ETH MECHANIK II FORMELSAMMLUNG

1. Grundlagen

1.1. Einheitskreis $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

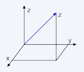
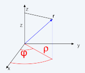
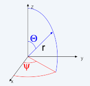
1.1.1. Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}^3$$

$a \times b = -b \times a$

$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\measuredangle(a,b)) \,\hat{=}$ Fläche des Parallelogramms

1.2. Koordinatensysteme - Transformation

	kartesisch	zylindrisch	sphärisch
kartesisch		$x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$ $z = z$	$x = r\sin\theta\cos\psi$ $y = r\sin\theta\sin\psi$ $z = r\cos\theta$
zylindrisch	$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ $z = z$		$\rho = r\sin\theta$ $\varphi = \psi$ $z = r\cos\theta$
sphärisch	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\psi = \arctan\frac{y}{x}$	$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta = \arctan\frac{\rho}{z}$ $\psi = \varphi$	

1.3. Allgemein

Ortsvektor: $\underline{r}(t)$

Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{s}\cdot\underline{\tau}$

$\underline{\tau}$ tangentialer Einheitsvektor an Bahnkurve

Beschleunigung: $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$

Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}(t)| = |\dot{\underline{r}}(t)|$

Tang. Einheitsv.: $\underline{\tau} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$

1.4. Kartesisch

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z$

Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{e}_x + \dot{y}(t)\underline{e}_y + \dot{z}(t)\underline{e}_z$

Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}(t)| = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z$

1.5. Zylindrisch

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = \rho(t)\underline{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t)\underline{e}_z$

Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}(t)\underline{e}_\varphi + \dot{z}(t)\underline{e}_z$

Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}(t)| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$

Einheitsv. in Abh.: $\underline{e}_\rho = \cos\varphi\underline{e}_x + \sin\varphi\underline{e}_y$

$\underline{e}_\varphi = -\sin\varphi\underline{e}_x + \cos\varphi\underline{e}_y$

$\underline{e}_z \to$ konstant

1.6. Sphärisch

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = r(t)\underline{e}_r(\theta(t), \psi(t))$

Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{r}(t)\underline{e}_r + r\dot{\theta}(t)\underline{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\psi}\underline{e}_\psi$

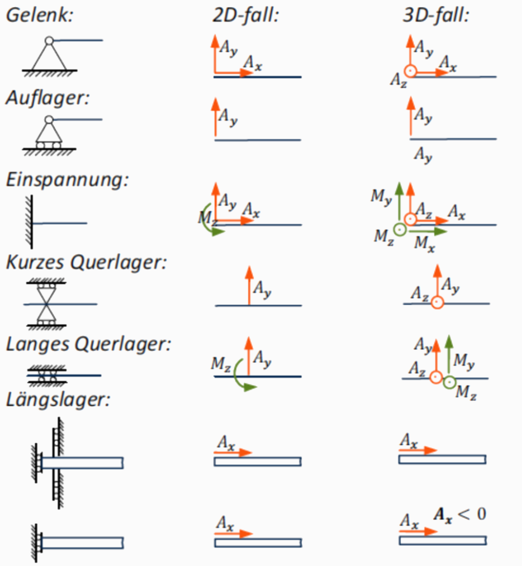
Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}(t)| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin(\theta)\dot{\psi})^2}$

Einheitsv. in Abh.: $\underline{e}_r = \sin\theta\cos\psi\underline{e}_x + \sin\theta\sin\psi\underline{e}_y + \cos\theta\underline{e}_z$

$\underline{e}_\theta = \cos\theta\cos\psi\underline{e}_x + \cos\theta\sin\psi\underline{e}_y - \cos\theta\underline{e}_z$

$\underline{e}_\psi = -\sin\psi\underline{e}_x + \cos\psi\underline{e}_y$

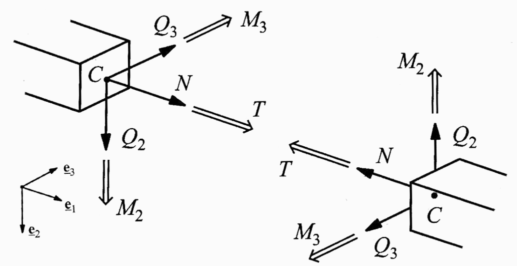
1.7. Lagerbindungen und Lagerkräfte



2. Beanspruchung in geraden Balken

2.1. Grundlagen

Wirken auf einen Stab Kräfte entstehen innerhalb des Stabes folgende Beanspruchungskomponenten (3D $\to$ 6 Stück):



Sym.:	Name:	Beanspruchung auf:
N	Normalkraft	Zug ($N > 0$) oder Druck ($N < 0$)
Q_2, Q_3	Querkräfte	Schub
T	Torsionsmoment	Torsion
M_2, M_3	Biegemomente	Biegung

Bestimmung der Beanspruchung

1. Lagerkräfte am Gesamtsystem bestimmen
2. Körper schneiden, Laufvariable und Schnittgrössen einführen
3. Gleichgewichtsbedingungen für das abgegrenzte System aufstellen, Schnittgrössen berechnen, Momentenbedingung bezüglich Schnittpunkt!
4. Je nach Aufgabenstellung, Beanspruchungsdiagramm zeichnen

