THEORIE 06

kendallj@ethz.ch

1 Flächenträgheitsmoment

1.1 Herleitung

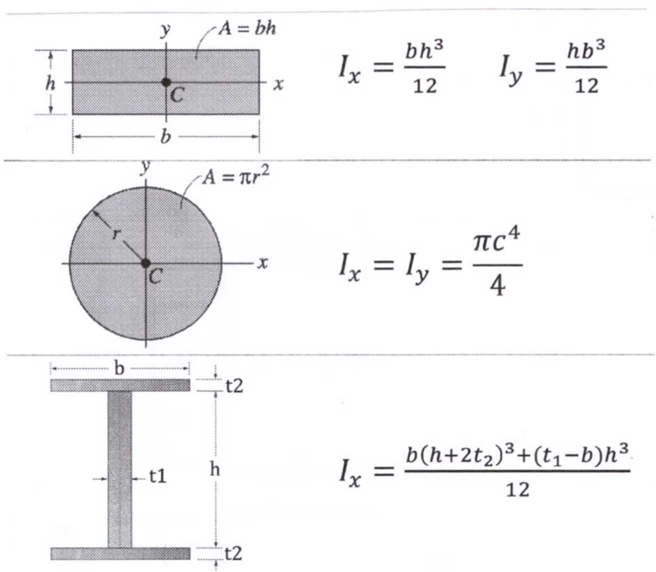
Die Flächenintegrale:

$$I_z = \int\int y^2 dA \qquad\qquad I_y = \int\int z^2 dA$$

heissen Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente zweiten Grades).

Kochrezept - Flächenträgheitsmoment

1. Über welche Achse wird gebogen? Wenn M_B in Z-Richtung zeigt $\rightarrow I_z$
2. Schwerpunkt der gesamten Fläche bestimmen und Achsen* durch diesen ziehen
3. Träger in einfache Flächen zerlegen
4. I_z (oder I_y) und A für jede Teilfläche berechnen
   (a) liegt Schwerpunkt von Fläche auf Achse* $\rightarrow I_z$
   (b) liegt Schwerpunkt nicht auf Achse* $\rightarrow$ Steiner: $I_{z_{ges}} = I_z + (\Delta y)^2 \cdot A$
5. alle I_y (oder I_z) summieren



1.2 Deviationsmoment / gemischtes Flächenträgheitsmoment

Das integral mit gemischten Termen heisst Deviationsmoment oder gemischtes Flächenträgheitsmoment:

$$C_{yz} = I_{yz} = -\int\int yzdA$$

2 Verschiebungssatz (Satz von Steiner)

$$I_{z_{ges}} = I_z + (\Delta y)^2 \cdot A \tag{1}$$

$$I_{y_{ges}} = I_y + (\Delta z)^2 \cdot A \tag{2}$$

$$I_{yz_{ges}} = I_{yz} + (\Delta y)(\Delta z) \cdot A \tag{3}$$

wobei A die Fläche, Δz & Δy der Abstand des Schwerpunkts zur entsprechenden Achse* und I_z & I_y das Flächenträgheitsmoment (aus Tabelle) ist.

