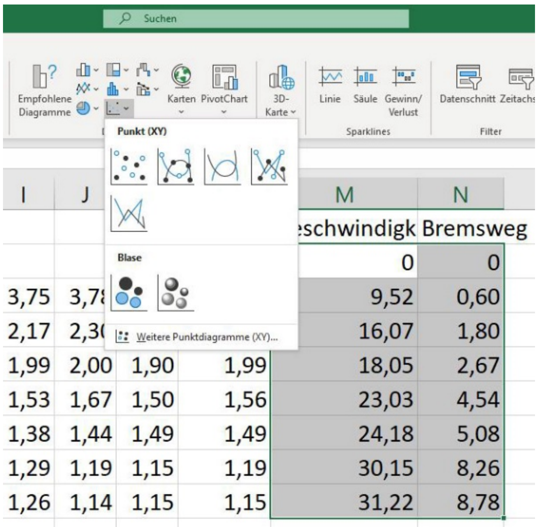


Abb. 16

Nun solltest du noch die Achsen beschriften und einen Diagrammtitel einfügen. Dann sollte das Diagramm so ähnlich aussehen wie in Abb. 17.

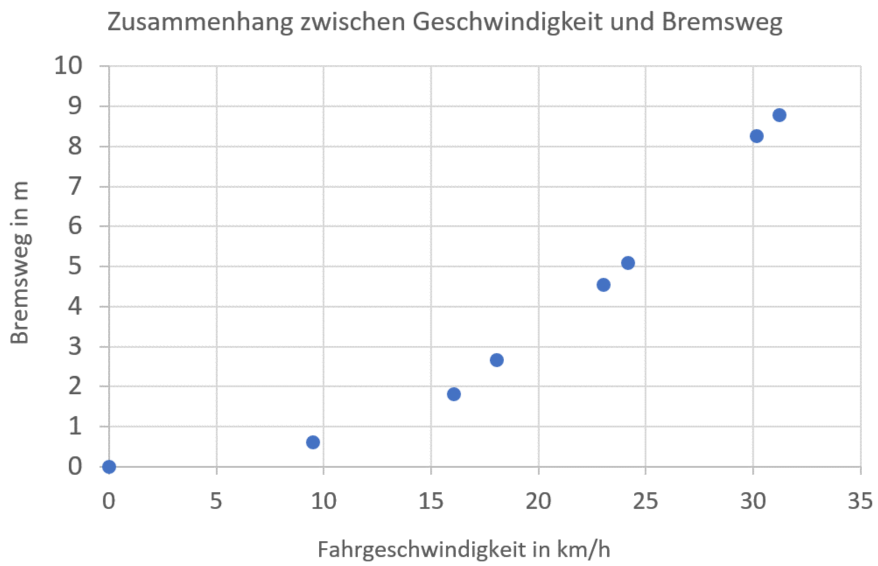


Abb. 17: das Diagramm vor der Kurvenanpassung

4.7 Kurvenanpassung mit Polynom 2ten Grades

Der Sinn der Auswertung war ja, den Zusammenhang $s \sim v^2$ zu überprüfen. Wir sehen uns dazu zwei Möglichkeiten an, die beide ihre Vor- und Nachteile haben. In Excel lassen sich Kurvenanpassungen durchführen, die auf dem Prinzip der kleinsten quadratischen Fehler basieren. Die Kurven werden so angepasst, dass das Quadrat der Abstände der tatsächlich gemessenen Punkte zur erstellten Trendlinie minimiert wird. Erstelle zu dem Diagramm zunächst einmal eine lineare Trendlinie. Dazu musst du rechts oben neben der Grafik auf das Kreuz-Symbol drücken und in dem sich öffnenden kleinen Fenster noch einmal auf *Trendlinie* (Abb. 18). Dort wählst du *linear* aus. Das soll nur zur plakativen Verdeutlichung dienen, dass die Werte nicht auf einer Geraden liegen.

