Übungen zur Vorlesung Statistische Physik und Thermodynamik

Sommersemester 2015, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 3 - Abgabe: Dienstag, 5.5.2015

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

1. Entartung und freie Energie

Ein System bestehe aus N Zuständen mit Energie $\epsilon_0 = 0$ und M Zuständen der Energie $\epsilon_1 > 0$.
a) Bestimmen Sie Zustandssumme und freie Energie des Systems.
b) Bestimmen Sie die Entropie des Systems und diskutieren Sie den Grenzfall verschwindender und den Fall großer Temperatur. Skizzieren Sie $S(T)$.
Betrachten Sie im folgenden $N = 1$.
c) Berechnen Sie die mittlere Energie $E = \langle H \rangle$ des Systems und skizzieren Sie ihre Temperaturabhängigkeit für $M = 1$ und $M \gg 1$.

2. Paramagnet

Betrachten Sie einen Spin $S \geq \frac{1}{2}\hbar,\ 2S/\hbar \in \mathbb{N}$. In einem Magnetfeld $B = B_z$ in z-Richtung kann die z-Komponente des Spins die $2(S/\hbar) + 1$ Werte $-S$, $(-S+1), ..., S$ annehmen. Die Energie des Spins im Magnetfeld ist dann $E_{\sigma_i} = -g\mu_B B_z(S_z/\hbar) =: -\sigma_i \Delta$ mit $\sigma_i = -S/\hbar,\ -(S/\hbar) + 1, ..., S/\hbar$.
a) Geben Sie den Wer von Δ an. Bestimmen Sie die Zustandssumme Z.
b) Finden Sie die Magnetisierung, bzw. $\langle (S_z/\hbar) \rangle$ und skizzieren Sie $\langle S_z/\hbar \rangle$ als Funktion der Temperatur für verschiedene Werte von S. Bestimmen Sie dazu den Grenzwert für $T = 0$ und vergleichen Sie mit dem 2-Niveausystem, um das qualitative Tieftemperaturverhalten zu verstehen.
c) Für große Temperaturen kann man eine einfache Abschätzung für die Magnetisierung finden, indem man die Besetzungwahrscheinlichkeiten der Zustände, $P_{\sigma_i} = P(E_{\sigma_i})$, im Grenzfall großer Temperatur näherungsweise für kleine Werte $\Delta / k_B T$ ausrechnet. (Hinweis: Taylorentwicklung der Boltzmannfaktoren)

3. Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Die Energiezustände eines harmonischen Oszillators in zwei Dimensionen $x,\ y$ sind durch

$$E(n_x,\ n_y) = \hbar\omega(n_x + n_y) = \hbar\omega m$$

gegeben.
a) Geben Sie für die möglichen Energien E_m mit $m = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ die Entartung g_m an.
Berechnen Sie die Zustandssumme durch Summation über die Energien E_m.
b) Einfacher kann die Zustandssumme durch Summation über die durch $(n_x,\ n_y)$ charakterisierten Zustände berechnet werden. Zeigen Sie, dass die Zustandssumme faktorisiert und berechnen Sie sie.
c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie und skizzieren Sie sie in Abhängigkeit von der Temperatur.