Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 9 Abgabe: 13.01. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 19 : Domänengrenzen

Die Zustandssumme des ferromagnetischen 1D-Ising Modells mit periodischen Randbedingungen,

$$E = -2J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad \text{mit} \quad J > 0\,; \sigma_i = \pm 1$$

kann auch mit anderen Methoden als der Transfermatrixmethode bestimmt werden.
Ein Zustand des Spinsystems kann statt durch die Spinkonfiguration $\{\sigma_i\} = \{\sigma_1,\, \sigma_2,\, \ldots \sigma_N\}$ auch durch die Position von Domänenwänden eindeutig gekennzeichnet werden. Als Domänenwand bezeichnet man dabei eine Verbindung $(i,\, i+1)$ zwischen zwei Spins, die nicht parallel ausgerichtet sind, also $\sigma_i \sigma_{i+1} = -1$.
a) Bestimmen Sie die Energie eines Zustands mit n Domänenwänden. Wieviele verschiedene Zustände mit $n = 0,\, 1,\, 2, \ldots$ Domänenwänden gibt es? (Hinweis: Beachten Sie die periodischen Randbedingungen).
b) Zeigen Sie, dass die Zustandsumme als

$$Z = 2e^{-\beta E_0} \sum_{n=0,\,2,\,4,\ldots} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} e^{-\beta 4Jn} \qquad \text{mit} \quad E_0 = -2JN$$

ausgedrückt werden kann.
c) Werten Sie die Zustandssumme aus, indem sie die Summe über alle geraden n durch einen extra Faktor $[1 + (-1)^n]$ in eine Summe über alle n umwandeln (Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass N gerade ist). Zeigen Sie die Äquivalenz zum Ergebnis der Transfermatrixmethode.

Aufgabe 20 : Ordnungsparameter

Das dimensionslose Funktional der freien Energie für einen reellen Ordnungsparamter $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix}$ sei durch $f = (\vec{\sigma}^2 - \epsilon)^2 - b\sigma_x$ mit reellen Parametern $\epsilon,\, b > 0$ gegeben.

a) Betrachten Sie zunächst den Fall $b = 0$. Bestimmen Sie die Werte des Ordnunsparameters $\vec{\sigma}_0$ für die f minimiert wird und skizzieren Sie f in der $\sigma_x,\, \sigma_y$-Ebene. Entwickeln Sie f bis zur zweiten Ordnung um $\vec{\sigma}_0$.
b) Betrachten Sie nun den Fall $b \neq 0$. Bestimmen Sie wiederum die Ordnunsparameter $\vec{\sigma}_0^{\pm}$, für die f lokal minimiert wird für kleine b (d. h. in niedrigster Ordnung in b). Skizzieren Sie f in der $\sigma_x,\, \sigma_y$-Ebene und kennzeichnen Sie den Ordnungsparameter für den f sein absolutes Minimum annimmt. Berechnen Sie die Ableitungen, die zur Entwicklung von f bis zur zweiten Ordnung um $\vec{\sigma}_0^{\pm}$ benötigt werden.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 19 : Wärmekapazität des Ising Modells in Molekularfeldnäherung *(7 Punkte)*

Wir betrachten erneut die Molekularfeldnäherung für das Ising-Modell,

$$E = -2J \sum_{\langle l,i \rangle} \sigma_l \sigma_i \quad \text{mit} \qquad J > 0 \; .$$

a) Drücken Sie nun jeden Spin durch die mittlere Magnetisierung $\bar{\sigma}$ und Fluktuationen aus, $\sigma_l = \bar{\sigma} + (\sigma_l - \bar{\sigma})$. Betrachten Sie nun obigen Ausdruck für die Energie und vernachlässigen Sie Terme in zweiter Ordnung in den Fluktuationen.
Zeigen Sie, dass für den Mittelwert der Energie der Ausdruck

$$\langle E \rangle = -J\bar{\sigma}^2 2dN$$

gefunden wird.
b) Bestimmen Sie aus obigem Ausdruck für die Energie die Wärmekapazität als Funktion der mittleren Magnetisierung $\bar{\sigma}$ (die durch die bekannte Selbstkonsistenzgleichung bestimmt ist). Finden Sie aus der Selbstkonsistenzgleichung die Magnetisierung für kleine Temperaturen und daraus die Wärmekapazität. Welchen Wert hat die Magnetisierung (und C_V) oberhalb der Übergangstemperatur T_c? Bestimmen Sie C_V für $T \nearrow T_c$ und skizzieren Sie die komplette Temperaturabhängigkeit von C_V.

Hausaufgabe 20 : Wärmekapazität des 1D-Ising Modells *(5 Punkte)*

In der Vorlesung hatten wir die Zustandssumme für das 1D-Ising Modell (ohne äußeres Feld) gefunden.
a) Zeigen Sie allgemein, wie die Wärmekapazität $C_V = \frac{\partial E}{\partial T}$ aus Z bestimmt wird.
b) Betrachten Sie die Zustandssumme des 1D-Ising Modells für große N. Bestimmen Sie daraus C_V.
c) Untersuchen Sie die Grenzfälle großer und kleiner Temperaturen und skizzieren Sie Ihre Ergebnisse.