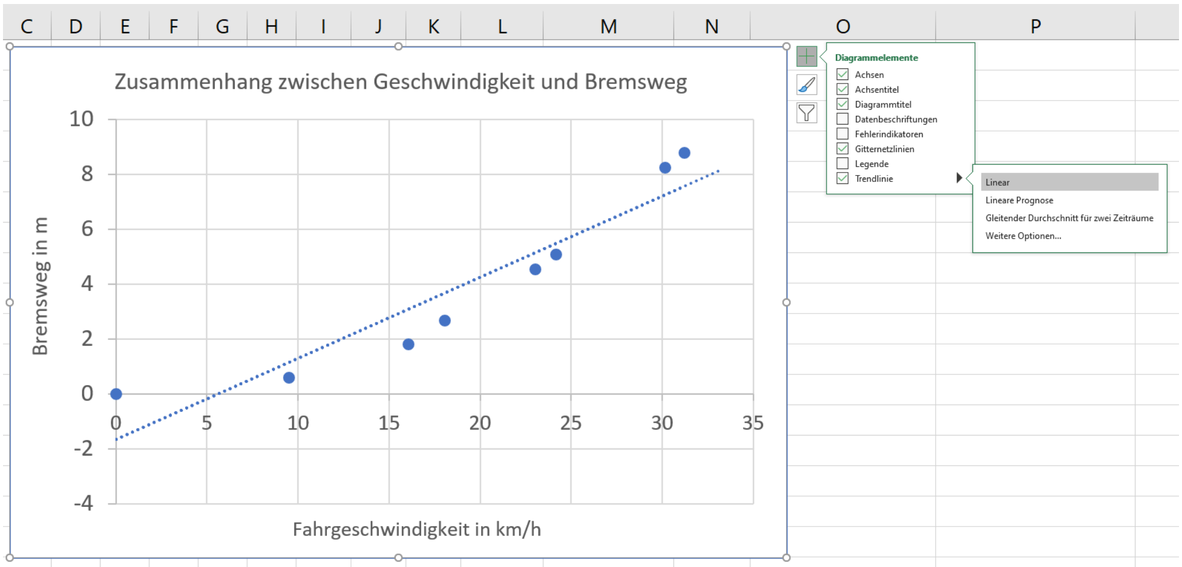


Abb. 18: Es ist ganz offensichtlich, dass sich eine lineare Funktion nicht gut an die Werte anpasst.

Es gibt in Excel auch die Möglichkeit, ein Polynom 2ten Grades auszuwählen. Dazu musst du im kleinsten Fenster (Abb. 18 ganz rechts) auf *Weitere Optionen…* klicken. Dann öffnet sich ein neues Fenster (Abb. 19 a), in dem du *Polynomisch* und *Grad 2* auswählst. Setze außerdem das Häkchen bei *Formel im Diagramm anzeigen*. Das Ergebnis siehst du in Abb. 19 b.

a b

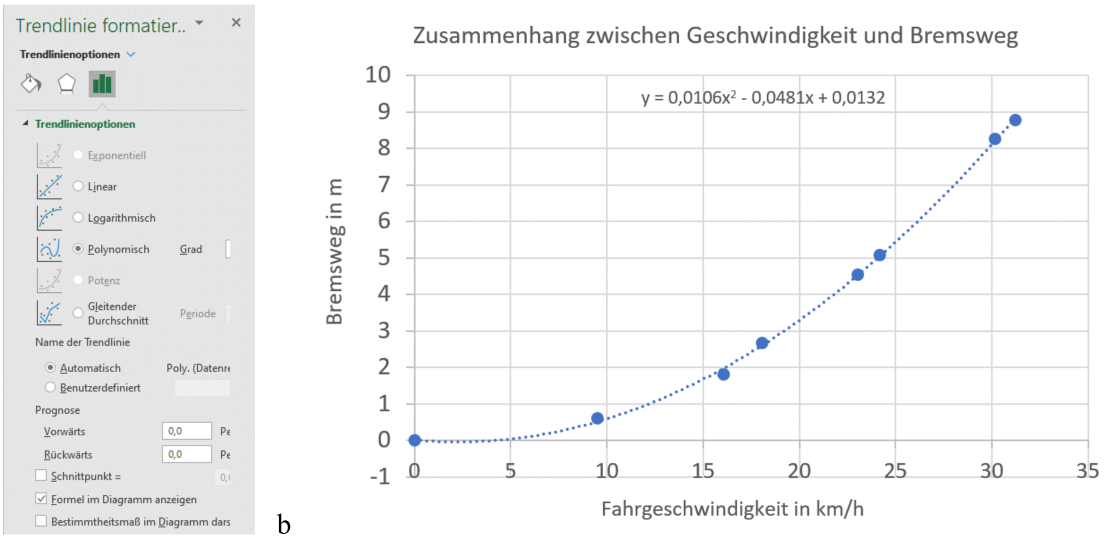


Abb. 19: a) Wie man das Polynom 2ten Grades einstellt; b) Kurvenfit an unserer Testdaten

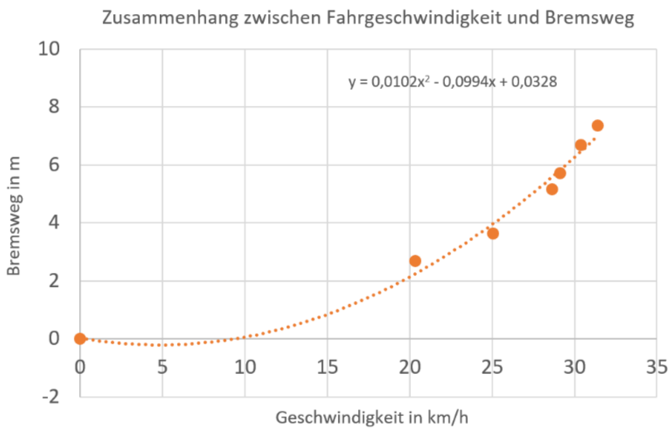


Abb. 20: Schlechte Rohdaten führen hier zu schlechten Ergebnissen.

Das Ergebnis zeigt den Zusammenhang $s \sim v^2$ im Prinzip recht gut. Es gibt aber einen Haken an der Sache, weil in der Funktion nicht nur x^2, sondern auch x und eine Zahl vorkommen, die eigentlich beide 0 sein sollten. Im Fall in Abb. 19 b ist der Fehler nicht sehr groß. Wenn die Rohdaten aber schlechter sind, sind auch die Ergebnisse nicht so gut, wie in Abb. 20 zu sehen ist. Auch in Abb. 19 b geht die gefittete Kurve leicht ins Negative, aber der Fehler ist nicht so stark zu merken.

