

NASA

525-34

261123

Konvergenzbeschleunigung bei der Berechnung der reibungsbehafteten Umströmung eines Tragflügels

R. Radespiel*, C. Rossow

N90-16194

Institut für Entwurfsaerodynamik

DFVLR, Am Flughafen, D-3300 Braunschweig

Übersicht

Es wird ein neuentwickeltes Finite-Volumen Verfahren für die dreidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen vorgestellt. Es beruht auf einem Zelleckpunktschema mit zentralen Differenzen und expliziten Runge-Kutta Zeitschritten. Durch die Verwendung lokaler Zeitschritte, impliziter Glättung der Residuen, eines Mehrgitteralgorithmus und sorgfältig kontrollierter künstlicher dissipativer Terme wird eine gute Konvergenz des Verfahrens zur stationären Lösung erreicht. Es werden Rechenergebnisse für transsonische Profile und Tragflügel angegeben. Es zeigt sich, daß das neue Verfahren die routinemässige Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen ermöglicht.

Einleitung

Das Gebiet der numerischen Strömungsmechanik hat sich innerhalb der letzten Jahrzehnte von der Behandlung einfacher Modellprobleme ausgehend zu einem Stand entwickelt, auf dem die numerischen Verfahren bereits eine wichtige Rolle bei der Verwirklichung technischer Projekte spielen. Der große Fortschritt auf dem Gebiet der EDV-Rechenanlagen ermöglichte die Entwicklung einer Vielzahl von numerischen Verfahren zur Lösung der Eulerschen und Navier-Stokesschen Gleichungen. Die Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen allerdings stellt ein Problem dar, für dessen Bewältigung die Leistungsfähigkeit der heutigen Vektorrechner gerade ausreicht. Um eine routinemässige Anwendung von Lösungsverfahren für diese Gleichungen zu ermöglichen, ist eine Beschleunigung der Verfahren erforderlich. Im vorliegenden Beitrag soll gezeigt werden, daß durch Anwendung der Mehrgittertechnik in einem Zeitschrittverfahren für die Navier-Stokesschen Gleichungen eine erhebliche Beschleunigung der Konvergenz zur stationären Lösung erreicht wird. Die Leistungsfähigkeit des neuen Rechenverfahrens wird anhand der Rechenergebnisse für ebene Profilmströmungen sowie für Strömungen um den ONERA-M6 Tragflügel demonstriert.

Grundgleichungen

Ausgangspunkt für das Verfahren sind die Bewegungsgleichungen für die dreidimensionale, reibungsbehaftete Strömung eines idealen Gases in integraler Form. Sie lauten

*) gegenwärtige Anschrift: NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 23665, USA

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{W} dV + \iint_{\delta V} \vec{F} \vec{n} dS = 0 \quad (1)$$

mit \vec{W} als dem Vektor der abhängigen Variablen

$$\vec{W} = (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho E)^T.$$

Dabei bezeichnet V ein beliebiges Kontrollvolumen mit der Berandung δV und der äußeren Normalen \vec{n} . \vec{F} ist der Tensor der Flußdichte nach [1] und die Größen ρ , u , v , w , E bezeichnen Dichte, Geschwindigkeitskomponenten und Gesamtenergie. Die in \vec{F} enthaltenen Größen Druck und Temperatur werden mit Hilfe der allgemeinen Zustandsgleichung berechnet. Für die Berechnung turbulenter Strömungen wird die in den Reibungstermen auftretende molekulare Viskosität μ durch $\mu + \mu_t$ und die Wärmeleitfähigkeit μ/Pr durch $\mu/Pr + \mu_t/Pr_t$ ersetzt, wobei die Wirbelviskosität μ_t und die turbulente Prandtlzahl Pr_t mit einem Turbulenzmodell berechnet werden. In der vorliegenden Arbeit wird hierfür das algebraische Modell nach Baldwin und Lomax [2] verwendet.

Diskretisierung im Raum

Die Diskretisierung des Gleichungssystems (1) erfolgt mit Hilfe der Linienmethode, d.h. Diskretisierung im Raum und in der Zeit werden getrennt voneinander durchgeführt. Für die räumliche Diskretisierung wird das Rechengebiet um den aerodynamischen Körper in finite Volumen in Form von Hexaedern aufgeteilt, siehe Bild 1. Die diskreten Werte der Strömungsgrößen werden den Eckpunkten der Volumen zugeordnet. Jeder der Eckpunkte (i,j,k) ist von acht Volumen umgeben. Bild 2 zeigt die Anordnung für den vereinfachten Fall eines ebenen Netzes. Die räumliche Diskretisierung von Glg.(1) ergibt die diskrete Näherung

$$\frac{d}{dt} \vec{W}_{i,j,k} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left[\vec{Q}_C i,j,k + \vec{Q}_D i,j,k + \vec{D}_{i,j,k} \right]. \quad (2)$$

Im folgenden sollen die diskreten reibungslosen Flüsse $\vec{Q}_C i,j,k$, die reibungsbehafteten Flüsse $\vec{Q}_D i,j,k$ sowie die künstlichen dissipativen Terme $\vec{D}_{i,j,k}$ erläutert werden.

Für die Bilanz der reibungslosen Flüsse wird die Zelle ABCDEFGH nach Bild 2 betrachtet. $\vec{Q}_C i,j,k$ wird durch Summation der Flüsse über die Berandungsflächen der Zelle ermittelt. Die Flußdichte auf den Randflächen wird durch Mittelwertbildung der Größen auf den benachbarten Knoten gebildet und mit dem diskreten Flächenvektor multipliziert. Es läßt sich zeigen [3], daß sich der Diskretisierungsfehler wie von erster Ordnung verhält, wenn der Verlauf des Normalenvektors über den Randflächen der Zelle glatt ist und die Form der Randflächen sich bei Netzverfeinerung einem Parallelogramm nähert. Auf glatten Rechenetzen verhält sich der Diskretisierungsfehler wie von zweiter Ordnung.

Für die Bilanz der reibungsbehafteten Flüsse wird die Hilfszelle A'B'C'D' betrachtet. Die Flüsse $\vec{Q}_D i,j,k$ enthalten erste Ableitungen der Strömungsgrößen und werden im Mittelpunkt der Berandungsfläche durch Anwendung einer lokalen Transformation und finite Differenzen approximiert. Als Alternative böte sich die Ermittlung der ersten

Ableitungen in A', B', C', D' mit Hilfe des Greenschen Satzes und die Berechnung der Flußgrößen durch Mittelung an. Diese Vorgehensweise führt nach [4] zu einer Entkopplung benachbarter Gitterpunkte oder sogar zur Anfachung von Oszillationen in der Lösung je nach dem Seitenverhältnis des Hexaeders. Für den Fall eines eindimensionalen gestreckten Netzes läßt sich zeigen [4,5], daß sich der Diskretisierungsfehler der reibungsbehafteten Flußbilanz wie von erster Ordnung auf beliebig gestreckten Netzen und wie von zweiter Ordnung auf glatten gestreckten Netzen verhält. Im vorliegenden Verfahren wurden bei der Ermittlung der reibungsbehafteten Flüsse nur Gradienten in der Koordinatenrichtung η normal zum Körper berücksichtigt (thin layer approximation).