2.2. Differentialbeziehungen

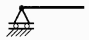
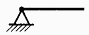
Differentielle Beziehungen stellen Beziehung zwischen Querkraft, Moment und Belastung dar. Diese gelten für gerade Stabträger. q steht für Kraftverteilung.

$$Q_y' = \frac{d}{dx}Q_y = -q_y \qquad Q_z' = \frac{d}{dx}Q_z = -q_z$$

$$M_z' = \frac{d}{dx}M_z = -Q_y \qquad M_y' = \frac{d}{dx}M_y = Q_z$$

$$M_z'' = \frac{d^2}{dx^2}M_z = q_y \qquad M_y'' = \frac{d^2}{dx^2}M_y = -q_z$$

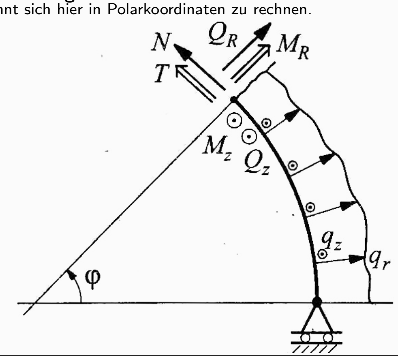
Wichtig: Niemals über unstetige Belastungen (Einzelkräfte und Momente) integrieren. Bestimmung der Integrationskonstanten aus folgenden Randbedingungen:

Lagerart	Symbol	Q	M	N
-Auflager		Q≠0	M=0	N=0
-Festlager		Q≠0	M=0	N≠0
-Einspannung		Q≠0	M≠0	N≠0
-Freies Ende		Q=0	M=0	N=0
-Gelenk		Q≠0	M=0	N≠0

3. Beanspruchung in gekrümmten Balken

3.1. Grundlagen

Es lohnt sich hier in Polarkoordinaten zu rechnen.



Sym.:	Name:	Beanspruchung auf:
N	Normalkraft	Zug ($N > 0$) oder Druck ($N < 0$)
Q_R, Q_z	Querkräfte	Schub
T	Torsionsmoment	Torsion
M_R, M_z	Biegemomente	Biegung

Bestimmung der Beanspruchung

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Balken schneiden und neue Laufvariable φ einführen
3. Beanspruchungskomponenten einführen
4. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen. Bei Integration eine neue Integrationsvaribale α einführen und von 0 bis φ integrieren

3.2. Differentialbeziehungen

Die Vorzeichen stehen in direkter Beziehung mit der Richtung der eingeführten Schnittgrössen. Diese gelten für gekrümmte Balken.

$$Q_r' - N + R\cdot q_r = 0$$

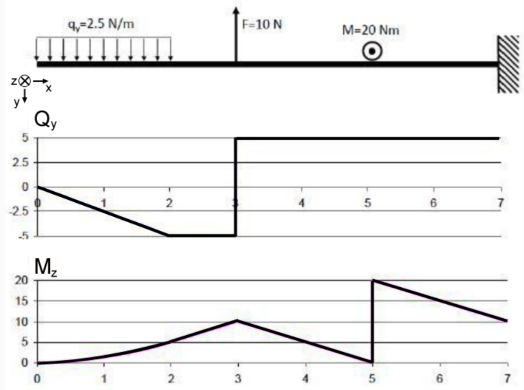
$$Q_z' + R\cdot q_z = 0$$

$$M_r' - T + R\cdot Q_z = 0$$

$$M_z' - R\cdot Q_r = 0$$

4. Beanspruchungdiagramme

Lastfall:	Einfl. auf Querkraft:	Einfl. auf Biegemom.:
Einzelmoment	-	Sprung
Einzelkraft	Sprung	Linear/Knick
Gleichförm. Kraftvert.	Linear	Quadratisch
Dreiecksverteilung	Quadratisch	Kubisch



4.1. Lösungsmethoden

Knotengleichgewicht

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Gleichgewichtsbedigungen an jedem Knoten aufstellen. Stabkräfte als Zugkräfte einführen (Pendelstütze)
3. Gleichgewichtssysteme auflösen $\to$ Stabkräfte S_i
4. $S > 0 \to$ Belastung auf Zug
   $S < 0 \to$ Belastung auf Druck

Dreikräfteschnitt

1. Lagerkräfte bestimmen
2. an einer geeigneten Stelle max. 3 Stäbe durchschneiden und Stabkräfte S_i einführen
3. Momentengleichgewicht am Schnittpunkt zweier unbekannten Stabkräfte $\to$ Berechnung der dritten Stabkraft
4. Komponentenbedingung $\to$ Bestimmung der beiden anderen unbekannten Stabkräfte

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

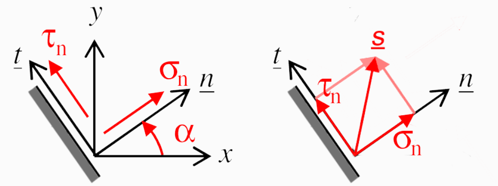
1. Stab entfernen und Stabkraft S_i als Zugkraft (+) einführen
2. zulässige virtuelle Bewegung einführen, d.h. eine Bewegung einführen, die mit den kinematischen Bedingungen (Lager) des Fachwerks verträglich ist
3. Bestimmung der Geschwindigkeit in den Knoten, in denen Kräfte wirken
4. Aus dem Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL) folgt: $P = 0 \to$ Berechnung der unbekannten Stabkraft S_i
   Wichtig immer nur einen Stab entfernen!

