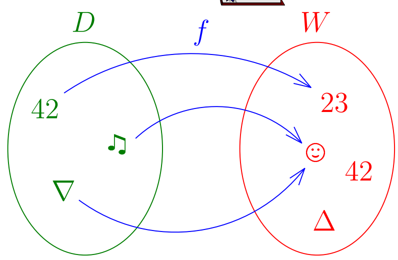
Funktion

Eine **Funktion f** ist eine Vorschrift,
die *jedem* Element ihrer **Definitionsmenge D**
genau ein Element aus ihrer **Wertemenge W** zuordnet.

Kurz schreiben wir dafür auch: $f\colon D \to W$

Wenn f dem Element 42 das Element 23 zuordnet,
schreiben wir dafür kurz: $f(42) = 23$



Sprechweisen: „Der **Funktionswert** von 42 ist 23.“ bzw. „f von 42 ist gleich 23.“

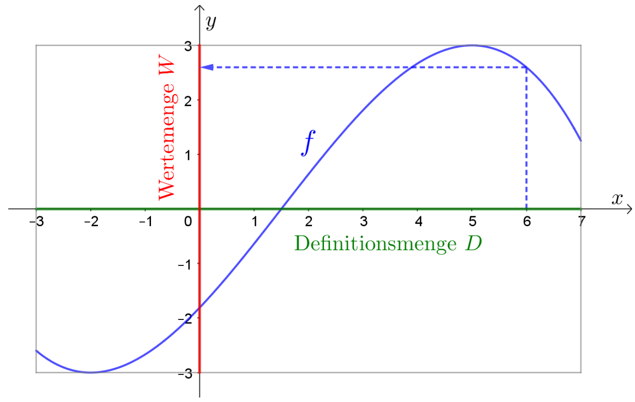
Die Definitionsmenge und Wertemenge können auch *unendlich* viele Elementen enthalten.

Zum Beispiel: $D = [-3; 7]$ und $W = [-3; 3]$

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt:

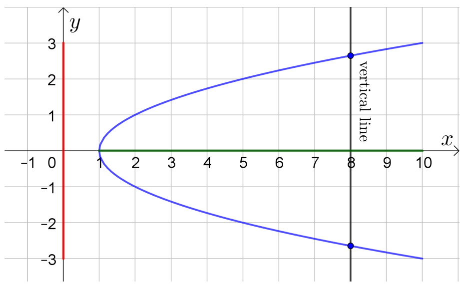
$$f(6) = 2{,}597...$$

Die eingezeichnete Kurve heißt Funktionsgraph.



Vertical line test

Begründe warum, die dargestellte Kurve *nicht* der Graph einer Funktion $f\colon [1; 10] \to [-3; 3]$ ist.



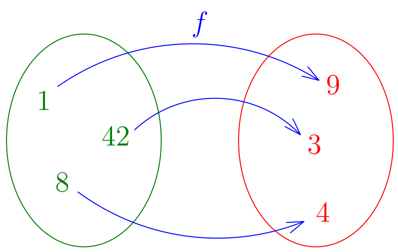
Es gibt eine Zahl in der Definitionsmenge $[1; 10]$,
der *nicht* genau ein Wert zugeordnet wird.

Tatsächlich werden jeder Zahl in $]1; 10]$ zwei Werte zugeordnet.

Umkehrfunktion

Links ist eine Funktion $f\colon \{1, 8, 42\} \to \{3, 4, 9\}$ dargestellt. Rechts haben wir die Pfeile umgedreht.

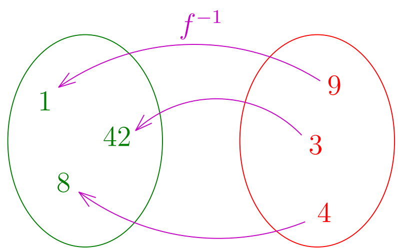
Dann wird jedem Element in $\{3, 4, 9\}$ *genau ein* Element in $\{1, 8, 42\}$ zugeordnet.