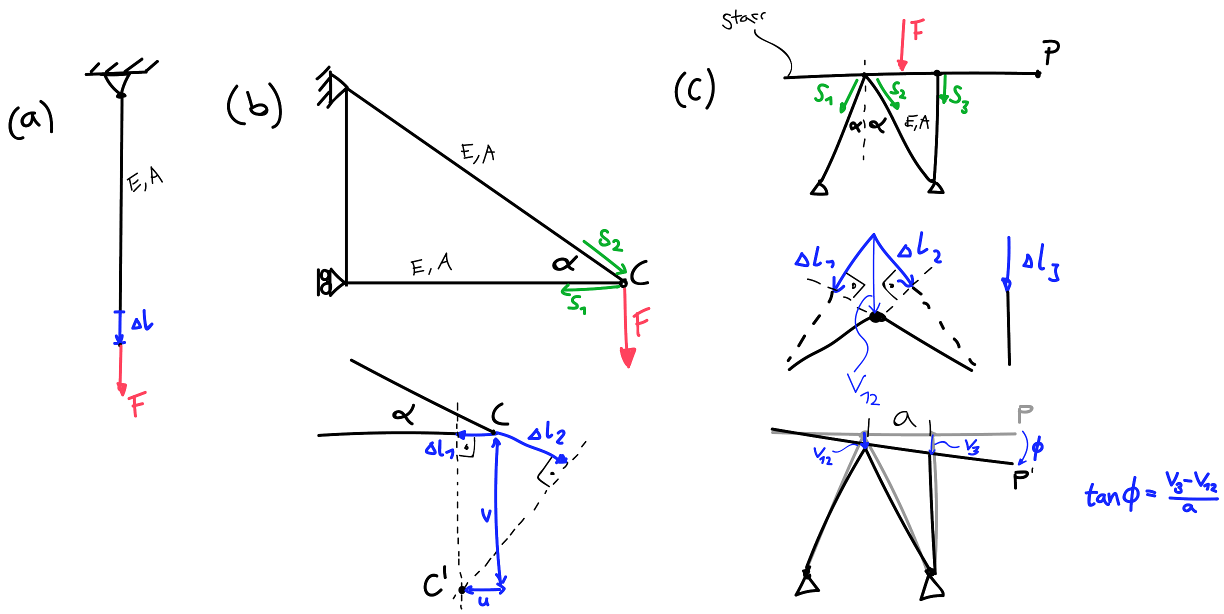
3 Schwerpunkt

Wenn der Querschnitt in zwei Richtungen symmetrisch ist, finden wir den Schwerpunkt auf dem Schnittpunkt der Symmetrieachsen (siehe Rechteck und Kreis unter 1.1). Wenn sich aber ein Bauteil aus mehreren Flächen zusammensetzt, müssen wir den Schwerpunkt zuerst selbst berechnen.

$$y_{s,ges} = \frac{\sum_i y_{s,i} A_i}{A_{ges}} \tag{4}$$

4 Verschiebungen von statisch bestimmten Syteme

Je nach Spannungszustand kann sich ein Stab (Körper) verlängern oder verkürzen. In der Regel ist diese Verschiebung ziemlich geradlinig. (a) Jetzt können bspw. zwei Pendelstützen an einem Gelenk gelagert sein. In diesem Fall bildet man Senkrechte zu den Längenänderungen. Der Schnittpunkt der beiden senkrechten ist dann die Verschiebung. (b)(c) Ein Video, welches das Vorgehen ausführlich erklärt: https://www.youtube.com/watch?v=FNqCk1XSN-A



5 Biegelinie

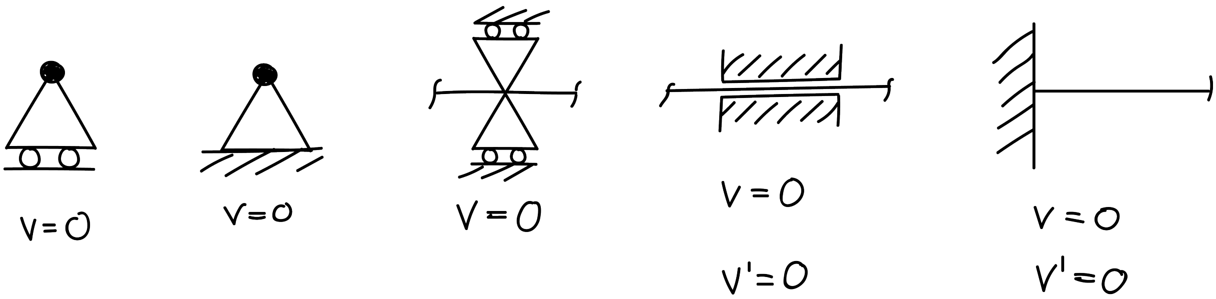
Die Biegelinie stellt die Verformung des Materials durch einen Biegemoment dar:

$$v(x) = \int \phi(x)dx = \frac{1}{E} \int \int \frac{M_b(x)}{I(x)} dx \tag{5}$$

$\phi(x)$ beschreibt den Neigungswinkel der Linie (Steigung).

Achtung: Da man allgemein integriert, darf man die Integrationskonstanten nicht vergessen! Diese findet man anhand der Lager- und Stetigkeitsbedingungen (5.1 & 5.2).

5.1 Lagerbedingungen



5.2 Stetigkeitsbedingungen

Die Stetigkeitsbedingungen besagen, dass zwei Biegelinien des gleichen Stabes beim Punkt, wo sie kombiniert werden, den Gleichen Wert und die gleiche Steigung aufweisen müssen.