5. Spannungen

5.1. Definition σ

Spannung σ ist Definiert als Kraft pro Fläche: $[\sigma] = Pa = \frac{N}{m^2}$

5.2. Spannungsvektor $\underline{s}$



Der Körper wird geschnitten, der Spannungsvektor $\underline{s}$ wird in die Normalspannung $\underline{\sigma}_n$ und die Schubspannung $\underline{\tau}$ geteilt.

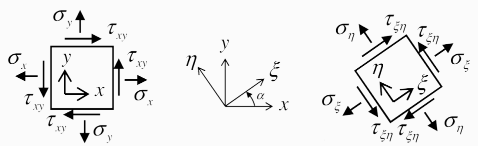
$\underline{s}$	$= \underline{s}(\underline{x}, \underline{n})$	$\underline{x}$ Ortsvektor, $\underline{n}$ Orientierung
	$= \sigma_n \cdot \underline{n} + \tau \cdot \underline{t}$	$\underline{n}$ und $\underline{t}$ sind normiert
	$= \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}$	$\underline{n}$ ist normiert
σ_n	$= (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}$ $= \underline{s} \cdot \underline{n}$	$\underline{n}$ **ist normiert** und σ **nur Betrag**
τ	$= (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}$ $= \underline{s} \cdot \underline{t}$	$\underline{n}$ und $\underline{t}$ **sind normiert** und σ **nur Betrag**

5.3. Spannungstensor 2D $\underline{\underline{T}}$

Ein Spannungstensor ist definiert durch einen Spannungsvektor $\underline{s}$ von drei senkrecht aufeinanderstehenden Flächenelemente, in einem Punkt. D.h. sie sind definiert in einem Koordinatensystem.

Erinnerung: $\boxed{\underline{s}(\underline{n}) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}}$

Koordinatentransformation eines 2D-Tensors:



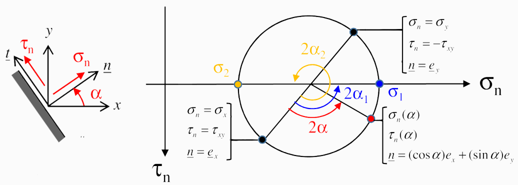
$$\underline{\underline{T}}_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{T}}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_\eta \end{bmatrix}$$

$$\sigma_\xi = (\cos\alpha)^2\sigma_x + (\sin\alpha)^2\sigma_y + 2(\sin\alpha)(\cos\alpha)\tau_{xy}$$
$$\sigma_\eta = (\sin\alpha)^2\sigma_x + (\cos\alpha)^2\sigma_y - 2(\sin\alpha)(\cos\alpha)\tau_{xy}$$
$$\tau_{\xi\eta} = (\sigma_y - \sigma_x)(\sin\alpha)(\cos\alpha) + \tau_{xy}[(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)]$$

5.4. Normal- & Schubspannungen 2D

$$\sigma_n(\alpha) = (\cos\alpha)^2\sigma_x + (\sin\alpha)^2\sigma_y + 2(\sin\alpha)(\cos\alpha)\tau_{xy}$$
$$\tau_n(\alpha) = (\sigma_y - \sigma_x)(\sin\alpha)(\cos\alpha) + \tau_{xy}[(cos\alpha)^2 - (sin\alpha)^2]$$

5.5. Mohrscher Spannungskreis (hier 2D)



Bemerkung: **Positive Normalspannungen** (Zug, $\sigma > 0$) wirken in Richtung der Flächennormale $\underline{n}$
Positive Schubspannungen $\tau > 0$ wirken in Richtung von $\underline{t}$ (Rechtssystem: $\underline{e}_z \cdot \underline{n} = 0$ und $\underline{t} = \underline{e}_z \times \underline{n}$)

5.6. Hauptspannungen 2D

Mit der folgender Formel kann man die Hauptspannungen ohne Hauptrichtungen errechnen, gilt für 2D:

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\tau_{xy})^2}$$
$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

5.7. Hauptrichtungen 2D

Winkel der 1. HR:	**1. HR in Bereich:**	**2. HR:**
$\tan(2\alpha_A) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$	$0 \leq \alpha_A \leq 90°$	$\alpha_B = \alpha_A + 90$

5.8. Maximale Schubspannung 2D

Gilt bei ebenem Spannungszustand oder wenn $\underline{z}$ Hauptrichtung:

$$\tau_{max} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \alpha_{\tau_{max}} = \alpha_A \pm 45°$$