4.8 „Manuelles Anpassen“ der Kurve

Bei der zweiten Möglichkeit geht es nicht um eine Kurvenanpassung, sondern darum, den Zusammenhang $s \sim v^2$ zu überprüfen. Dazu kann man zum Beispiel einfach den höchsten Wert hernehmen und mit seiner Hilfe a berechnet. In unserem Fall beträgt bei einer Geschwindigkeit von 31,22 km/h (= 8,67 m/s) der Bremsweg 8,78 m (Spalte N Abb. 21). Aus $s = \frac{v^2}{2a}$ folgt dann $a = \frac{v^2}{2s}$. Wenn man v in der Einheit m/s einsetzt, erhält man $a =$ 4,28 m/s². Mit diesen Werten kannst du nunin Spalte O neue Werte berechnen (Abb. 21).

M	N	O
Geschwindigk	Bremsweg	
0	0	
9,52	0,60	=(M3/3,6)^2/(2*4,28)
16,07	1,80	
18,05	2,67	
23,03	4,54	
24,18	5,08	
30,15	8,26	
31,22	8,78	

Abb. 21

Wenn du nun wiederum eine Polynom 2ten Grades anpasst, dann passt dieses ziemlich perfekt zur Funktion $y = bx^2$ und der zweite und dritte Term verschwinden fast (Abb. 23). Diese Methode ist aber natürlich wissenschaftlich nicht „sauber", weil die anderen Werte nicht berücksichtigt werden.

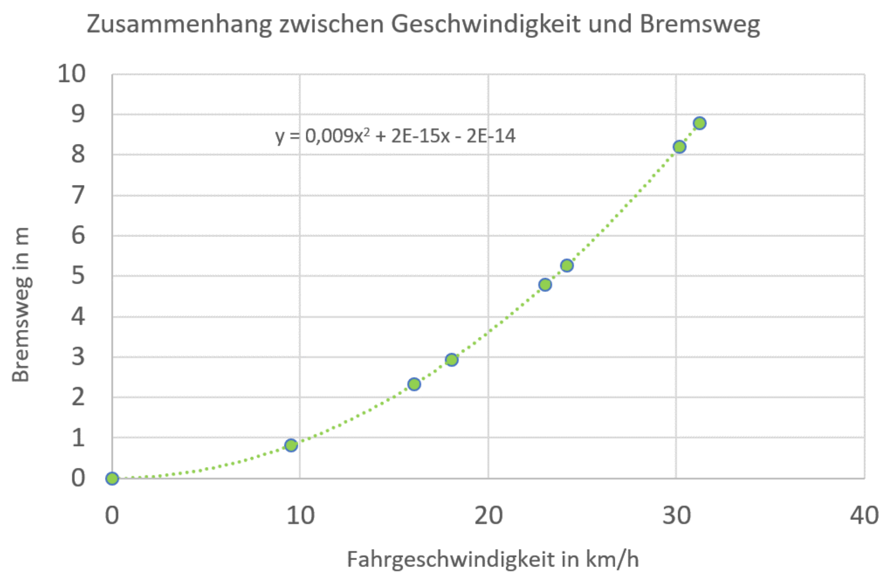


Abb. 22

Interessant ist es, wenn man beide Kurven übereinanderlegt. Dazu klickst du auf das eine Diagramm mit der rechten Maustaste und gehst auf *kopieren*. Dann markierst du das zweite Diagramm und fügst das erste mit *Ctrl +V* ein. Danach musst du eventuell noch Farbe und Form der Markierungen ändern und erhältst dann die Kurven in Abb. 23.

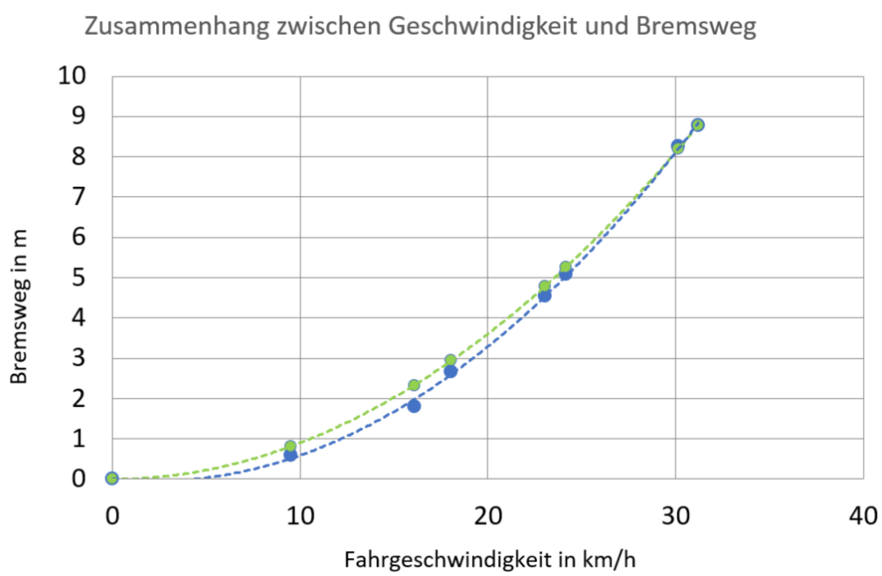


Abb. 23: Rohdaten und Polynom 2ten Grades (blaue, untere Kurve) sowie „geschummeltes" Polynom samt geänderten Werten (obere, grüne Kurve). Die beiden Kurven liegen im Prinzip eng beieinander. Das bedeutet, dass der Versuch recht gut gelungen ist. Bei geringeren Werten ist der gemessene Bremsweg geringer als der „idealisierte". Das kann zum Beispiel daran liegen, dass im Realfall die Bremsverzögerung bei geringen Geschwindigkeiten tatsächlich größer ist als bei höheren.