Die künstlichen dissipativen Terme $\vec{D}_{i,j,k}$ wirken dämpfend auf Oszillationen im Strömungsfeld und ermöglichen somit die Konvergenz des Verfahrens zur stationären Lösung. Sie bestehen aus einer Kombination zweiter und vierter Differenzen. Um für Volumen mit hohen Seitenverhältnissen, die bei der Berechnung von reibungsbehafteten Strömungen zwangsläufig auftreten, gute Dämpfungseigenschaften zu erreichen, muß die Größe dieser Terme sorgfältig festgelegt werden. Wir verwenden

$$\vec{D}_{i,j,k} = (D^2_\xi - D^4_\xi + D^2_\eta - D^4_\eta + D^2_\zeta - D^4_\zeta) \vec{W}_{i,j,k} \quad (3)$$

mit den zweiten und vierten Differenzenoperatoren

$$D^2_\xi \vec{W}_{i,j,k} = \nabla_\xi (\bar{\lambda}_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}) \Delta_\xi \vec{W}_{i,j,k}, \quad (4)$$

$$D^4_\xi \vec{W}_{i,j,k} = \nabla_\xi (\bar{\lambda}_\xi \epsilon^{(4)}_{i+1/2,j,k}) \Delta_\xi \nabla_\xi \Delta_\xi \vec{W}_{i,j,k}, \quad (5)$$

wobei i,j,k die Indizes in ξ,η,ζ -Richtung bedeuten und Δ_ξ, ∇_ξ vorwärts- und rückwärtsgerichtete Differenzenoperatoren in ξ -Richtung sind. In Anlehnung an Martinelli [6] ist der Skalierungsfaktor $\bar{\lambda}_\xi$ vom größten Eigenwert der Jakobimatrix der reibungslosen Flüsse $\partial \vec{Q}_C / \partial \vec{W}$ sowie dem Seitenverhältnis des Volumens abhängig:

$$\bar{\lambda}_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} = \lambda_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} \cdot \Phi_{i+1/2,j,k} \quad (6)$$

$$\Phi_{i+1/2,j,k} = 1 + \max((\lambda_\eta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} / \lambda_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k})^\alpha, (\lambda_\zeta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} / \lambda_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k})^\alpha)$$

$$\lambda_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} = |\vec{u}_{i+1/2,j,k} \cdot \vec{S}_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}| + c |\vec{S}_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}|$$

$$\lambda_\eta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} = |\vec{u}_{i+1/2,j,k} \cdot \vec{S}_\eta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}| + c |\vec{S}_\eta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}|$$

$$\lambda_\zeta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} = |\vec{u}_{i+1/2,j,k} \cdot \vec{S}_\zeta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}| + c |\vec{S}_\zeta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}|$$

wobei $\vec{u}_{i+1/2,j,k}$ der Geschwindigkeitsvektor und $\vec{S}_\xi \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}, \vec{S}_\eta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}, \vec{S}_\zeta \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}$ die diskreten Zellflächenvektoren in ξ,η,ζ -Richtung und c die Schallgeschwindigkeit bedeuten. Der Exponent α ist $1/2 < \alpha < 2/3$. Die Koeffizienten $\epsilon^{(2)}$ und $\epsilon^{(4)}$ verwenden den Druck als Sensor für Verdichtungsstöße im Strömungsfeld, sie lauten

$$\epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} = k^{(2)} \max(v_{i-1,j,k}, v_{i,j,k}, v_{i+1,j,k}, v_{i+2,j,k}) \quad (7)$$

$$v_{i,j,k} = \left| \frac{p_{i-1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i+1,j,k}}{p_{i-1,j,k} + 2p_{i,j,k} + p_{i+1,j,k}} \right|$$

$$\epsilon^{(4)}_{i+1/2,j,k} = \max(0, (k^{(4)} - \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}))$$

mit den Konstanten $k^{(2)}$ und $k^{(4)}$. Die Dissipationsoperatoren in η - und ζ -Richtung sind entsprechend definiert.

Randbedingungen

An den Fernfeldrändern des Rechengebietes werden die Strömungsgrößen entsprechend dem Verlauf der Charakteristiken für eindimensionale Strömung normal zum Rand nach [7] ermittelt. Auf der Körperoberfläche wird die Geschwindigkeit zu null gesetzt. Die Kontinuitätsgleichung und die Energiegleichung werden für die Gitterpunkte auf der Körperkontur unter Annahme einer adiabaten Wand gelöst.

Zeitschrittverfahren

Durch die Diskretisierung im Raum erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die mit einem fünfstufigen Runge-Kutta Verfahren gelöst werden. Entsprechend [6] verwenden wir ein Schema, bei dem die künstlichen dissipativen Terme in den Stufen eins, drei und fünf berechnet werden. Dieses Schema hat einen besonders weiten Stabilitätsbereich bezüglich der dissipativen Terme, was bei Rechnernetzen mit stark variierendem Seitenverhältnis der Zellen von Bedeutung ist. Die stationäre Lösung des Gleichungssystems ist unabhängig von der Größe des Zeitschritts und somit auch von den im folgenden beschriebenen Beschleunigungstechniken (1) der lokalen Zeitschritte, (2) der impliziten Glättung der Residuen und (3) des Mehrgitteralgorithmus.

Bei der Methode der lokalen Zeitschritte wird in jedem Gitterpunkt der größte von der Stabilitätsbedingung des expliziten Verfahrens her erlaubte Zeitschritt durchgeführt. In der Berechnung des Zeitschritts sind die Stabilitätsgrenzen bezüglich Konvektion und Diffusion enthalten [1].

