Theorie 6

erstellt von A. Menichelli

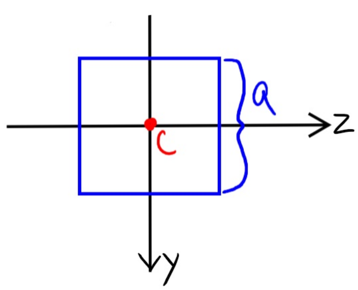
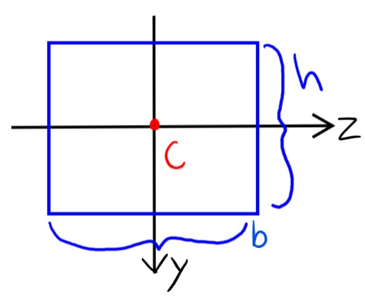
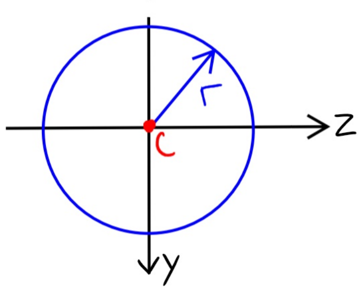
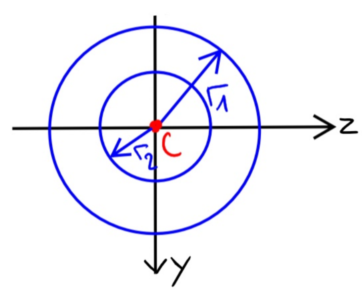
2. April 2019

1 Das Flächenträgheitsmoment

Das *Flächenträgheitsmoment* ist ein Mass, um die Drehbarkeit einer Fläche zu berechnen. Es hängt stark von der Geometrie der Fläche und von der Drehachse ab. Man kann das Flächenträgheitsmoment auch als ein geometrisches Widerstandsmoment betrachten. Es wird für eine Fläche mit y-z-Koordinaten folgenderweise berechnet:

$$I_z = \int \int y^2 \; dA \qquad\qquad I_y = \int \int z^2 \; dA$$

In der folgende Tabelle sind häufig auftretende Trägheitsmomente aufgelistet:

Geometrie	I_z	I_y	Geometrie	I_z	I_y
	$\frac{1}{12}a^4$	$\frac{1}{12}a^4$		$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}b^3h$
	$\frac{1}{4}\pi r^4$	$\frac{1}{4}\pi r^4$		$\frac{1}{4}\pi(r_1^4 - r_2^4)$	$\frac{1}{4}\pi(r_1^4 - r_2^4)$

Hinweis: Es kann viel Zeit sparen, wenn man zuerst die Geometrie der Fläche auf *Symmetrien* analysiert. Z.B.: Falls eine Fläche zur y-Achse symmetrisch ist, muss man nur den I_z der linken Hälfte berechnen und dann mal 2 multiplizieren, um das I_z der gesamten Fläche zu berechnen.

1.1 Der Schwerpunkt

Man kann sich den Schwerpunkt als einen *Gleichgewichtspunkt* vorstellen. Würde man beispielsweise versuchen einen Geodreieck auf dem Finger zu balancieren, würde es nur dann möglich sein, wenn der Finger auf dem Schwerpunkt des Geodreiecks ist.
Um den Schwerpunkt einer Fläche zu berechnen, muss ein neues Koordinatensystem $\eta\xi$ beliebig eingeführt werden. Die η- und ξ-Koordinaten des Schwerpunktes werden allgemein folgenderweise berechnet:

$$\eta_S = \frac{\int\int \eta \, dA}{A} \qquad \xi_S = \frac{\int\int \xi \, dA}{A}$$

Für die meisten Aufgaben sollte aber die vereinfachte Version (ohne das Integral) für einfachere Geometrien reichen:

$$\eta_S = \frac{\sum_i \eta_i \cdot A_i}{\sum_i A_i} \qquad \xi_S = \frac{\sum_i \xi_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

Dabei beschreibt der Indizes i die Anzahl der Flächenstücke, in die man die Anfangsfläche aufgeteilt hat. Die Werte η_i und ξ_i sind die Abstände der Schwerpunkte der Teilflächen zum Ursprung in die entsprechende Richtung.