5.9. Hauptspannungen 3D

Spezialfall: eine Hauptachse ist bekannt → 2D Problem lösen
Allgemeiner Fall: Eigenwertproblem lösen:

→ Eigenwerte $\lambda_{1,2,3}$ sind Hauptspannungen
→ Die dazugehörigen Eigenvektoren $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ hier $\underline{n}_i$ sind Hauptrichtungen, sie müssen ein Rechtssystem ergeben

$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}_i = \sigma_i \cdot \underline{n}_i$ wird zu: $\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \cdot \underline{\underline{I}}) = 0$
$\lambda_{1,2,3}$ sind Eigenwerte
Eigenvektor $\underline{e}_1$ durch: $(\underline{\underline{T}} - \lambda_1 \cdot \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{v} = 0$

Mit folgenden Formeln, lässt sich das Eigenwertproblem gut lösen (σ_I bis σ_{III} sind die Gundinvarianten des Spannungstensors):

$$\sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$\sigma_{II} = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$
$$\sigma_{III} = \det(\underline{\underline{T}})$$

Grundinvarianten müssen in diese charakteristische Gleichung eingesetzt werden **(Analog für Dehnungen)**. Werte für λ sind Hauptspannungen:

$$\lambda^3 - \lambda^2\sigma_I - \lambda\sigma_{II} - \sigma_{III} = 0$$

5.10. Maximale Schubspannung 3D

$\tau_{max} = \frac{1}{2}[max(\sigma_i) - min(\sigma_i)]$ mit Hauptspannungen σ_i

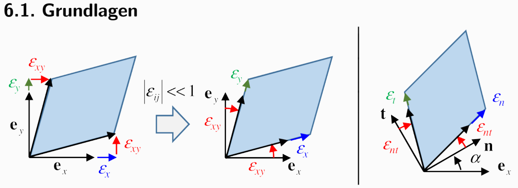
5.11. Spannungsfeld

Wenn Komponenten vom Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ als Funktion von x, y, z gegeben sind, gelten folgende Beziehungen. **Ziel:** Normalspannungsverteilung zu finden. f steht dabei für die Raumkraftdichte z.B. Gewichtskraft:

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,x} + \tau_{xz,x} + f_x = 0$$
$$\tau_{yx,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + f_y = 0$$
$$\tau_{zy,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z = 0$$

6. Verzerrungen

6.1. Grundlagen



ε_x	Dehnung in $\underline{x}$-Richtung	+: Dehnung, −: Kürzung
ε_{xy}	Schubverzerrung	+: Winkelverkleinerung, −: Winkelvergrösserung
$\gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_{xy}$	Schubwinkel	

$\varepsilon_x(\alpha) = (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}$	$\underline{n}$ und $\underline{t}$ **normiert**
$\varepsilon_{xy}(\alpha) = (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}$	

6.2. Verschiebungsfeld

Ein Körper wird in eine neue, deformierte Ruhelage überführt. Diese Deformation kann beschrieben werden durch das Verschiebungsfeld.

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

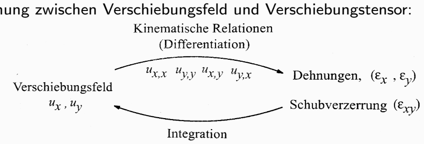
6.3. Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}$

Der Verzerrungstensor enthält alle Infos zur Deformation in einem Punkt.

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} u_{x,x} & \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) & \frac{1}{2}(u_{x,z} + u_{z,x}) \\ \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) & u_{y,y} & \frac{1}{2}(u_{y,z} + u_{z,y}) \\ \frac{1}{2}(u_{x,z} + u_{z,x}) & \frac{1}{2}(u_{y,z} + u_{z,y}) & u_{z,z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Beziehung zwischen Verschiebungsfeld und Verschiebungstensor:



Vorzeichenkonvention für Mohrkreis:

$$"[\underline{\underline{T}}]" = \begin{bmatrix} HS & + & - \\ - & HS & + \\ + & - & HS \end{bmatrix}$$

7. Lineares Stoffverhalten

7.1. Einachsiger Spannungszustand

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung kann im linearelastischen, Isotropischen Fall mithilfe der Materialkonstanten E-Modul E und Querdehnungszahl v dargestellt werden:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -v\frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot (\Delta T)$$

E	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$	Beziehung zwischen σ_x und ε_x
v	Querdehnungszahl	$[-]$	Poissonzahl, Materialkonstante, 0-0.5
G	Schubmodul	$[\frac{N}{m^2}]$	Bez. zw. τ_{xy} & ε_{xy}: $G = \frac{\tau_{xy}}{2\varepsilon_{xy}}$
K	Kompressionsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$	Bez. zw. Volumendehnung und Druck