Die expliziten Residuen R_m des Zeitschrittverfahrens werden in jeder Runge-Kutta Stufe einer impliziten Glättung unterworfen. Für dreidimensionale Probleme verwenden wir die faktorisierte Form

$$(1 - \varepsilon_\xi \nabla_\xi \Delta_\xi)(1 - \varepsilon_\eta \nabla_\eta \Delta_\eta)(1 - \varepsilon_\zeta \nabla_\zeta \Delta_\zeta) \bar{R}_m = R_m \quad (8)$$

wobei \bar{R}_m das zu berechnende implizite Residuum der m -ten Stufe bedeutet. Die Glättung der Residuen ist aus zwei Gründen vorteilhaft. Zum einen erhält man einen vergrößerten Stabilitätsbereich des Verfahrens, die Zeitschritte können im Vergleich zum expliziten Schema etwa verdoppelt werden. Zum anderen kann aber auch das Dämpfungsverhalten des Verfahrens in Bereichen mit Zellen hohen Seitenverhältnisses verbessert werden. Das Dämpfungsverhalten des Runge-Kutta Zeitschrittverfahrens ist nämlich besonders günstig, wenn der Zeitschritt nur etwas kleiner als von der expliziten Zeitschrittbegrenzung her erlaubt ist. Für sehr viel kleinere Zeitschritte verschlechtert sich das Dämpfungsverhalten. Zur weiteren Erläuterung nehmen wir an, es sei eine hochfrequente Störung in der transienten Strömungslösung entlang der langen Seite einer Rechenzelle vorhanden. Die explizite Zeitschrittbegrenzung wird durch die Länge der kurzen Seite der Zelle bestimmt, so daß sich das Verfahren bezüglich des Dämpfungsverhaltens entlang der langen Seite unterhalb des Optimalpunktes besser

Dämpfung befindet. Durch eine Variation der Glättungskoeffizienten $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta$ in Abhängigkeit vom Zeitschritt und vom Seitenverhältnis der Zellen, z. Bsp. durch

$$\varepsilon_\xi = \max\left(0, \frac{1}{4} \left(\frac{\text{CFL}}{\text{CFL}_{\text{explizit}}} \frac{\lambda_\xi}{\lambda_\xi + \max(\lambda_\eta, \lambda_\zeta)} \left(1 + \max\left(\left(\frac{\lambda_\eta}{\lambda_\xi}\right)^\alpha, \left(\frac{\lambda_\zeta}{\lambda_\xi}\right)^\alpha\right)\right)^2 - 1\right)\right) \quad (9)$$

kann das Dämpfungsverhalten wesentlich verbessert werden.

Der Mehrgitteralgorithmus basiert auf dem Prinzip, die Lösung auf einem feinen Netz unter Zuhilfenahme gröberer Rechennetze zum stationären Zustand zu konvergieren. Da die gröberen Rechennetze weniger Rechenaufwand erfordern und zudem größere Zeitschritte zulassen, kann man eine Beschleunigung des Verfahrens erwarten. Ferner wird mit Hilfe der groben Netze das Dämpfungsverhalten bezüglich der langwelligen Störungen im Strömungsfeld verbessert, so daß auf die sonst übliche Enthalpiedämpfung des Zeitschrittverfahrens verzichtet werden kann. Der Mehrgitteralgorithmus ist entsprechend der Arbeit von Jameson [8] aufgebaut. Ausgehend vom feinsten Rechennetz werden gröbere Netze durch Weglassen jedes zweiten Gitterpunktes in jeder Koordinatenrichtung erzeugt. Die Strömungsvariablen auf den Netzpunkten der groben Netze werden vom jeweils feineren Netz übernommen. Die Residuen der groben Netze werden mit den Residuen der jeweils feineren Netze so verknüpft, daß die Lösung auf den groben Netzen von den Residuen der feinen Netze angetrieben wird, und somit die auf den groben Netzen berechneten Korrekturen der Lösung null sind, wenn die Residuen des feinsten Netzes null sind. Nach wiederholter Vergrößerung des Netzes und Erreichen des größten Netzes werden dessen Korrekturen zum nächst feineren Netz trilinear interpoliert und zu den Korrekturen dieses Netzes addiert. Die Interpolation der Korrekturen zum nächst feineren Netz kann nun entweder solange wiederholt werden, bis das feinste Netz erreicht wird (V-Mehrgitterzyklus), oder es können zwischendurch noch Schritte zurück auf gröbere Netze durchgeführt werden. Es zeigt sich, daß mit einem W-Mehrgitterzyklus eine schnellere Konvergenz zur stationären Lösung erzielt werden kann als mit dem V-Zyklus. Für das Dämpfungsverhalten des Verfahrens ist es vorteilhaft, wenn die Summe der Korrekturen der groben Netze einer Glättung nach Glg.(8) mit $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta \approx 0.2$ unterworfen werden, bevor sie auf die Lösung des feinsten Netzes addiert wird. Die Robustheit des Verfahrens wird ferner verbessert durch sukzessive Netzverfeinerung. Hierbei wird das Verfahren zunächst auf einem groben Netz gestartet und dessen Lösung dient als Anfangsbedingung für das nächst feinere Netz.

Ergebnisse

Einige Eigenschaften des neuen Rechenverfahrens sollen zunächst anhand der Ergebnisse einer vereinfachten Version für ebene Strömungen dargestellt werden. Als Testfall wählen wir die transsonische Umströmung des RAE 2822 Profils, $Ma_\infty=0.73$, $\alpha=2.79^\circ$, $Re=6.5 \cdot 10^6$. Es wird ein C-förmiges Rechennetz mit 385×65 Netzpunkten verwendet. Der Abstand des ersten Gitterpunktes von der Wand beträgt 10^{-5} Profillängen. Bild 3 zeigt den Einfluß des Dissipationskoeffizienten $k^{(4)}$ auf das Konvergenzverhalten des Verfahrens. Die Spitzen im Residuenverlauf zu Beginn der Rechnungen zeigen die sukzessive Netzverfeinerung an. Mit einem mittleren Wert von

$k^{(4)}$ werden etwa 500-600 Mehrgitterzyklen auf dem feinsten Netz benötigt, um $\| |\partial p / \partial t| \|_2$ um 10 Größenordnungen zu vermindern. Ferner zeigt sich, daß der Dissipationskoeffizient um nahezu eine Größenordnung variiert werden kann, ohne daß die Konvergenz des Verfahrens verloren geht. Das Verhalten des Verfahrens bezüglich der Netzfeinheit und den Vergleich der Rechenergebnisse mit Messungen [9] zeigt Bild 4. Die globalen Eigenschaften der Strömung werden bereits mit dem groben 193×33 Netz aufgelöst. Die Unterschiede zwischen den Netzen 385×65 und 577×97 sind sehr gering. Auffällig ist ferner, daß der Verlauf der Wandschubspannung schon mit 33 Netzpunkten in Normalenrichtung recht genau berechnet wird. Tabelle 1 zeigt anhand verschiedener Konvergenzkriterien, daß eine für praktische Anwendungen hinreichend konvergierte Lösung innerhalb von 100 Mehrgitterzyklen erreicht wird, das entspricht bei einem 385×65 Netz einer Rechenzeit von etwa 150 s auf Cray-2. Ohne Mehrgitteralgorithmus werden dagegen je nach Konvergenzkriterium zwischen fünf- und zehnfach höhere Rechenzeiten benötigt.