Diese umgekehrte Zuordnung

$$f^{-1}\colon \{3, 4, 9\} \to \{1, 8, 42\}$$

heißt **Umkehrfunktion** von f.



Die Funktion f hat die Definitionsmenge $\{1, 8, 42\}$ und die Wertemenge $\{3, 4, 9\}$.
Ihre Umkehrfunktion f^{-1} hat umgekehrt die Definitionsmenge $\{3, 4, 9\}$ und die Wertemenge $\{1, 8, 42\}$.

Vertauschen wir die Zeilen in der Wertetabelle von f, erhalten wir die Wertetabelle von f^{-1}.

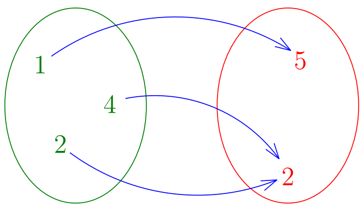
☺	1	8	42
f(☺)	9	4	3

$\star$	9	4	3
$f^{-1}(\star)$	1	8	42

Funktionen ohne Umkehrfunktion

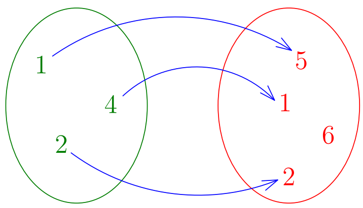
Die dargestellten Funktionen haben beide *keine* Umkehrfunktion. Warum?

a)



Es zeigt mehr als ein Pfeil auf den Wert 2.

b)



Es zeigt kein Pfeil auf den Wert 6.

Horizontal line test

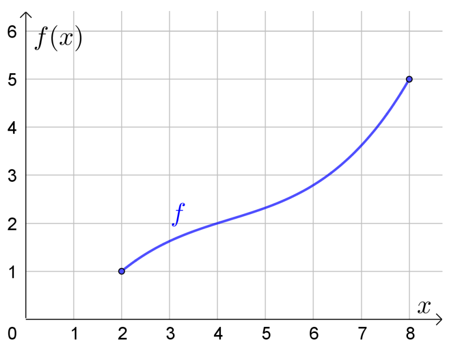
Der Graph einer Funktion $f\colon D \to W$ ist gegeben.

1) Ermittle die Definitionsmenge D von f.

2) Ermittle die kleinstmögliche Wertemenge W von f.

3) Hat die Funktion $f\colon D \to W$ eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to D$? Begründe deine Antwort.

a)

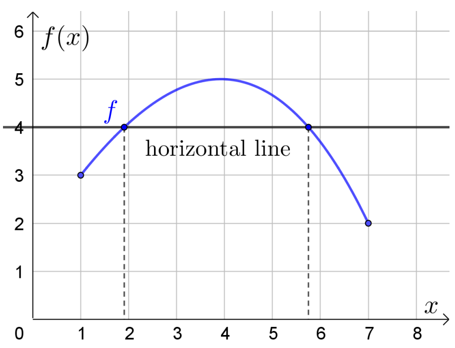


1) $D = [2; 8]$

2) $W = [1; 5]$

3) Ja, weil jeder Funktionswert in W *genau eine* zugehörige Stelle in D hat.

b)



1) $D = [1; 7]$

2) $W = [2; 5]$

3) Nein, weil zum Beispiel der Funktionswert 4 *zwei* zugehörige Stellen in D hat.

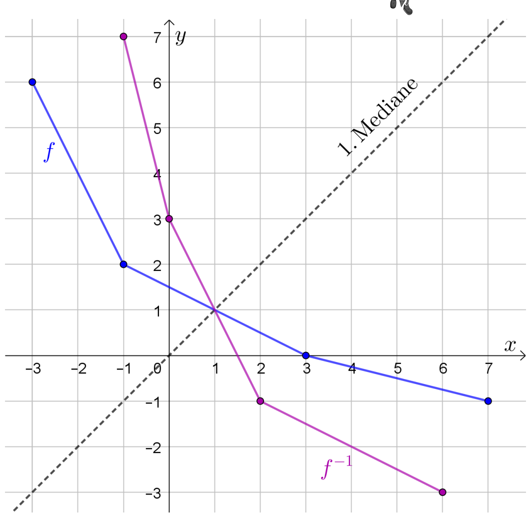
Spiegelung an 1. Mediane

$f\colon [-3; 7] \to [-1; 6]$ ist eine stückweise lineare Funktion. Rechts ist der Funktionsgraph von f dargestellt.