7.2. Räumlicher Spannungszustand

Formeln für Dehnungen, mit Temperaturänderungskoeffiziente:

$$\varepsilon_x = \tfrac{1}{E}[\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \cdot \Delta T \qquad \varepsilon_{xy} = \tfrac{1}{2G}\tau_{xy}$$
$$\varepsilon_y = \tfrac{1}{E}[\sigma_y - v(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \cdot \Delta T \qquad \varepsilon_{xz} = \tfrac{1}{2G}\tau_{xz}$$
$$\varepsilon_z = \tfrac{1}{E}[\sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \cdot \Delta T \qquad \varepsilon_{yz} = \tfrac{1}{2G}\tau_{yz}$$

Formeln für Spannungen, mit Temperaturänderungskoeffiziente:

$$\sigma_x = \tfrac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_x + v(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] - \tfrac{E}{(1-2v)}\alpha\Delta T$$
$$\sigma_y = \tfrac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_y + v(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] - \tfrac{E}{(1-2v)}\alpha\Delta T$$
$$\sigma_z = \tfrac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_z + v(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] - \tfrac{E}{(1-2v)}\alpha\Delta T$$

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \qquad K = \frac{E}{3}(1-2v)^{-1}$$

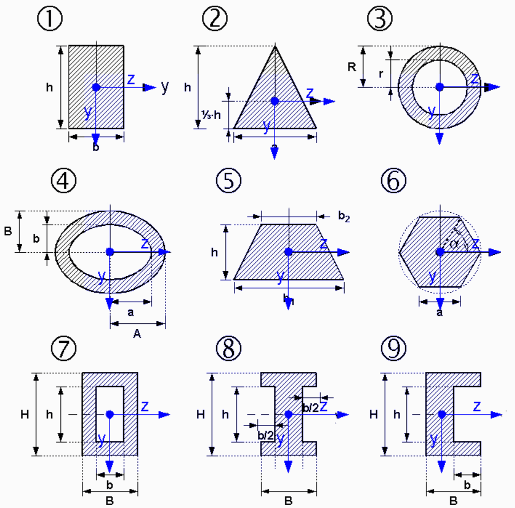
Längenänderung durch Temperaturänderung: $\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$

8. Balkentheorie für spez. Biegung

8.1. Flächenträgheitsmoment I_y, I_z

Ein Fl.Tr.Mom. ist das Moment, das durch die Drehung eines Querschnitts bezügl. einer Achse ausgelöst wird.

$$\boxed{I_y = \iint_A z^2 dA} \qquad \boxed{I_z = \iint_A y^2 dA}$$



	I_z	I_y
1	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{12}$
2	$\frac{a \cdot h^3}{36}$	$\frac{h \cdot a^3}{36}$
3	$\frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$	$= I_y$
4	$\frac{\pi}{4} \cdot (AB^3 - ab^3)$	$\frac{\pi}{4} \cdot (BA^3 - ba^3)$
5	$h^3 \frac{(b_1+b_2)^2 + 2b_1b_2}{36 \cdot (b_1+b_2)}$	$\frac{h}{48}(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2)$
6	$\frac{na^4}{96} \cdot \frac{2+\cos(\alpha)}{(1-\cos(\alpha))^2} \cdot \sin(\alpha)$	$= I_y$
7	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	$\frac{1}{12} \cdot (HB^3 - hb^3)$
8	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	$\frac{1}{12}[(H-h)B^3 + h(B-h)^3]$
9	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	

8.2. Deviationsmoment C_{yz}

Ist ein Körper nicht symmetrisch bezüglich einer Rotationsachse, ensteht bei einer Drehung ein Deviationsmoment:

$$C_{yz} = \iint_A yz\,dA$$

8.3. Analogie zu Spannungen und Dehnungen

Hier haben wir das Flächenträgheitsmomente und Deviationsmoment bezüglich der y- und z-Drehachse berechnet. Analog zu den Spannungen, kann man Trägheitsmomente auch bezügl. anderer Achsen berechnen. Beachten muss man Fl.Tr.Mom. und Deviationsmomente z.B.:

$$I_\eta = (\cos\alpha)^2 I_y + (\sin\alpha)^2 I_z + 2(\sin\alpha)(\cos\alpha)C_{yz}$$

8.4. Verschiebungssatz (Satz von Steiner)

Unterteilt man einen Körper oder berechnet man das Flächenträgheitsmoment nicht bezüglich dem Massenmittelpunkt:

$$I_y = I_{y'} + (z_Q)^2 \cdot \Delta A) \qquad z_Q, y_Q \text{ :Abst. der Koord.systeme}$$
$$I_z = I_{z'} + (y_Q)^2 \cdot \Delta A) \qquad \Delta A\text{: Fläche des betrachteten Körpers}$$

8.5. Biegelinie für spez. Bieg.

$$\boxed{v''(x) = \frac{M_b(x)}{EI_z}} \quad \text{oder} \quad \boxed{v(x) = \frac{1}{EI_z} \iint M_b(x) dx}$$

Statisch unbestimmte Systeme lösen

1. Flächenträgheitsmomente (I_y, I_z) berechnen
2. Lagerkräfte bestimmen
3. Beanspruchung bestimmen
4. $v''(x)$ integrieren
5. Randbedingungen bestimmen
6. $v(x)$ bestimmen