4.9 Bremsverzögerung und Reibungskoeffizient berechnen

Letztlich ist es auch möglich, aus den vorhandenen Daten die Bremsverzögerung a und den Reibungskoeffizienten μ zu berechnen. Der eleganteste Weg, die Bremsverzögerung zu berechnen, ist über die Formel $s = \frac{v^2}{2a}$. Wenn man für die Geschwindigkeit diesmal nicht die Einheit km/h sondern m/s verwendet, entspricht im gefitteten Polynom $y = bx^2$ die Konstante b dem Wert $\frac{1}{2a}$. Man kann also direkt aus dem Polynom die Bremsverzögerung berechnen. In unserem idealisierten Fall lautet bei den veränderten Geschwindigkeitswerten das Polynom $y = 0{,}1168x^2$ (Abb. 24; Anm.: den Wert -3 · 10^{-14} unterschlagen wir). Es gilt also $0{,}1168 = \frac{1}{2a}$ und somit $a = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1168} = 4{,}28\ \square/\square^2$. Das ist etwas niedriger als die gesetzlich vorgeschriebene Bremsverzögerung für Autos.

Wenn wir von $a = \mu \cdot g$ (siehe **3.5**) ausgehen und g vereinfacht mit 10 m/s^2 annehmen, dann kommen wir auf einen Reibungskoeffizienten von etwa 0,43. Warum ist dieser Wert relativ niedrig?

Erstens verfügt ein Fahrrad ja nicht über ABS. Bei einer Vollbremsung blockieren daher die Räder, und man muss deshalb den Gleitreibungskoeffizienten betrachten (siehe Tab. 1). Außerdem fand die Messungen auf der Kunststofflaufbahn am Sportplatz stand. Deshalb liegt der Gleitreibungskoeffizient etwas unter dem von Gummi auf Beton.

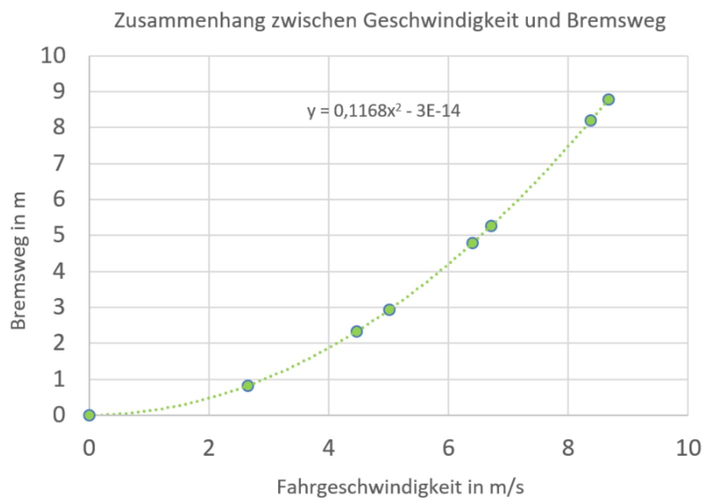


Abb. 24

Hilfestellungen und Lösungen

ad 1.2

Hilfe: Gehe von der Formel für die Beschleunigung aus und verwende für die Größen die üblichen SI-Einheiten, also Meter und Sekunden.

Lösung: Bei einer Beschleunigung ändert sich die Geschwindigkeit pro Zeit, es ändern sich also die m/s pro Sekunde. Man kann daher die Einheit der Beschleunigung daher auch als $\frac{\frac{\square}{\square}}{\square} = \square/\square^2$ schreiben.

ad 1.3

Hilfe: Überlege, wie die Umrechnung von m/s in km/h lautet.

Lösung: Eine Mindestbremsverzögerung von 5 m/s^2 bedeutet, dass das Auto pro Sekunde um 5 m/s langsamer werden muss. 1 m/s entspricht 3,6 km/h. Das Gesetz schreibt also vor, dass ein Auto pro Sekunde um mindestens 18 km/h langsamer werden muss. Es muss also in der Lage sein, von 50 auf 0 km/h innerhalb von rund 2,78 s abzubremsen.