Die Funktion f hat eine Umkehrfunktion f^{-1}.

Wenn ein Punkt $(a \mid b)$ am Funktionsgraphen von f liegt, dann liegt der Punkt $(b \mid a)$ am Funktionsgraphen von f^{-1}. Ihre Graphen sind deshalb an der **1. Mediane** gespiegelt.

Zeichne rechts den Funktionsgraphen von f^{-1} ein.



Umformen ⇝ Umkehrfunktion

Du lässt einen Bleistift zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ aus 2 Meter Höhe über dem Boden fallen.
Die Flughöhe des Bleistifts kann näherungsweise durch die folgende Funktion h modelliert werden:

$$h(t) = 2 - 5 \cdot t^2$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$h(t) \ldots$ Höhe des Bleistifts über dem Boden in Metern

1) Wie lang dauert es, bis der Bleistift am Boden aufschlägt?
Gib den größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich D dieser Funktion h an.

$$h(t) = 0 \iff 5 \cdot t^2 = 2 \iff t^2 = \frac{2}{5} \overset{t\geq 0}{\iff} t = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}632\ldots$$

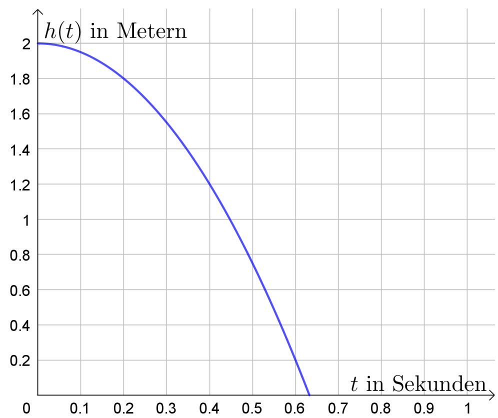
Der Bleistift schlägt nach 0,632... s am Boden auf. $D = [0; 0{,}632\ldots]$

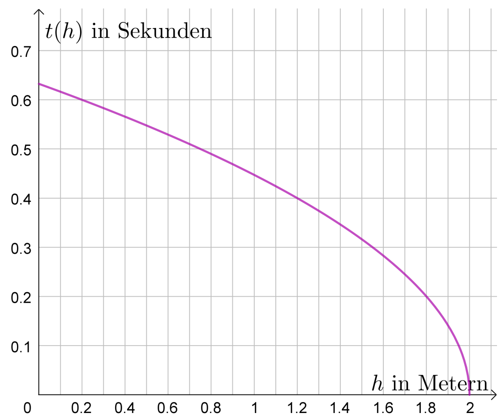
2) Wie lang dauert es, bis sich der Bleistift in 1 Meter Höhe über dem Boden befindet?

$$h(t) = 1 \iff 5 \cdot t^2 = 1 \iff t^2 = \frac{1}{5} \overset{t\geq 0}{\iff} t = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}447\ldots$$

Der Bleistift befindet sich nach 0,447... s noch 1 Meter über dem Boden.

Die Funktion h ordnet jedem Zeitpunkt t in D die entsprechende Höhe $h(t)$ in $[0\,\text{m}; 2\,\text{m}]$ zu.
Die Umkehrfunktion t ordnet jeder Höhe h in $[0\,\text{m}; 2\,\text{m}]$ den entsprechenden Zeitpunkt $t(h)$ in D zu.
Die Graphen der beiden Funktionen sind dargestellt:





Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion sind (wie immer) auch in dieser Aufgabe an der 1. Mediane gespiegelt. Da auf den Achsen aber *verschiedene* Einheiten sind (Sekunden bzw. Meter), zeichnen wir die Graphen in *verschiedene* Koordinatensysteme ein.