$$v_1(x) = v_2(x)$$
$$v_1'(x) = v_2'(x)$$

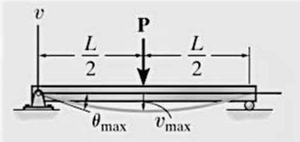
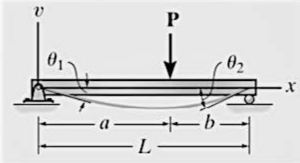
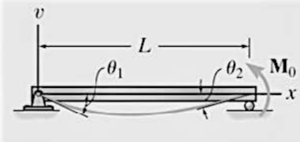
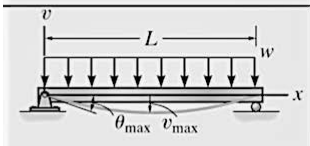
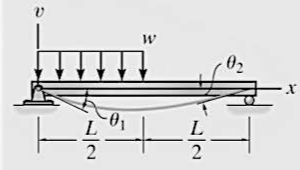
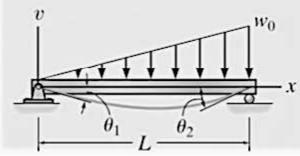
Bedingungen, die aus der Geometrie des Bauteils und der Belastung erkennbar sind, sind je nach Aufgabe anders und es gibt demzufolge keine allgemeine Regel, die jeden Fall abdeckt. Meistens braucht ihr aber diese Relation:

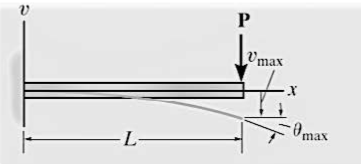
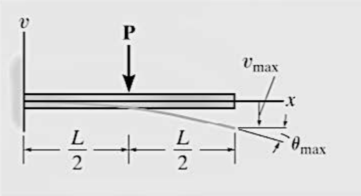
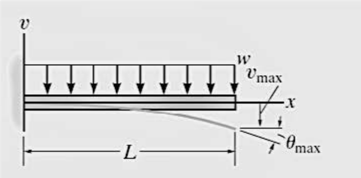
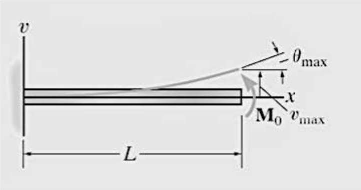
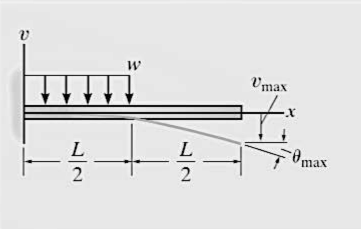
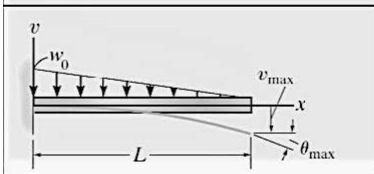
$$v'_{max} = 0$$

Bei symmetrischen Belastungen mit konstantem E-Modul und Trägheitsmoment liegt v_{max} immer in der Mitte des Stabes.

5.3 Tabellen

Häufig anzutreffende Systeme mit Anfangssteigung, maximaler Durchbiegung und Biegelinie:

	$\theta_{\max} = \dfrac{-PL^2}{16EI}$	$v_{\max} = \dfrac{-PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = \dfrac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \dfrac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\Big\vert_{x=a} = \dfrac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \dfrac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = \dfrac{-M_0 L}{6EI}$ $\theta_2 = \dfrac{M_0 L}{3EI}$	$v_{\max} = \dfrac{-M_0 L^2}{\sqrt{243}EI}$ at $x = 0.5774L$	$v = \dfrac{-M_0 x}{6EIL}(L^2 - x^2)$
	$\theta_{\max} = \dfrac{-wL^3}{24EI}$	$v_{\max} = \dfrac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \dfrac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \dfrac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\vert_{x=L/2} = \dfrac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{\max} = -0.006563\dfrac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.4598L$	$v = \dfrac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2$ $+ 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x < L$
	$\theta_1 = \dfrac{-7w_0 L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \dfrac{w_0 L^3}{45EI}$	$v_{\max} = -0.00652\dfrac{w_0 L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	$v = \dfrac{-w_0 x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

	$\theta_{max} = \frac{-PL^2}{2EI}$	$v_{max} = \frac{-PL^3}{3EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_{max} = \frac{-PL^2}{8EI}$	$v_{max} = \frac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI}\left(\frac{3}{2}L - x\right) \quad 0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-PL^2}{24EI}\left(3x - \frac{1}{2}L\right) \quad L/2 \leq x \leq L$
	$\theta_{max} = \frac{-wL^3}{6EI}$	$v_{max} = \frac{-wL^4}{8EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{max} = \frac{M_0 L}{EI}$	$v_{max} = \frac{M_0 L^2}{2EI}$	$v = \frac{M_0 x^2}{2EI}$
	$\theta_{max} = \frac{-wL^3}{48EI}$	$v_{max} = \frac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI}\left(x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2\right)$ $0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-wL^3}{192EI}(4x - L/2)$ $L/2 \leq x \leq L$
	$\theta_{max} = \frac{-w_0 L^3}{24EI}$	$v_{max} = \frac{-w_0 L^4}{30EI}$	$v = \frac{-w_0 x^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2 x + 5Lx^2 - x^3)$