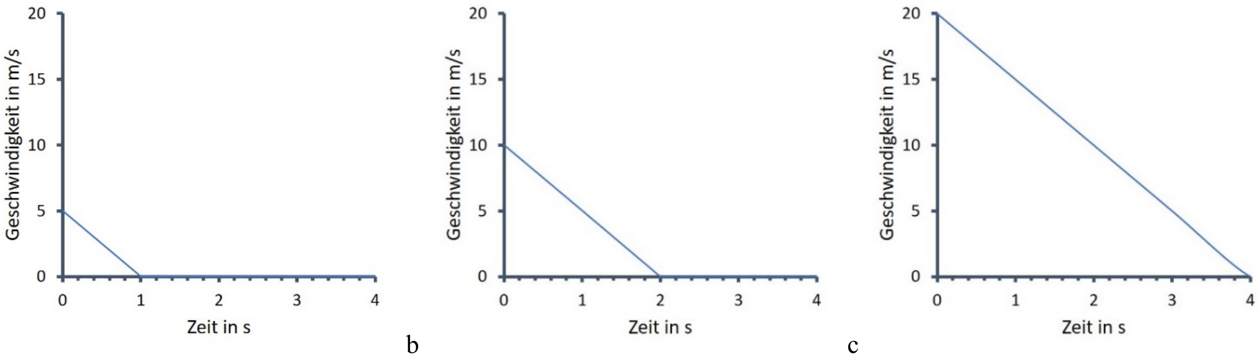
ad 2.1

Hilfe: Um sich den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremszeit zu überlegen, kann man einerseits von einer ganz konkreten Bremsverzögerung ausgehen, zum Beispiel von den gesetzlich vorgeschriebenen 5 m/s^2. Oder man betrachtet die Sache allgemein und geht von der Formel $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ aus.

Lösung: Bei einer Fahrgeschwindigkeit von 5 m/s bleibt das Auto nach 1 s stehen, bei 10 m/s nach 2 s, bei 15 m/s nach 3 s und so weiter. Die Bremszeit $t_\square$ wächst also linear mit der Fahrgeschwindigkeit bzw. Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0)$ an: $t_\square \sim v(t_0)$. Auf dasselbe Ergebnis kommt man, wenn man $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ in $\Delta t = \frac{\Delta v}{a}$ umformt. Wir betrachten hier wiederum den Betrag von Δv und a. Wenn man den gesamten Bremsvorgang bis zum Stillstand betrachtet, dann gilt $\Delta t = t_\square$. Weiters entspricht Δv der Geschwindigkeitsänderung während des Bremsvorgangs und somit der Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0)$. Weil a über den gesamten Bremsvorgang konstant ist, ergibt sich aus der Summe all dieser Überlegungen $\Delta t = t_\square = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v(t_0)}{a} \sim v(t_0)$ oder kurz $t_\square \sim v(t_0)$.

ad 2.2

Lösung: Pro Sekunde sinkt die Geschwindigkeit um 5 m/s ab. Daher kommt das Auto bei 5 m/s nach 1 s, bei 10 m/s nach 2 s und bei 20 m/s nach 4 s zum Stillstand (Abb. 25). Wie schon in 2.1 überlegt, gilt also $t_\square \sim v(t_0)$. Generell kann man sagen, dass eine Verdopplung der Fahrgeschwindigkeit zu einer Verdopplung der Bremszeit führt.



a b c

Abb. 25: Zusammenhang zwischen Zeit und Geschwindigkeit bei einer Bremsung mit konstanter Bremsverzögerung von 5 m/s^2 für die Anfangsgeschwindigkeiten 5 m/s (a), 10 m/s (b) und 20 m/s (c).

ad 2.3

Hilfe: In x-Richtung ist die Zeit aufgetragen, in y-Richtung die Geschwindigkeit. Geschwindigkeit ist aber wiederum Weg/Zeit. Die Fläche unter der Kurve hat also die physikalische Größe $\square\square\square\square \cdot \frac{\square\square\square}{\square\square\square\square}$ = Weg.

Lösung: Die Fläche unter der Kurve steht für einen Weg. Dass es sich hierbei um den Bremsweg handelt, kann man so überlegen: Man könnte die Fahrt in Abschnitte mit konstanter Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit) unterteilen (Abb. 26 nächste Seite) und den jeweils zurückgelegten Weg durch Umformen der Formel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ auf $\Delta s = v \cdot \Delta t$ berechnen. Wenn man nun die Zeitintervalle immer kleiner macht, werden die Balken immer schmäler, gleichzeitig aber auch immer mehr. Bei $\Delta t \to 0$ ergeben die dann infinitesimal schmalen Balken in Summe exakt den beim Bremsen zurückgelegten Weg, also den Bremsweg $s_{\square}$.

ad 2.4:

Hilfe: Die Flächen unter den Kurven in Abb. 4 sind ähnliche Dreiecke. Die Flächen berechnet sich mit $(t_{\square} \cdot v(t_0))/2$, wobei $v(t_0)$ die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorganges ist.

Lösung: Wenn sich die Geschwindigkeit $v(t_0)$ zu Beginn des Bremsvorganges verdoppelt, dann verdoppelt sich auch die Bremszeit $t_{\square}$. Beide Seitenlängen werden daher doppelt so groß und die Dreiecksfläche, die wiederum für den Bremsweg s_b steht, vervierfacht sich. Wenn sich die Geschwindigkeit verdreifacht, werden beide Seitenlängen dreimal so groß und die Fläche verneunfacht sich. Es gilt daher der Zusammenhang $s_\text{b} \sim v(t_0)^2$.