Als nächstes wird das Rechenverfahren auf die transsonische Umströmung des ONERA-M6 Tragflügels angewendet. Das Rechenetz weist eine C-Struktur im Profilschnitt und eine O-Struktur im Spannweitenschnitt auf. Es werden 289 Netzpunkte im Profilschnitt, 65 normal zur Oberfläche und 49 in Spannweitenrichtung verwendet. Der Abstand des ersten Netzpunktes von der Oberfläche beträgt 10^{-5} der örtlichen Flügeltiefe. Für die Anströmbedingungen $Ma_\infty = 0.84$, $\alpha = 3.06^\circ$, $Re = 11 \cdot 10^6$ liegt eine weitgehend anliegende Strömung vor. Bild 5 zeigt den Konvergenzverlauf der Rechnung und die Druckverteilungen in verschiedenen Spannweitenschnitten, wobei auch die Ergebnisse auf einem etwas gröberen Netz mit $193 \times 49 \times 33$ Punkten mit angegeben sind. Insgesamt liegt eine gute Übereinstimmung mit den Messungen nach [10] vor. Unterschiede in den Ergebnissen für die beiden Netze ergeben sich in der Nähe von Verdichtungsstößen, wo das feinere Netz die großen Gradienten der Strömungsgrößen besser auflöst. Für die Anströmbedingungen $Ma_\infty = 0.84$, $\alpha = 6.06^\circ$, $Re = 11 \cdot 10^6$ zeigt Bild 6, daß die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung hier weniger gut ist. Anhand der berechneten Wandstromlinien erkennt man die Bereiche abgelöster Strömung auf der Flügeloberseite. Das Turbulenzmodell [2] liefert hier zu hohe Werte der Wirbelviskosität μ_t , was zu einer zu kleinen Ablöseblase führt. Aus Tabelle 1 kann entnommen werden, daß für die praktische Anwendung des Verfahrens 100 Mehrgitterzyklen für eine stationäre Lösung ausreichen. Das entspricht bei dem $193 \times 49 \times 33$ Netz einer Rechenzeit von 40 min auf Cray-2.

Zusammenfassung

Es wurde über ein Finite-Volumen Verfahren für die Navier-Stokesschen Gleichungen berichtet. Es beruht auf einem Zelleckpunktschema mit zentralen Differenzen und einem expliziten mehrstufigen Runge-Kutta Zeitschrittverfahren. Für eine gute Konvergenz zur stationären Lösung werden lokale Zeitschritte, eine implizite Glättung der Residuen, ein Mehrgitteralgorithmus und sorgfältig kontrollierte künstliche dissipative Terme verwendet. Rechenergebnisse zeigen, daß konvergierte Lösungen für ebene

transsonische Profilmströmungen mit 25000 Netzpunkten 2-3 Minuten und für dreidimensionale Tragflügel mit 300000 Punkten 40 Minuten Rechenzeit auf einem Cray-2 Rechner benötigen. An dem Einbau alternativer Turbulenzmodelle für eine genauere Berechnung von Strömungen mit großen Ablösegebieten wird derzeit gearbeitet.

Anerkennung

Das hier beschriebene Verfahren entstand im Rahmen einer Kooperationsvereinbarung zwischen der DFVLR und der NASA während eines Aufenthalts des ersten Autors im NASA-Langley Research Center. Die Autoren möchten sich bei R. C. Swanson und V. N. Vatsa, NASA LaRC für zahlreiche fruchtbare Diskussionen und bei B. W. Wedan, Vigyan Research Associates, Inc. für die Erstellung von Rechnernetzen bedanken.

Literatur

- [1] Radespiel, R. : A Cell-Vertex Multigrid Method for the Navier-Stokes Equations. NASA-TM, in Vorbereitung.
- [2] Baldwin, B.S.; Lomax, H. : Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. AIAA Paper 78-257, (1978).
- [3] Rossow, C.-C. : Berechnung von Strömungsfeldern durch Lösung der Euler-Gleichungen mit einer neuen Finite-Volumen Diskretisierungsmethode. Dissertation TU-Braunschweig 1988.
- [4] Radespiel, R.; Rossow, C.-C. : A Cell-Vertex Finite Volume Scheme for the Two-Dimensional Navier-Stokes Equations. DFVLR-IB 129-87/40, (1987).
- [5] Radespiel, R.; Swanson, R.C. : An Investigation of Cell Centered and Cell Vertex Multigrid Schemes for the Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 89-0548, (1989).
- [6] Martinelli, L. : Calculations of Viscous Flows with a Multigrid Method. Ph.D. Dissertation, MAE Department, Princeton University, (1987).
- [7] Whitfield, D.L.; Janus, J.M. : Three-Dimensional Unsteady Euler Equations Solution Using Flux Vector Splitting. AIAA Paper 84-1552, (1984).
- [8] Jameson, A. : A Vertex Based Multigrid Algorithm for Three-Dimensional Compressible Flow Calculations. In "Numerical Methods for Compressible Flow - Finite Difference, Element and Volume Techniques", ed. T.E. Tezduar and T.J.R. Hughes, ASME Publication AMD 78, (1986).
- [9] Cook, P.H.; McDonald, M.A.; Firmin, M.C.P. : Aerofoil Rae 2822 - Pressure Distributions and Boundary Layer and Wake Measurements. AGARD-AR-138, (1979).
- [10] Schmitt, V.; Charpin, F. : Pressure Distributions on the ONERA-M6-Wing at Transonic Mach Numbers. AGARD-AR-138, (1979).