1.1.1 Vorgehen beim Berechnen des Schwerpunktes

1. Geometrie analysieren:
   - Fall die Fläche zwei Symmetrieachsen besitzt, ist der Schnittpunkt dieser Symmetrieachsen zugleich der Schwerpunkt.
   - Falls die Fläche nur eine Symmetrieachse besitzt, liegt der Schwerpunkt sicher auf diese Achse.
   - Falls der Körper keine Art von Symmetrien aufweist, müssen beide Koordinaten separat berechnet werden.
2. Koordinatensystem $\eta\xi$ in einem geometrisch günstigen Punkt (und Richtung) einführen.
3. Fläche in einfachen Flächenstücken aufteilen (Quadrate, Rechtecke, Kreise)
4. Schwerpunkt und Fläche jedes Flächenstückes bestimmen.
5. η- und ξ-Koordinate des Schwerpunktes berechnen.

1.2 Der Satz von Steiner

Falls man ein Trägheitsmoment einer Fläche, respektive eines Punktes sucht, welches nicht der Schwerpunkt ist, benutzt man dann den *Satz von Steiner*:

$$I_z = I'_z + A \cdot d_y^2$$

I_z ist in diesem Fall das Trägheitsmoment der Fläche A respektive der Achse z. I'_z ist das Trägheitsmoment von der Fläche A relativ zu ihrem Schwerpunkt und dy der Abstand des Schwerpunktes der Fläche zur Achse z.

1.3 Vorgehen beim Berechnen des Flächenträgheitsmomentes

1. Schwerpunkt bestimmen.
2. Neues Koordinatensystem einführen, welches den Schwerpunkt als Ursprung hat.
3. Fläche in bekannte Teilflächenstücke aufteilen, um die Rechnung zu vereinfachen.
4. Der Schwerpunkt jeder Teilfläche bestimmen.
5. Die Trägheitsmomente aller Teilflächen, berechnen. Falls manche Teilflächen Schwerpunkte besitzen, die einen Abstand zur Bezugsachse aufweisen, Steiner anwenden.
6. Alle Trägheitsmomente der Teilflächen summieren.

2 Die Biegelinie

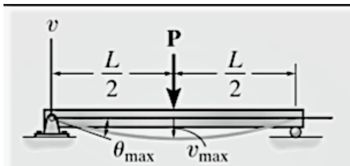
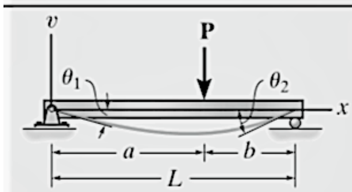
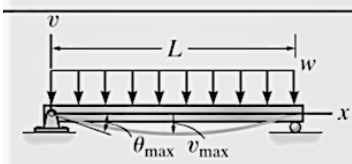
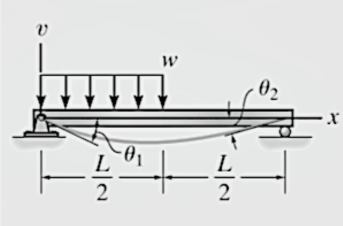
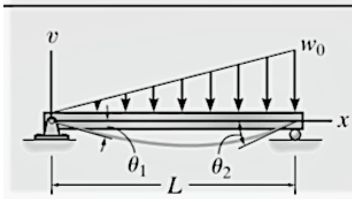
Die Biegelinie stellt die Verformung des Materials durch einen Biegemoment. Sie ist folgendermasse definiert:

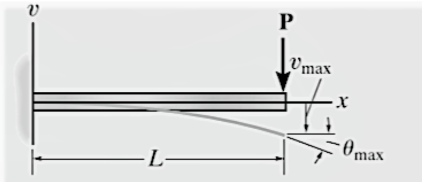
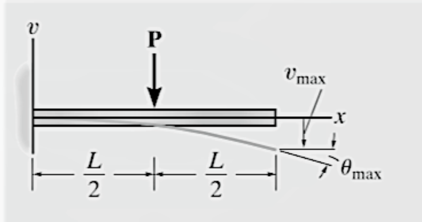
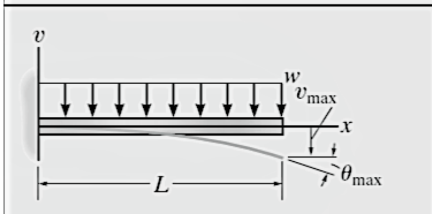
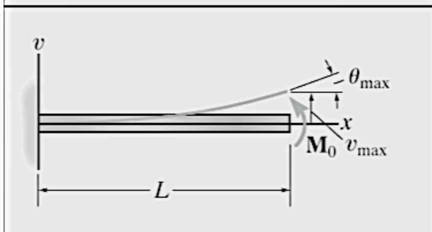
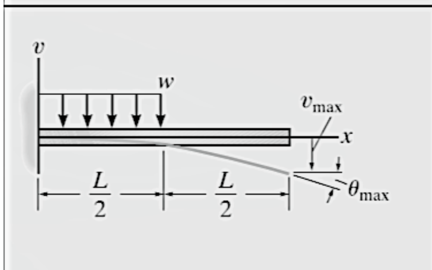
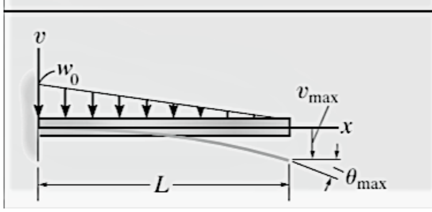
$$v_y(x) = \int \theta(x)\,dx = \frac{1}{E}\int\int \frac{M_z(x)}{I_z(x)}\,dx$$

$\theta(x)$ beschreibt den Neigungswinkel der Linie (also die Steigung).