3) Forme die Gleichung $h = 2 - 5 \cdot t^2$ nach t um.

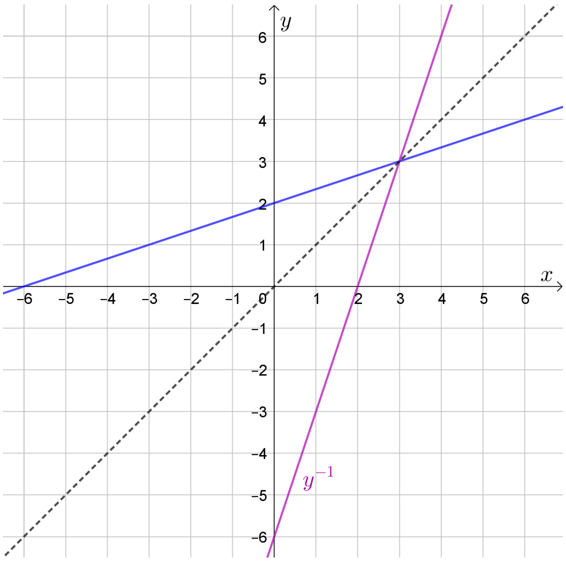
$$h = 2 - 5 \cdot t^2 \iff 5 \cdot t^2 = 2 - h \iff t^2 = \frac{2-h}{5} \overset{t\geq 0}{\iff} t = \sqrt{\frac{2-h}{5}}$$

4) Trage einen Funktionsterm der Umkehrfunktion t in das Kästchen ein.

$$t(h) = \sqrt{\frac{2-h}{5}}$$

Geraden & Lineare Funktionen

Im folgenden Koordinatensystem ist eine Gerade eingezeichnet.



1) Ermittle eine Gleichung der Gerade.

$$y = \frac{1}{3} \cdot x + 2 \qquad (1)$$

2) Die Gerade ist also der Graph der linearen Funktion y mit folgender Funktionsgleichung:

$$y(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 2 \qquad (2)$$

3) Forme die Gleichung (1) nach x um.

$$x = 3 \cdot (y - 2) = 3 \cdot y - 6 \qquad (3)$$

4) Gleichung (3) liefert eine Gleichung der Umkehrfunktion:

$$x(y) = 3 \cdot y - 6 \qquad (4)$$

> Beachte, dass zum Beispiel die Funktionsgleichungen
>
> $h(t) = 2 - 5 \cdot t^2$ bzw. $f(☺) = 2 - 5 \cdot ☺^2$
>
> den gleichen Funktionsgraphen haben, denn:
>
> **i)** Der Name einer Funktion (h bzw. f) hat *keinen* Einfluss auf den Funktionsgraphen.
>
> **ii)** Der Name des Arguments (t bzw. ☺) hat *keinen* Einfluss auf den Funktionsgraphen.

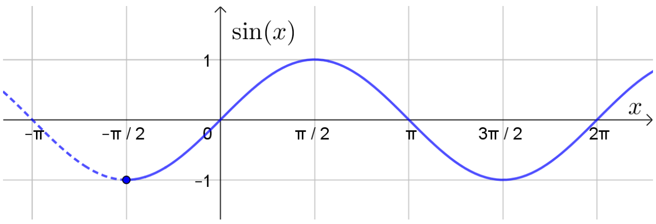
5) Benenne die Umkehrfunktion in (4) und ihr Argument wie folgt um:

$$y^{-1}(x) = 3 \cdot x - 6$$

6) Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion y^{-1} im Koordinatensystem oben ein.

Definitionsmenge einschränken

Die Sinusfunktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Ihr Funktionsgraph ist unten dargestellt.
Damit sie eine Umkehrfunktion hat, schränken wir die Definitionsmenge auf ein Intervall D ein.



Wir starten im Tiefpunkt $(-\frac{\pi}{2} \mid -1)$.

Trage die größte passende Zahl ein:

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$$

Die Umkehrfunktion „Arcussinus“ wird deshalb neben arcsin auch mit $\sin^{-1}$ abgekürzt.