Fall	Netz	$k^{(4)}$	1% C_A	0.1% C_A	10^{-5} Red.	C_A	C_w
RAE 2822	385x65	1/64	23 (50)	49 (82)	278 (346)	0.8402	0.01738
$Ma_\infty=0.73$	385x65	1/32	23 (50)	49 (82)	198 (265)	0.8356	0.01730
$\alpha=0.73$	385x65 *)	1/32	1080 (518)	1970 (957)	2950 (1418)	0.8356	0.01730
$Re=6.5 \cdot 10^6$							
ONERA-M6	288x65x49	1/32	6 (886)	54 (3745)	~460(27580)	0.2689	0.01784
$Ma_\infty=0.84$							
$\alpha=3.06^\circ$							
$Re=11.0 \cdot 10^6$							
ONERA-M6	288x65x49	1/32	21 (2012)	44 (3362)	-	0.5380	0.05559
$Ma_\infty=0.84$							
$\alpha=6.06^\circ$							
$Re=11.0 \cdot 10^6$							

*) ohne Mehrgitteralgorithmus, nur feinstes Netz

Tabelle 1 : Konvergenzverhalten des Verfahrens für zwei- und dreidimensionale Strömungen. Zahlen geben die für das jeweilige Konvergenzkriterium erforderlichen Mehrgitterzyklen auf dem feinsten Netz an. Zahlen in Klammern geben die Sekunden in Rechenzeit auf Cray-2 an.