8.6. Allgemeine Biegung

Formeln gelten, wenn y und z Hauptachsen sind. Normalspannung in x-Richtung:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

DGLs für die Mittellinie:

$$u_0'(x) = \frac{N(x)}{EA} \qquad v_0''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z} \qquad w_0''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_z}$$

Dehnung in x-Richtung:

$$\varepsilon(x, y, z) = u_0' - y \cdot v_0''(x) - z \cdot w_0''(x)$$

8.7. Normalspannung infolge Balkenbiegung

$$\boxed{\sigma_x = \frac{-M_b(x) \cdot y}{I_z}} \quad \text{mit} \quad v(x) = \frac{1}{EI_z} \iint M_b(x) dx$$

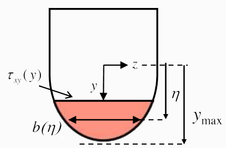
Hier gilt das Prinzip der Superposition. D.h. die Normalspannung σx ergibt sich aus: $\sigma_x = \underbrace{\sigma_{xi}}_{\text{aus Zugbelastung}} + \underbrace{\sigma_{xii}}_{\text{aus Balkenbiegung}}$

8.8. Schubspannung infolge Querkraft:

Für Vollquerschnitte:

$$\boxed{\tau_{xy}(x, y) = \frac{Q_y(x) \cdot H_z(y)}{I_z \cdot b(y)}}$$

$$\boxed{H_z(y) = \int_y^{y_{max}} \eta \cdot b(\eta) d\eta}$$



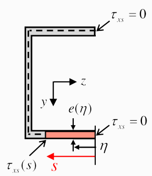
$H_z(x)$: Flächentr.moment 1. Ordnung, $b(y)$: Breite des Querschnitts

Für offene dünnwandige Querschnitte:

$$\boxed{\tau_{xy}(x, y) = \frac{-Q_y(x) \cdot H_z(y)}{I_z \cdot b(y)}}$$

$$\boxed{H_z(y) = \int_0^s y(\eta) \cdot e(\eta) d\eta}$$

Bei Polarkoord. $d\eta = r \cdot d\varphi$



9. Torsion

9.1. Verdrehungswinkel ϑ

$$\boxed{\vartheta = \int_a^b \frac{T(x)}{G \cdot I_T} dx}$$

Formel, falls der Querschnitt sich über Länge ändert, bei Kreisquerschnitten: $I_T = I_p$

$$\boxed{\vartheta = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_p}}$$

Formel, falls konstanter Kreisquerschnitt

Schubmodul $G = \frac{E}{2(1+v)}$

9.2. Polares Flächenträgheitsmoment I_p

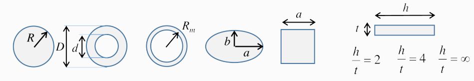
Mit dem pol. Fl.tr.mom. I_p wird das Fl.tr.mom. einer Fläche um einen definierten Punkt (meist ihr Schwerpunkt) beschrieben. Bei Kreisquerschnitten ist es gleich, wie das Torsionsträgheitsmom. I_T.

$$I_p = I_y + I_z = \iint (y^2 + z^2) dA$$

9.3. Schubspannung bei Kreis- und Vollquerschnitten

$$\boxed{\tau_{x\varphi} = \frac{T \cdot r}{I_T}}$$

Formel für Schubspannung infolge von Torsion, nur bei kreisförmigen Querschnitten brauchen, da keine Verwölbung, auch bei Kreisförm.: $I_T = I_p$



I_T	$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$2\pi R_m^3 t$	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$0.141a^4$	$0.23ht^3$	$0.28ht^3$	$\frac{ht^3}{3}$
W_T	$\frac{\pi R^3}{2}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$	$2\pi R_m^2 t$	$\frac{\pi a b^2}{2}$	$0.208a^3$	$0.25ht^2$	$0.28ht^2$	$\frac{ht^2}{3}$
Verwölbung	nein	nein	nein	ja	ja	ja	ja	ja

$\tau_{\max} = \frac{T}{W_T}$ $\quad W_T$:Torsionswiderst.Mom., I_T: Torsionsträgh.Mom.

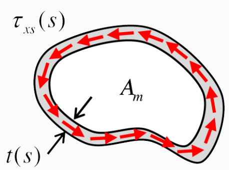
9.4. Dünnwandige geschlossene Querschnitte

$$\tau_{xs}(s) = \frac{T}{2A_m \cdot t(s)}$$

$$I_T = \frac{(2A_m)^2}{U}$$

$$W_T = 2A_m \cdot \min(t)$$

$$U = \oint \frac{1}{t(s)} ds$$

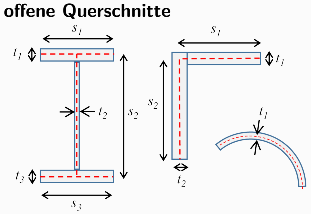


U: Umlaufintegral entlang der Profilmittellinie, A_m: Von Profilmittell. eingeschl. Fläche, $t(s)$: Wandstärke

