Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Wintersemester 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 13 - Abgabetermin: Mittwoch, 29.01.2014, in der Vorlesung

Exercises for the course Quantum Mechanics II

Winter term 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Sheet 13 - Deadline: Wednesday, 29.01.2014, during the lecture

Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

General hint: Whenever possible, always make clear sketches that include essential length and frequency scales, periodicities etc. Also think about other possible questions.

1. Lindblad-Mastergleichung

Ein schwach gedämpfter harmonischer Oszillator (mit $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$) kann durch folgende Lindblad-Mastergleichung für die Dichtematrix beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \Gamma\left\{\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}$$

Falls nur $\rho_{00}, \rho_{11}, \rho_{01}$ und ρ_{10} ungleich Null sind: Wie sehen die Gleichungen für diese Matrixelemente aus? Was ist die Zerfallsrate für das Ausserdiagonalelement ρ_{01} ("Dephasierungsrate") ? Wie sieht allgemein die Gleichung für ρ_{nn} aus, wenn $\hat{\rho}$ beliebig ist?

1. Lindblad Master equation

A weakly damped harmonic oscillator (with $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$) can be described by the following Lindblad master equation for the density matrix:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \Gamma\left\{\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}$$

If only $\rho_{00}, \rho_{11}, \rho_{01}$ and ρ_{10} are different from zero: What do the equations for these matrix elements look like? What is the decay rate for the off-diagonal element ρ_{01} ("dephasing rate") ? In the general case of an arbitrary $\hat{\rho}$, what does the equation for the matrix element ρ_{nn} look like?

2. Streuquerschnitt

Wenn auf ein Hindernis eine konstante Teilchenstromdichte j_{in} einfällt, dann wird in einen vorgegebenen kleinen Raumwinkelbereich $d\Omega$ eine gewisse Zahl $\dot{N}$ von Teilchen pro Sekunde gestreut. Der Streuquerschnitt $d\sigma$ ist definiert als diejenige Fläche, welche pro Sekunde gerade genauso viele Teilchen empfängt: $j_{\text{in}}d\sigma \equiv \dot{N} = j_{\text{out}}r^2 d\Omega$.

(a) Die Stromdichte für eine ebene Welle ψ ist $\vec{j} = |\psi|^2\,\vec{v}$. Gehen Sie aus von der Streurate nach Fermis Goldener Regel (die hier "Bornsche Näherung" genannt wird). Betrachten Sie $\dot{N} = \sum_{\vec{k}} \Gamma_{\vec{k}\leftarrow\vec{k}_0}$, wobei die Summe über alle $\vec{k}$ im passenden Winkelbereich gehen soll. Wandeln Sie die $\sum$ in ein Integral um, um am Ende den "differentiellen Streuquerschnitt" $d\sigma/d\Omega$ zu finden!

(b) Falls Störungsrechnung nicht mehr anwendbar ist, kann man eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung betrachten, die aus einfallender ebener Welle und gestreuter Welle besteht. Im Fernfeld (weit vom Hindernis) sieht diese so aus:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 \left[e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

θ und φ sind die üblichen sphärischen Winkelkoordinaten. Berechnen Sie wieder j_{in} und j_{out}, um $d\sigma/d\Omega$ zu finden!

2. Scattering cross section

When a constant particle current density j_{in} hits some obstacle, a certain number of particles per second $\dot{N}$ will be scattered into a given small solid angle $d\Omega$. The scattering cross section $d\sigma$ is defined as the surface through which the same number of particles pass per second: $j_{\text{in}} d\sigma \equiv \dot{N} = j_{\text{out}} r^2 d\Omega$.

(a) The current density for a plane wave ψ is given by $\vec{j} = |\psi|^2 \vec{v}$. Using the scattering rate as calculated from Fermi's Golden rule (called the Born approximation in this context), consider $\dot{N} = \sum_{\vec{k}} \Gamma_{\vec{k} \leftarrow \vec{k}_0}$, where the sum over $\vec{k}$ runs over the applicable range of solid angles. Rewrite the sum $\sum$ as an integral in order to find the "differential cross section" $d\sigma/d\Omega$.

(b) If the scattering is so strong that perturbation theory breaks down, one may consider the trial solution for the time-dependent Schrödinger equation given below. It is constructed as a superposition of the incident plane wave and directional scattered waves. In the far field (away from the obstacle) it looks like:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 \left[e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

where θ and φ are the usual spherical coordinates. Calculate j_{in} and $j_{\text{out}}$to again find $d\sigma/d\Omega$.

Hausaufgabe (Home work exercise)

3. Lineare Antwort eines harmonischen Oszillators

Auf einen harmonischen Oszillator wirke eine Kraft $F(t)$. Verwenden Sie die Kubo-Formel, um die Antwort $\langle \hat{x}(t) \rangle$ zu berechnen. Sie werden sehen, dass das Ergebnis nicht von dem Zustand abhängt, in dem der Oszillator sich befindet. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Auslenkung $x(t)$ eines klassischen Oszillators, der durch eine externe Kraft $F(t)$ getrieben wird! Diese Beobachtung (sowie die Tatsache, dass das Resultat für beliebig starke Kräfte korrekt bleibt) ist eine Spezialität des harmonischen Oszillators.

3. Linear response for a harmonic oscillator

Consider a harmonic oscillator subject to a time-dependent force $F(t)$. Use the Kubo-formula to calculate the response$\langle \hat{x}(t) \rangle$. You will find that the result does not depend on the state of the oscillator. Compare the result to the excursion $x(t)$ of a classical oscillator that is driven by an external force $F(t)$. The result you obtain (as well as the fact the result remains correct for an arbitrary force) is a special feature of the harmonic oscillator.

4. Präzession eines Spins

Es sei

$$\hat{H} = \vec{b}\hat{\vec{S}}$$

(a) Leiten Sie für den Fall $\vec{b} = \omega \hat{e}_z$ noch einmal explizit die Heisenberg-Bewegungsgleichung für $\hat{S}_x(t)$, $\hat{S}_y(t)$, und $\hat{S}_z(t)$ her.

(b) Lösen Sie die Gleichungen für $\hat{S}_{x,y}$ durch den Ansatz $\hat{S}_x(t) = \cos\varphi \hat{S}_x(0) + \sin\varphi \hat{S}_y(0)$ und $\hat{S}_y(t) = \cos\varphi \hat{S}_y(0) - \sin\varphi \hat{S}_x(0)$.

(c) Was ist also $e^{i\theta\hat{S}_z/\hbar}\hat{S}_x e^{-i\theta\hat{S}_z/\hbar}$?

4. Spin precession

Consider

$$\hat{H} = \vec{b}\hat{\vec{S}}$$

(a) Derive the Heisenberg equations of motion for $\hat{S}_x(t)$, $\hat{S}_y(t)$, and $\hat{S}_z(t)$ for the case in which $\vec{b} = \omega\hat{e}_z$.

(b) Solve the equations for $\hat{S}_{x,y}$ using the Ansatz $\hat{S}_x(t) = \cos\varphi \hat{S}_x(0) + \sin\varphi \hat{S}_y(0)$ and $\hat{S}_y(t) = \cos\varphi \hat{S}_y(0) - \sin\varphi \hat{S}_x(0)$.

(c) Evaluate $e^{i\theta\hat{S}_z/\hbar}\hat{S}_x e^{-i\theta\hat{S}_z/\hbar}$.