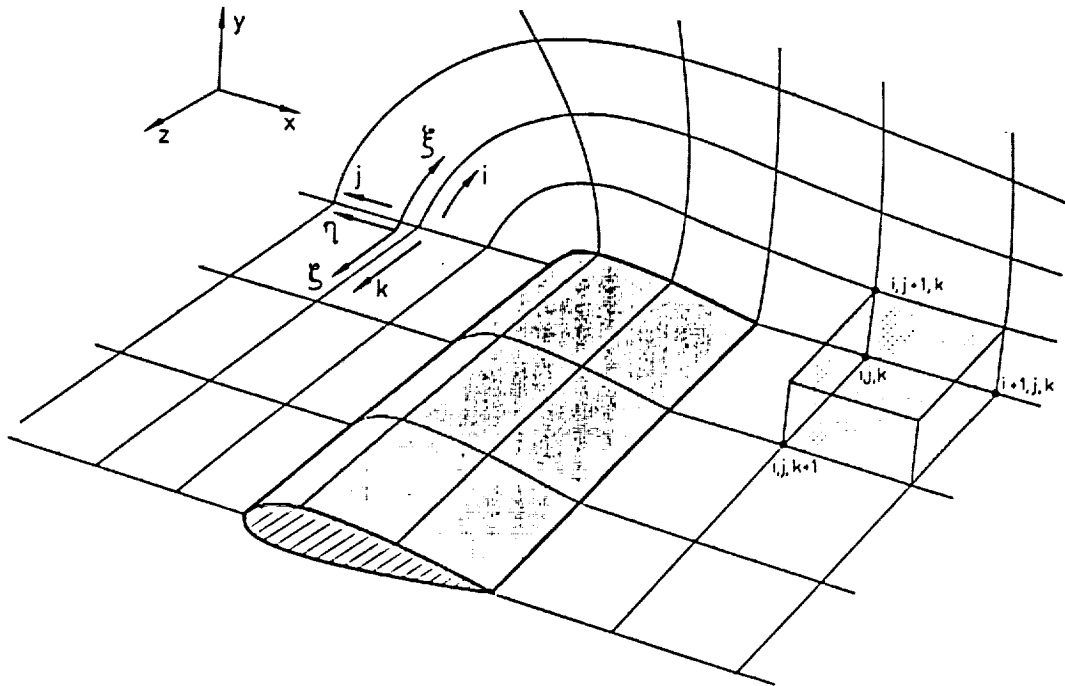


Bild 1 : Dreidimensionales körperangepasstes Rechnetz

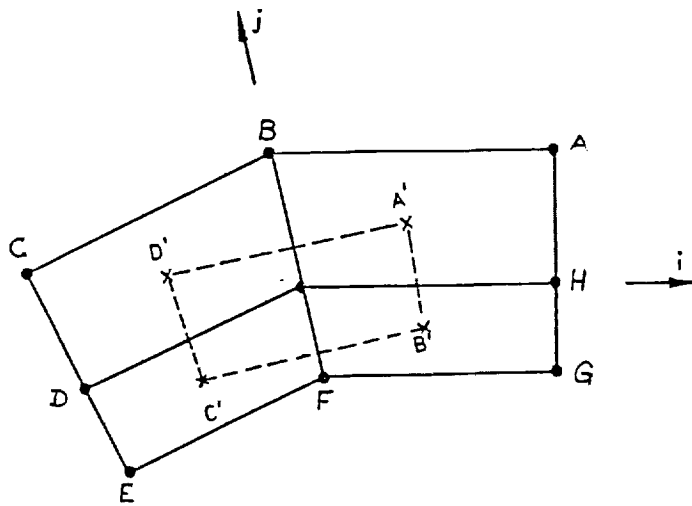


Bild 2 : Kontrollvolumen in einem ebenen Netz

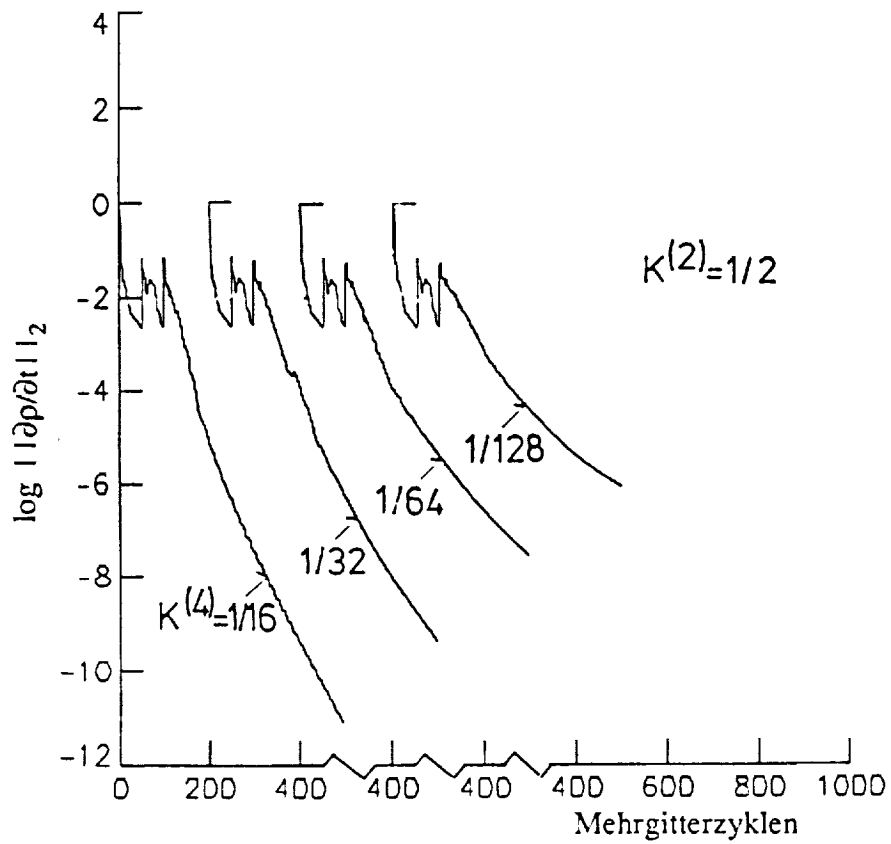
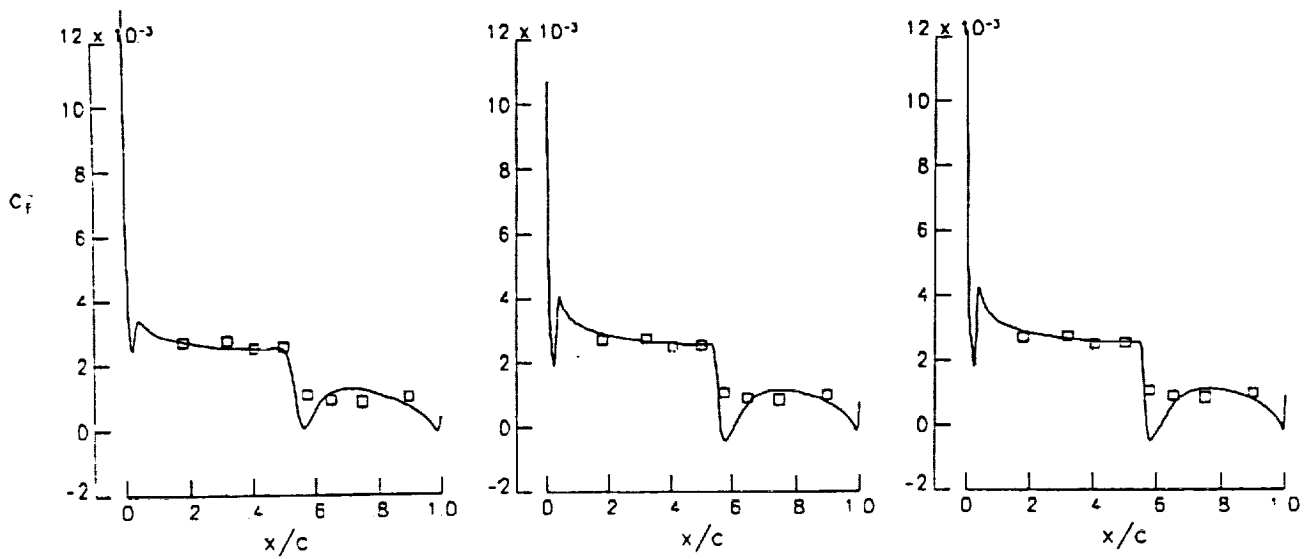
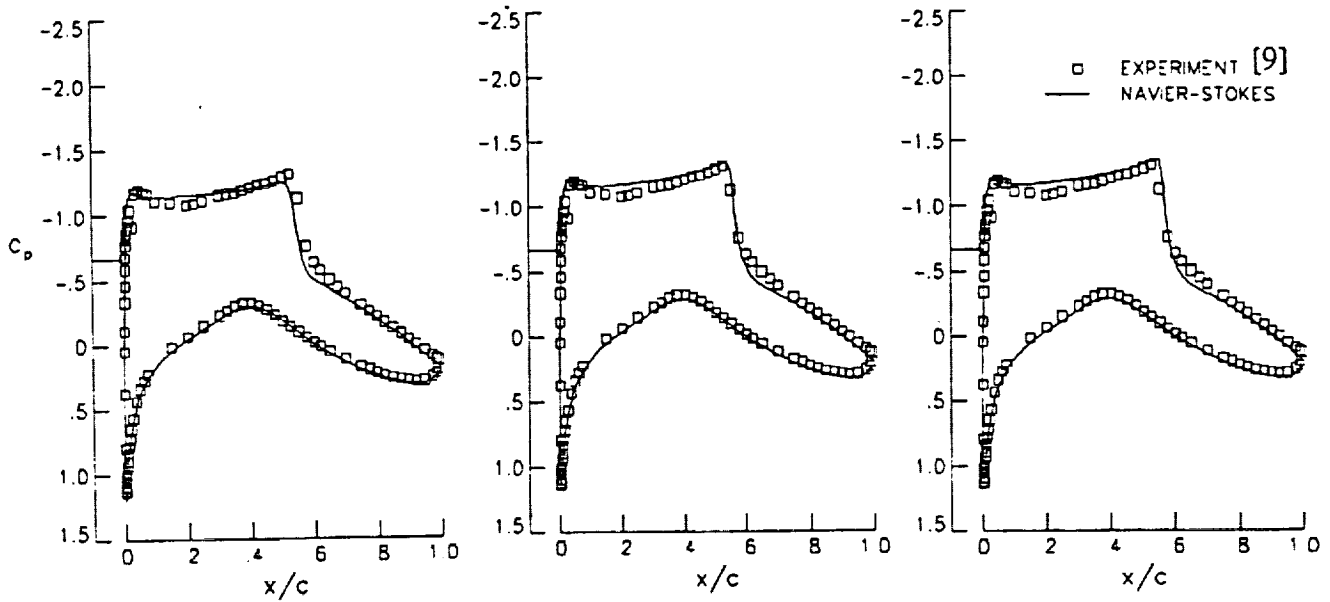


Bild 3 : Einfluß des Dissipationskoeffizienten $k^{(4)}$ auf das Konvergenzverhalten für RAE 2822 Profil, $Ma_\infty=0.73$, $\alpha=2.79^\circ$, $Re=6.5 \cdot 10^6$, Netz 385×65 .