9.5. Dünnwandige offene Querschnitte

$$I_T \approx \frac{1}{3} \sum_i s_i t_i^3$$

$$W_T \approx \frac{I_T}{\max(t_i)}$$



10. Energiesätze

10.1. Prinzip der virtuellen Arbeit

Die Summe der inneren Arbeiten $\widehat{W}_i$ und der äusseren Arbeiten $\widehat{W}_e$ ist null.

$$\boxed{\widehat{W}_i + \widehat{W}_e = 0} \quad \text{wobei}$$

$$\widehat{W}_i = \int_l \left(\tilde{N}\widehat{\varepsilon} + \tilde{V}_y \widehat{\gamma}_y + \tilde{V}_z \widehat{\gamma}_z + \tilde{M}_y \widehat{\chi}_y + \tilde{M}_z \widehat{\chi}_z \right) dx$$

$$\widehat{W}_e = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \cdot \underline{\widehat{u}}(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \underline{\Gamma}_j \cdot \underline{\widehat{\varphi}}(x_j) + \int_l \underline{q}(x) \cdot \underline{\widehat{u}}(x) + \underline{m}(x) \cdot \underline{\widehat{\varphi}}(x) dx$$

10.2. Elastisches Ergänzungspotential $\varepsilon^{*,el}$

$$\varepsilon^{*,el} = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA_{v,y}} + \frac{V_z^2}{GA_{v,z}} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} dx$$

Feder im System: $\quad \varepsilon^{*,el}_{\text{Feder}} = \frac{F^2}{2k} \qquad \varepsilon^{*,el}_{\text{Drehfeder}} = \frac{\Gamma^2}{2c_\varphi}$

10.3. Satz von Castigliano

Man betrachtet ein elastisches System unter der Belastung der Einzellasten $\{\underline{F}_i = F_i \underline{E}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ an den Punkten A_i.

Die Verschiebung u_i des Punktes A_i in der Richtung $\underline{e}_i$ berechnet sich nach:

$$u_i = \frac{d}{dF_i} \varepsilon^{*,el}$$

10.4. Satz von Müller Breslau

Man betrachte ein elastisches System unter den Belastungen $\{\underline{F}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ an den Punkten A_i und die daraus resultierenden Schnittgrössen $\{N, V, M\}$.

Will man die Verschiebung δ_B des Punktes B in Richtung $\underline{e}$ berechnen, so setzt man eine Einheitskraft am Punkt B in dieser Richtung an, aus welcher die Schnittgrössen $\{\overline{N}, \overline{V}, \overline{M}\}$ resultieren (ohne Belastung F_i).

Die Verschiebung δ_B beträgt dann:

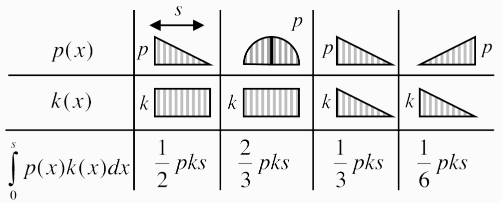
$$\delta_b = \int_l \left(\frac{N\overline{N}}{EA} + \frac{V\overline{V}}{GA_v} + \frac{M\overline{M}}{EI} \right) dx$$

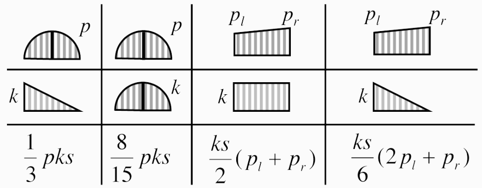
Zusätze (werden rechts addiert):

$$\underbrace{\frac{F\overline{F}}{k}}_{\text{Feder}} \qquad \underbrace{\frac{\Gamma\overline{\Gamma}}{c_\varphi}}_{\text{Drehfeder}} \qquad \underbrace{-\underline{u}^d \cdot \underline{R}}_{\text{Aufgezw. Verschieb.}}$$

10.5. Verwenden der Integrationstabelle

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Faktor}\\\text{der Int.}\\\text{tabelle}\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{l}\text{Maxmalwert}\\\text{Schnittgrössen}\\N, V, M\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{l}\text{Maximalwert}\\\text{Schnittgrössen}\\\overline{N}, \overline{V}, \overline{M}\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{l}\text{Länge}\\\text{des}\\\text{Stabs}\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{l}\text{Form}\\\text{änder}\\\text{ungs}\\\text{faktor}\end{array}}$$





11. Kraftmethode

11.1. Satz von Menabra

Man betrachte ein h-fach statisch unbest. System. Vektor $\underline{X}$ beinhalte die überzähligen Grössen aus h gelösten Bindungen an den Punkten A_i. X_i is die Lösung des LGS:

$$\underline{\delta}_0 + [\delta] \cdot \underline{X} = \underline{0}$$

$[\delta]$ ist die Nachgiebigkeitsmatrix mit den Termen $\delta_{ij} = \int_l \frac{M_i M_j}{EI} dx$

$\underline{\delta}_0$ ein Vektor mit den Komponenten $\delta_{0i} = \int_l \frac{M_0 M_i}{EI} dx$

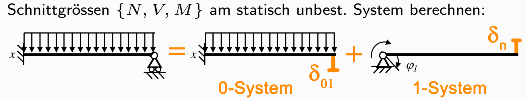
Achtung, hier wurde Kurzschreibweise angewandt.