Achtung: Da man integriert, darf man die Integrationskonstanten nicht vergessen! Diese findet man anschliessen durch die Lager- und Stetigkeitsbedingungen heraus.

Weil das Rechnen einer Biegelinie sehr aufwändig und fehleranfällig sein kann, sind hier ein paar vorgerechnete Beispiele tabelliert:

System	Anfangssteigung	Maximale Durchbiegung	Biegelinie
	$\theta_{max} = \frac{-PL^2}{16EI}$	$v_{max} = \frac{-PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \leq x \leq L/2$
	$\theta_1 = \frac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\Big\rvert_{x=a} = \frac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \frac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \leq x \leq a$
	$\theta_1 = \frac{-M_0L}{6EI}$ $\theta_2 = \frac{M_0L}{3EI}$	$v_{max} = \frac{-M_0L^2}{\sqrt{243}EI}$ at $x = 0.5774L$	$v = \frac{-M_0x}{6EIL}(L^2 - x^2)$
	$\theta_{max} = \frac{-wL^3}{24EI}$	$v_{max} = \frac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \frac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\rvert_{x=L/2} = \frac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{max} = -0.006563\frac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.4598L$	$v = \frac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \leq x < L$
	$\theta_1 = \frac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \frac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{max} = -0.00652\frac{w_0L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	$v = \frac{-w_0x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

System	Anfangssteigung	Maximale Durchbiegung	Biegelinie
	$\theta_{\max} = \dfrac{-PL^2}{2EI}$	$v_{\max} = \dfrac{-PL^3}{3EI}$	$v = \dfrac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_{\max} = \dfrac{-PL^2}{8EI}$	$v_{\max} = \dfrac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px^2}{6EI}\left(\frac{3}{2}L - x\right) \quad 0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-PL^2}{24EI}\left(3x - \frac{1}{2}L\right) \quad L/2 \le x \le L$
	$\theta_{\max} = \dfrac{-wL^3}{6EI}$	$v_{\max} = \dfrac{-wL^4}{8EI}$	$v = \dfrac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{\max} = \dfrac{M_0 L}{EI}$	$v_{\max} = \dfrac{M_0 L^2}{2EI}$	$v = \dfrac{M_0 x^2}{2EI}$
	$\theta_{\max} = \dfrac{-wL^3}{48EI}$	$v_{\max} = \dfrac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx^2}{24EI}\left(x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2\right)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL^3}{192EI}(4x - L/2)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_{\max} = \dfrac{-w_0 L^3}{24EI}$	$v_{\max} = \dfrac{-w_0 L^4}{30EI}$	$v = \dfrac{-w_0 x^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2 x + 5Lx^2 - x^3)$

Bemerkung: Da die y-Achse in dieser Tabelle nach oben zeigt, istin diesen Beispielen die Biegelinie meistens negativ.

2.1 Randbedingungen

Neben den Lagerbedingungen gibt es auch die *Stetigkeitsbedingungen* und Bedingungen, die aus der Geometrie sichtbar sind, um die Integrationskonstanten der Biegelinie zu berechnen.

Die Stetigkeitsbedingungen besagen, dass zwei Biegelinien des gleichen Stabes beim Punkt, wo sie kombiniert werden, den gleichen Wert und die gleiche Steigung aufweisen müssen.

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_2(x) \\ v_1'(x) &= v_2'(x) \end{aligned}$$

Bedingungen, die aus der Geometrie des Bauteils und der Belastung erkennbar sind, sind je nach Aufgabe anders und es gibt demzufolge keine allgemeine Regel, die jeden Fall abdeckt. Meistens gilt aber diese Relation:

$$v'_{max} = 0$$

Bei symmetrischen Belastungen mit konstanter Biegesteifigkeit EI liegt v_{max} immer in der Mitte des Stabes.

Aus den Lagerbedingungen kann man auch gute Randbedingungen für die Biegelinie $v(x)$ aufstellen. Zwei Beispiele sind

- Gelenklager: $v(0) = 0$ und $v'(x) \neq 0$
- Einspannung: $v(0) = 0$ und $v'(x) = 0$