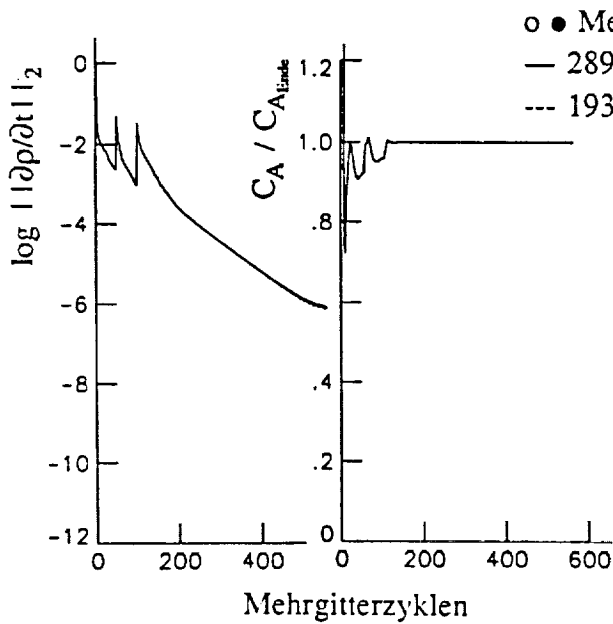
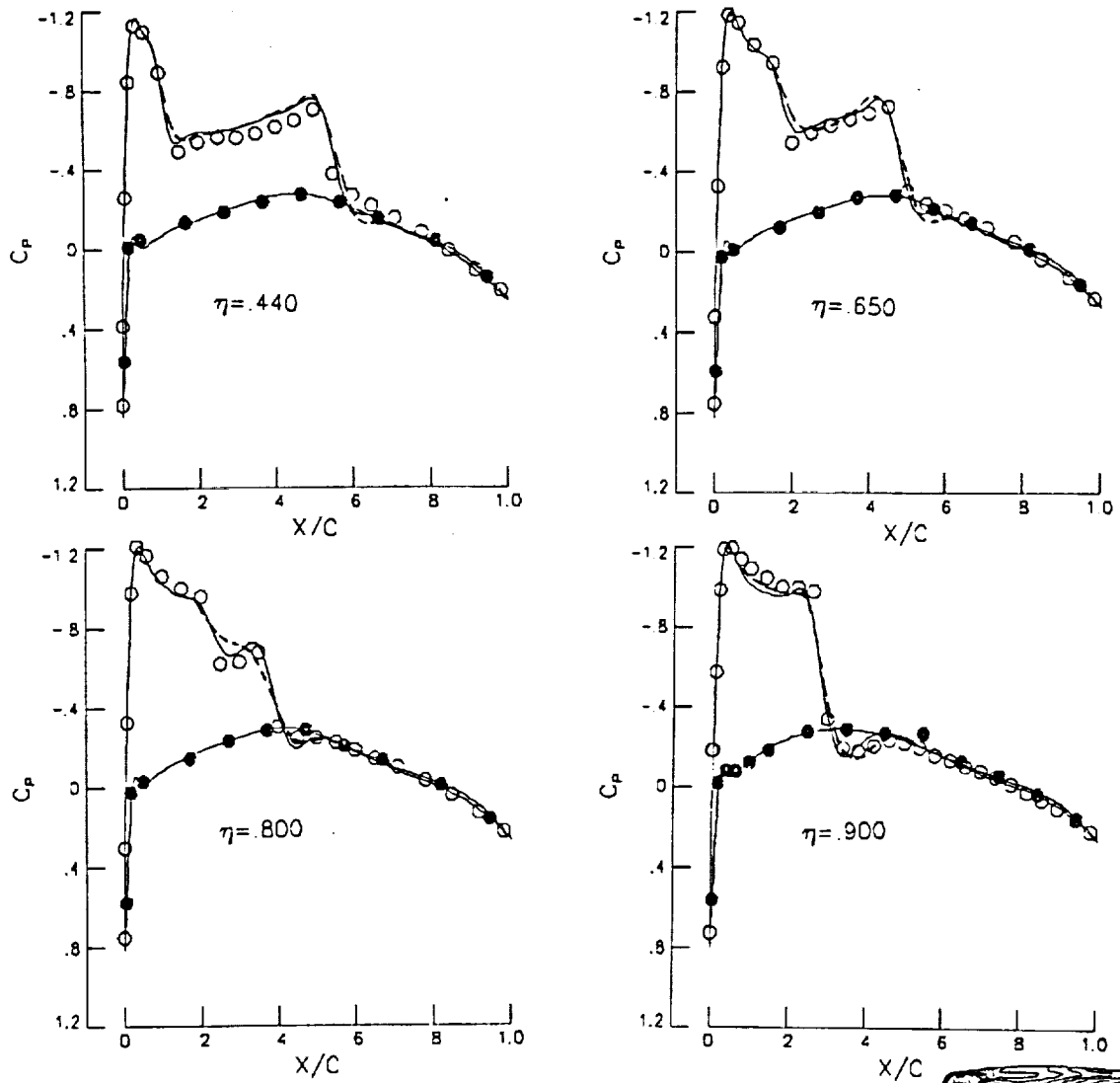


a) 193x33 Netz

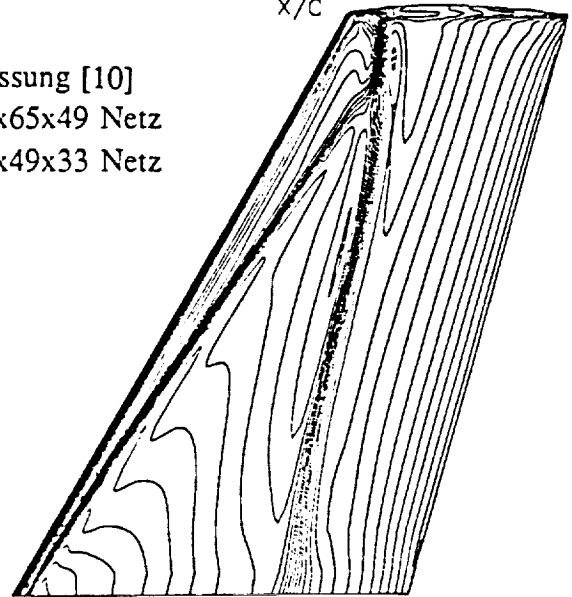
b) 384x65 Netz

c) 577x97 Netz

Bild 4 : Druckverteilungen und Wandschubspannung für verschiedene Netzdichten, RAE 2822 Profil, $Ma_\infty=0.73$, $\alpha=2.79^\circ$, $Re=6.5 \cdot 10^6$, $k^{(4)}=1/64$.