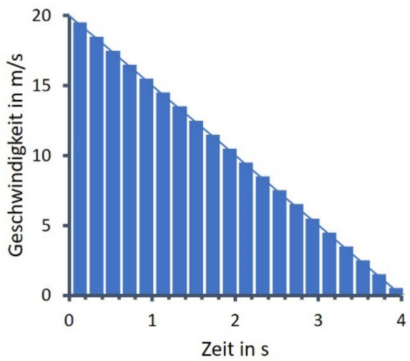


Abb. 26 zu 2.3: Die Gesamtfläche der Balken unter der Kurve steht für den Bremsweg.

ad 2.5:

Lösung: Weil die Geschwindigkeit auf der x-Achse und der Bremsweg auf der y-Achse aufgetragen ist, folgt aus $s_\text{b} \sim v(t_0)^2$ der allgemeine Zusammenhang $y \sim x^2$, und das entspricht einer Parabel in 2. Hauptlage. Daher zeigt Abb. 2 b die richtige Lösung.

ad 2.6:

Hilfe: Gehe von einer fixen Startgeschwindigkeit $v(t_0)$ aus, etwa von 10 m/s.

Lösung: Bei einer Bremsverzögerung von 10 m/s^2 sinkt die Geschwindigkeit nach 1 s auf null (Abb. 27 a), bei 5 m/s^2 nach 2 s (b) und bei 2,5 m/s^2 nach 4 Sekunden (c). Je größer die Bremsverzögerung, desto größer ist das Gefälle der Kurve im Diagramm.

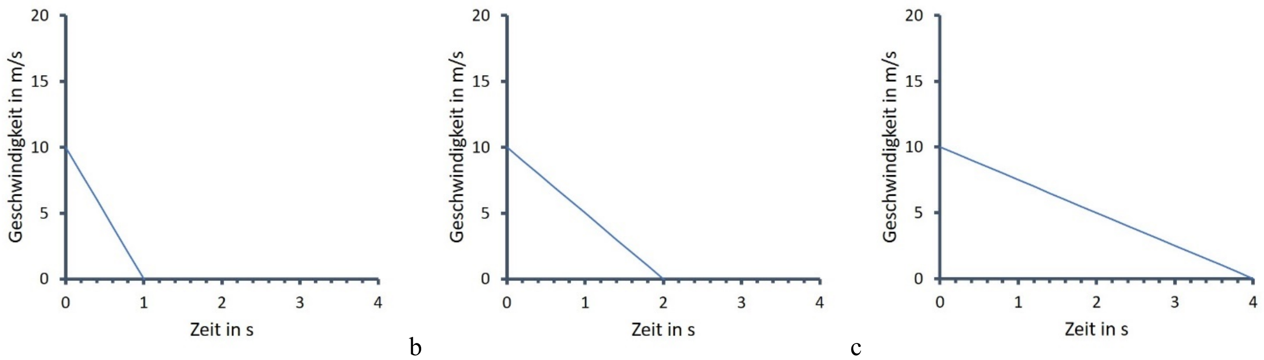


Abb. 27: Zeit-Geschwindigkeits-Kurve für eine Startgeschwindigkeit von 10 m/s und eine Bremsverzögerung von a) 10 m/s^2, b) 5 m/s^2 und c) 2,5 m/s^2.

ad 2.7:

Hilfe: Die Fläche A unter der Kurve entspricht dem Bremsweg s_b. Weites gilt $A = \frac{xy}{2}$, wobei in diesem Fall x der Bremszeit t_b entspricht und y der Startgeschwindigkeit $v(t_0)$.

Lösung: Gehen wir von Abb. 27 b und der Bremsverzögerung von 5 m/s^2 aus. Wenn sich a verdoppelt, (Abb. 27 a), sinkt $t_{\square}$ auf die Hälfte ab. Damit sinkt aber auch die Fläche A und somit s_b auf die Hälfte ab. Wenn sich a halbiert, (Abb. 27 c), steigt $t_{\square}$ auf den doppelten Wert an. Damit verdoppeln sich die Fläche A und somit auch s_b. Kurz: Wenn sich die Bremsverzögerung verdoppelt, halbiert sich der Bremsweg und umgekehrt. Es muss also $s_\text{b} \sim \frac{1}{a}$ gelten.

ad 2.8:

Hilfe 1: Der Bremsweg entspricht der Dreiecksfläche unter der Zeit-Geschwindigkeits-Kurve (siehe Abb. 4). Weil die Katheten der Bremszeit t_b sowie der Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0)$ entsprechen, ergibt sich für die Fläche des Dreiecks und somit für den Bremsweg die Gleichung $s_\mathrm{b} = \frac{t_\mathrm{b} \cdot v(t_0)}{2}$. Kombiniere diese Gleichung mit der allgemeinen Formel für die Beschleunigung.