Kraftmethode Vorgehen

1. Grad der statischen Unbestimmtheit h berechnen mit Abzählkriterium h=p+r-3n
2. h überzählige Bindungen lösen. Man bekommt stat. best. System. Dann, unbekannte Grösse X_i an Stelle der gelösten Bindungen einführen. Eine Grösse X_i für gelöste Lagerbedingungen und zwei entgegengesetzte Grössen X_i beidseitig des Gelenks für gelöste innere Bindungen.
3. Lagerreaktionen und Schnittgrössen unter externer Belastung berechnen.
4. Für jeden Einheitslast $X_i = 1$ Lagerreaktionen und Schnittgrössen berechnen
5. Terme der Nachgiebigkeitsmatrix $[\delta]$ und Vektor $\underline{\delta}_0$ bestimmen
6. Satz von Menabra anwenden, LGS auflösen
7. Man erhält Lagerreaktionen und Schnittgrössen durch Superposition am unbest. System.

11.2. Kraftmethode Formelkonzept 1-fach Stat. Unbest.

Schnittgrössen $\{N, V, M\}$ am statisch unbest. System berechnen:



$$\boxed{\delta_{01} + x \cdot \delta_{11} = 0} \rightarrow \boxed{x = -\frac{\delta_{01}}{\delta_{11}}}$$

$$\delta_{01} = \int_L \left(\frac{N_0 N_1}{EA} + \frac{V_0 V_1}{GA_v} + \frac{M_0 M_1}{EI} \right) dx$$

$$\delta_{11} = \int_L \left(\frac{N_1 N_1}{EA} + \frac{V_1 V_1}{GA_v} + \frac{M_1 M_1}{EI} \right) dx$$

$$M = M_0 + x \cdot M_1 \qquad V = V_0 + x \cdot V_1 \qquad N = N_0 + x \cdot N_1$$

11.3. Kraftmethode Formelkonzept 2-fach Stat. Unbest.

$$\begin{bmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \begin{bmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{12} & \delta_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \end{bmatrix}$$

11.4. Reduktionssatz

Man betrachte ein statisch unbestimmtes System unter einer externen Belastung mit resultierenden Schnittgrössen $\{N, V, M\}$.

Um die Verschiebung δ_B im Punkt B zu berechnen, wird eine fiktive Einheitskraft $\underline{1}_B$ **am statisch bestimmten Grundsystem** am Punkt B angesetzt, woraus die Schnittgrössen $\{\overline{N}_0, \overline{Q}_0, \overline{M}_0\}$ resultieren.

$$\boxed{\delta_b = \int_L \left(\frac{N\overline{N}}{EA} + \frac{V\overline{V}}{GA_v} + \frac{M\overline{M}}{EI} \right) dx}$$

Reduktionssatz Vorgehen

1. Schnittgrössen N, V, M des statisch unbestimmten Systems durch Kraftmethode bestimmten
2. Ansetzen von Einheitsgrösse $X = 1$ am **stat. bestimmten** System an Stelle der gesuchten Verformung
3. Bestimme Schnittgrössen $\overline{N}, \overline{V}, \overline{M}$ infolge von $X = 1$ am statisch bestimmten System
4. Wende den Satz von Müller-Breslau an

12. Baustatik spezifische Themen

12.0.1. Wirksame Schubflächen $A_{v,y}$, $A_{v,z}$

$$A_v = \left[\frac{S_y^2(y)}{I_y^2 b^2(z) \mathrm{d}A} \right]^{-1} \qquad A_{v,\text{Rechteck}} = \frac{5}{6} A$$

12.1. Nachgiebigkeitsmatrix - Satz von Maxwell-Betti

Die Nachgiebigkeitsmatrix δ ist symmetrisch. Den allgemeinen Ausdruck δ_{ij} für die Verschiebung am Punkt A_i durch Einheitslast am Punkt A_j erhält man durch:

$$\delta_{ij} = \int_l \left(\frac{N_i(x) N_j(x)}{EA} + \frac{V_i(x) V_j(x)}{GA_v} + \frac{M_i(x) M_j(x)}{EI} \right) \mathrm{d}x$$

12.2. Satz von Clapeyron

Befindet sich eine elatstisches System unter den Lasten $\{\underline{F}_1, \ldots, \underline{F}_n\}$ im Gleichgewicht, so beträg das Ergänzungspotential $\varepsilon^{*,el}$ die Hälfte der Arbeit der äusseren Kräfte im Lösungsverschiebungsfeld:

$$\varepsilon^{*,el} = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2(x)}{EI} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} u_i F_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} F_i F_j$$