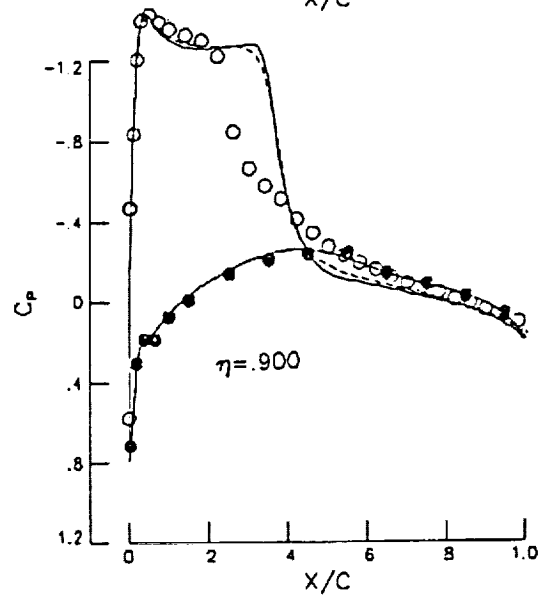
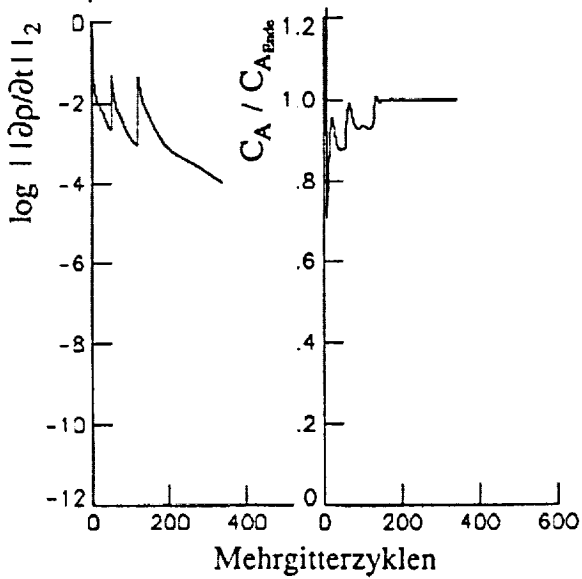
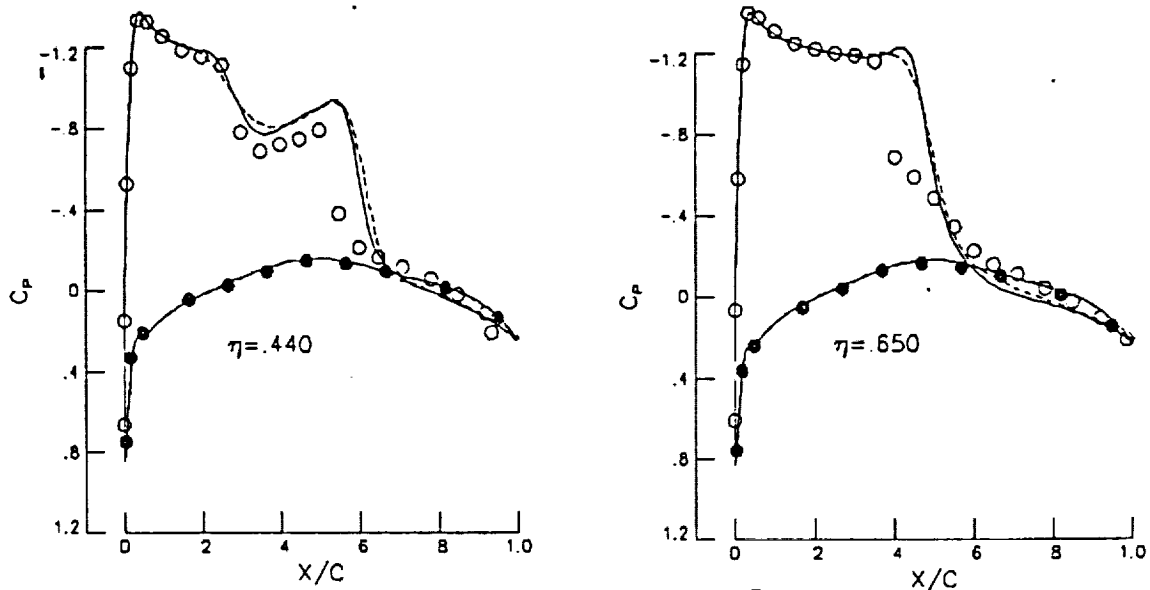


o ● Messung [10]
 — 289x65x49 Netz
 --- 193x49x33 Netz



Isobaren auf der Flügeloberseite

Bild 5 : Konvergenzverhalten und Druckverteilungen für ONERA-M6 Flügel, $Ma_\infty=0.84$, $\alpha=3.06^\circ$, $Re=11 \cdot 10^6$.



o ● Messung [10]
 — 289x65x49 Netz
 --- 193x49x33 Netz

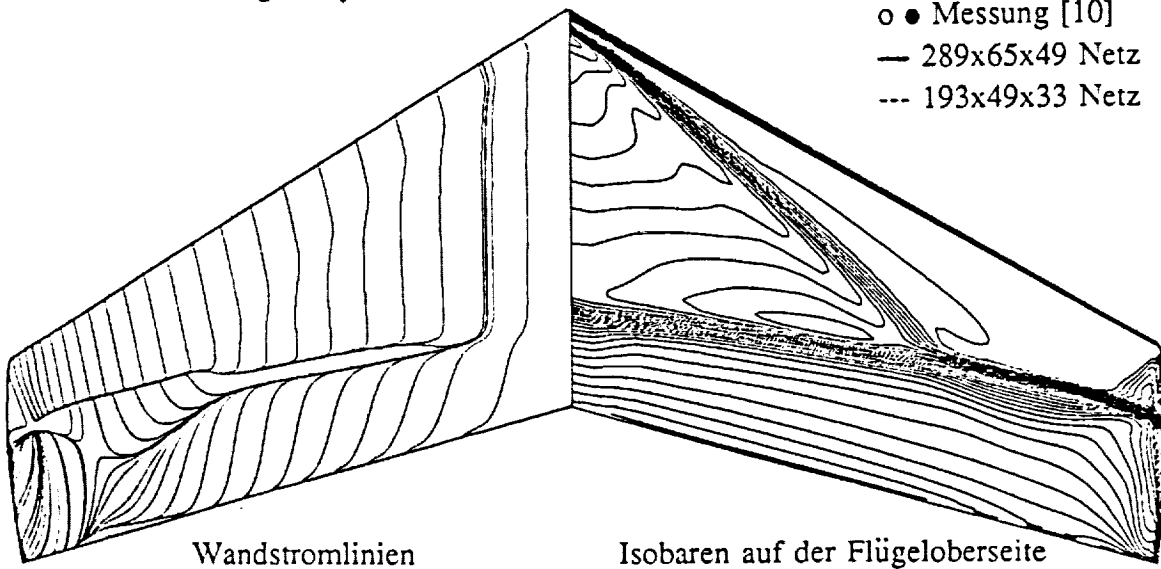


Bild 6 : Konvergenzverhalten, Druckverteilungen und Wandstromlinien für ONERA-M6 Flügel, $Ma_\infty=0.84$, $\alpha=6.06^\circ$, $Re=11 \cdot 10^6$.