Lösung: Allgemein gilt $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ und für unseren Fall speziell $a = \frac{v(t_0)}{t_\mathrm{b}}$. Umgeformt kommt man auf $t_\mathrm{b} = \frac{v(t_0)}{a}$. Wenn man diese Gleichung in jene für den Bremsweg einsetzt, bekommt man $s_\mathrm{b} = \frac{t_\mathrm{b} \cdot v(t_0)}{2} = \frac{\frac{v(t_0)}{a} \cdot v(t_0)}{2} = \frac{v(t_0)^2}{2a}$. Vereinfacht schreibt man in der Physik meistens $s = \frac{v^2}{2a}$.

ad 2.9:

Hilfe: Es ist zu beachten, dass die Formel nur bei SI-Einheiten Gültigkeit hat. Die Geschwindigkeit darf also nicht in km/h, sondern muss in m/s eingesetzt werden. Weil man sich unter km/h aber mehr vorstellen kann, sollte die x-Achse auch so angegeben werden. Die Umrechnung lautet v in m/s mal 3,6 = v in km/h.

Lösung: Die Auswertung (Abb. 28) zeigt, dass der Bremsweg bei 30 km/h rund knapp 7 m beträgt und bei 50 km/h bereits rund 20 m, also fast das Dreifache. Durch die verkehrsberuhigten Zonen sinkt daher der Bremsweg auf rund ein Drittel ab. Das ist sehr beachtlich. Bei 130 km/h würde der Bremsweg 130 m betragen. Bei diesen Werten ist der Reaktionsweg (der Weg, den man während der Reaktionszeit zurücklegt) noch gar nicht eingerechnet.

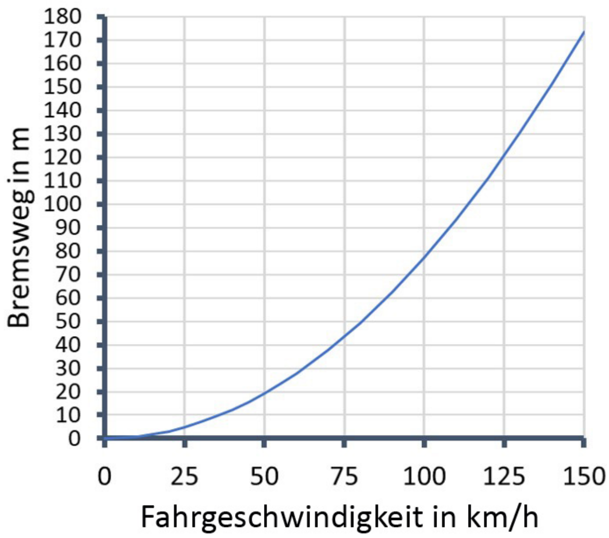


Abb. 28: Der Zusammenhang zwischen Fahrgeschwindigkeit und Bremsweg bei der gesetzlich vorgeschriebenen Mindestbremsverzögerung von 5 m/s^2. Die Angabe der Geschwindigkeit ist ausnahmsweise nicht in der SI-Einheit m/s, weil man sich unter km/h mehr vorstellen kann.

ad 3.1

Lösung: Beim Bremsen wird die Bewegungsenergie vollständig in thermische Energie umgewandelt. Bremsen, Reifen, Straßenbelag und Luft erwärmen sich dabei. Vor allem erwärmen sich aber die Bremsen. Das kann im Extremfall so weit gehen, dass diese zu glühen beginnen.

ad 3.2

Hilfe: Die Formel für die Bewegungsenergie (kinetische Energie) lautet $E_\mathrm{kin} = \frac{mv^2}{2}$, wobei m die Masse des bewegten Objekts in kg darstellt und v die Geschwindigkeit in m/s.

Lösung: Die Bewegungsenergie wächst proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, es gilt also $E_\mathrm{kin} \sim v^2$. Diese Energie muss beim Bremsen komplett in thermische Energie E_{therm} umgewandelt werden, es gilt also $E_\mathrm{kin} = E_\mathrm{therm} \sim v^2$. Pro gewisser Strecke des Bremswegs kann dabei eine bestimmte Menge an thermischer Energie erzeugt werden. Wenn man die doppelte Menge an thermischer Energie erzeugen muss, ist auch der doppelte Bremsweg nötig. In der Summe aller Überlegungen gilt daher $E_\mathrm{kin} = E_\mathrm{therm} \sim v^2 \sim s$ und somit $s \sim v^2$. Man kann es also auch so sehen, dass der Zusammenhang $s \sim v^2$ ursprünglich auf $E_\mathrm{kin} \sim v^2$ zurückzuführen ist. Dazu ein Zahlenbeispiel: Ein Auto mit 1500 kg hat bei 10 m/s eine kinetische Energie von 75000 J. Wenn es mit einer Bremsverzögerung von 5 m/s^2 bremst, dann beträgt der Bremsweg 10 m. Pro Meter werden also 7 500 J kinetische Energie in thermische Energie umgewandelt. Bei 20 m/s ist die kinetische Energie 300 000 J, also viermal so groß. Der Bremsweg beträgt 40 m, ist also auch viermal so groß. Deshalb werden auch hier pro Meter 7 500 J kinetische Energie in thermische Energie umgewandelt.

ad 3.3

Hilfe: Die Normalkraft F_{N} wird durch die Gewichtskraft verursacht. Ersetze daher in der Formel $F_{\mathrm{R}} = \mu \cdot F_N$ die Normalkraft durch die Gewichtskraft $F_{\square} = m \cdot g$, wobei man g vereinfacht mit 10 $\mathrm{m/s^2}$ annehmen kann (exakter Wert 9,81 $\mathrm{m/s^2}$). Die Bremskraft $F_{\square} = m \cdot a$ kann wiederum maximal so groß wie die Reibungskraft F_{R} werden.

Lösung: Wenn man in $F_{\mathrm{R}} = \mu \cdot F_{\mathrm{N}}$ für die Normalkraft die Gewichtskraft einsetzt, erhält man $F_{\mathrm{R}} = \mu \cdot m \cdot g$. Die Kraft, die für das Bremsen des Autos zuständig ist, kann man wiederum mit $F_{\square} = m \cdot a$ beschreiben, wobei a die Bremsverzögerung ist. Die Bremskraft kann maximal so groß werden wie die Reibungskraft: $F_{\square} = m \cdot a \le F_{\square} = \mu \cdot m \cdot g$. Daraus folgt $a \le \mu \cdot g$. Wenn der Reibungskoeffizient 0,5 ist, erfolgen daraus für die Bremsverzögerung maximal 5 $\mathrm{m/s^2}$.

ad 3.4

Lösung: Bei ABS wird der Druck im Bremssystem elektronisch gesteuert automatisch herabgesetzt, wenn die Räder blockieren. Dadurch liegt Haftreibung vor und keine Gleitreibung. Weil die Haftreibungskraft größer ist als die Gleitreibungskraft, wird der Bremsweg dadurch kürzer. Durch ABS wird aber auf festem Grund nicht nur der Bremsweg kürzer, sondern man kann auch lenken, weil man nicht über die Straße rutscht und dem Hindernis somit zusätzlich ausweichen.

ad 3.5

Hilfe: Es gilt $a \le \mu \cdot g$ und daher $a \sim \mu$. Es gilt aber auch $s_{\mathrm{b}} \sim \frac{1}{a}$ (siehe **2.7**) und daher $s_{\mathrm{b}} \sim \frac{1}{\mu}$. Der Bremsweg ist also indirekt proportional zum Reibungskoeffizienten.

Lösung: Ohne ABS blockieren die Reifen komplett und rutschen über die Straße. In diesem Fall gilt laut Tab. 1 ein Reibungskoeffizient von $\mu_{\mathrm{G}} = 0{,}5$. Mit Hilfe des ABS kommt es im Idealfall zur Haftreibung. In der Realität wechseln Rutsch- und Haftphasen ab. Im Idealfall beträgt μ_{H} also die ganze Zeit 0,65. Der Bremsweg verringert sich daher um den Faktor $\left(\frac{1}{0{,}65}\right) : \left(\frac{1}{0{,}5}\right) = 0{,}769$, also um etwa 23 %. Wenn wir im Folgenden von einer idealen Bremsung mit Haftreibung ausgehen, dann verlängert sich im Vergleich zur trockenen Fahrbahn (μ_{H} = 0,65) der Bremsweg bei nasser Fahrbahn (μ_{H} = 0,4) um den Faktor 1,63 (+63 %), bei eisiger Fahrbahn (μ_{H} = 0,2) um den Faktor 3,25 (+225 %) und bei eisig-nasser Fahrbahn (μ_{H} = 0,1) sogar um den Faktor 6,5 (+550 %). Der Bremsweg kann also unter widrigsten Bedingungen beinahe 7-mal so lang sein wie im Idealfall. Das zeigt, wie wichtig es ist, das Fahrtempo an die Fahrbahnbedingungen anzupassen.

ad 4.3

Rohdaten der im Text ausgewerteten Versuche:

Versuche	Zeiten in s										Bremsweg in m
1	3,78	3,66	3,82	3,80	3,77	3,83	3,82	3,75	3,78	3,80	0,60
2	2,30	2,21	2,37	2,28	2,25	2,15	2,16	2,17	2,30	2,21	1,80
3	2,00	1,90	2,03	2,02	1,98	2,00	2,12	1,99	2,00	1,90	2,67
4	1,70	1,69	1,41	1,55	1,48	1,50	1,60	1,53	1,67	1,50	4,54
5	1,44	1,55	1,39	1,52	1,60	1,50	1,58	1,38	1,44	1,49	5,08
6	1,25	1,25	1,18	1,11	1,25	1,10	1,17	1,29	1,19	1,15	8,26
7	1,13	1,09	1,23	1,22	1,18	1,03	1,10	1,26	1,14	1,15	8,78

Tab. 2

Abbildungen

Abb. 1: Bild von S. Hermann & F. Richter auf Pixabay: https://pixabay.com/de/photos/fiat-fiat-500-auto-oldtimer-4322521/

Abb. 3: Bild von David Mark auf Pixabay: https://pixabay.com/de/photos/california-stra%C3%9Fe-autobahn-h%C3%BCgel-210913/

Abb. 6: Bild von Andrew Martin auf Pixabay; https://pixabay.com/de/photos/lamborghini-rad-auto-bremsen-650274/

Abb. 7: Bild von renategranade0 auf Pixabay; https://pixabay.com/de/photos/silhouette-fahrrad-fitness-frau-683751/

Abb. 8: unter Verwendung eines Bildes von Karen Arnold auf Pixabay; https://pixabay.com/de/illustrations/radfahrer-radfahren-fahrrad-zyklus-908942/