

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik III WS 2007/2008	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	---	---

Aufgabenblatt 8

8.1 Wiederholung Quantenmechanik

\underline{A} sei ein hermitescher Operator mit diskretem Spektrum.

- Formulieren Sie die Eigenwertgleichung für \underline{A} . Welche Eigenschaften haben die Eigenwerte, welche die Eigenvektoren?
- Wie lautet die Spektraldarstellung von \underline{A} ?
- $f(\underline{A})$ sei eine Funktion des Operators \underline{A} . Wie lauten die Eigenwerte, wie die Eigenvektoren und wie die Spektraldarstellung?
- $|\phi\rangle$ sei ein beliebiger Zustandsvektor des Hilbertraumes. Wie lautet der Erwartungswert von \underline{A} bezüglich $|\phi\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten messe ich die Eigenwerte von \underline{A} , wenn das System im Zustand $|\phi\rangle$ ist? Überprüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten sich insgesamt zu Eins addieren.

8.2 Zweiniveausystem im kanonischen Ensemble

Ein Quantensystem, z.B. ein einzelner Spin mit $s = 1/2$ im homogenen Magnetfeld, habe zwei Energieniveaus mit Energien $E_1 < E_2$.

- Stellen Sie die Zustandssumme auf.
- Berechnen Sie die innere Energie U und stellen Sie U als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar. Dabei sei $\Delta = E_2 - E_1$.
- Gegen welche Werte geht U für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$.
- Berechnen Sie die Wärmekapazität C und stellen Sie C/k_B als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar.
- Gegen welche Werte geht C für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$.
- Stellen Sie die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der beiden Niveaus als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar.
- Berechnen Sie die Entropie S und stellen Sie S als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar.
- Gegen welche Werte geht S für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$.

- i. In einem Zweiniveausystem kann eine sogenannte Besetzungsinversion auftreten, die man formal durch eine negative Temperatur charakterisieren kann. Wie groß ist $k_B T / \Delta$, wenn die Besetzungszahl des oberen Niveaus 0.8 und die des unteren 0.2 ist?

8.3 Paramagnet im äußeren Magnetfeld

Ein einzelner Spin der Spinquantenzahl s befinde sich im äußeren homogenen Magnetfeld der Stärke B . Die Wechselwirkung des Spins mit dem Magnetfeld wird durch den Zeeman-Term beschrieben.

- a. Wie lautet der Hamiltonoperator?
- b. Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von \tilde{H} an.
- c. Ermitteln Sie die Zustandssumme im kanonischen Ensemble.
- d. Leiten Sie die innere Energie sowie die Wärmekapazität als Funktion von T und B her.
- e. Leiten Sie ebenfalls die Magnetisierung und die Suszeptibilität als Funktion von T und B her. Welchen Wert nimmt die Magnetisierung für $T \rightarrow 0$ an? Erklären Sie diesen Sachverhalt.
- f. Stellen Sie in einem Diagramm die Energieniveaus für $s = 1$ bei nichtverschwindendem Magnetfeld sowie die zugehörige innere Energie in Abhängigkeit von der Temperatur dar. Überlegen Sie sich, welche dimensionslosen Größen sie auftragen.

8.4 Unabhängige Teilchen im Kastenpotential

Ein dreidimensionales unendlich tiefes Kastenpotential der Ausdehnung $L \times L \times L$ werde von N unabhängigen, d.h. nicht wechselwirkenden Teilchen bevölkert.

- a. Wie lautet der Hamiltonoperator?
- b. Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von \tilde{H} an.
- c. Die exakte Zustandssumme wurde in der Vorlesung behandelt. Ermitteln Sie die Zustandssumme im kanonischen Ensemble numerisch (z.B. mit Mathematica), indem Sie statt der vollständigen Spur nur die ersten, d.h. energetisch tiefsten n_{\max} Eigenzustände berücksichtigen (z.B. mit $n_{\max} = 500$).
- d. Berechnen Sie daraus die innere Energie und die Wärmekapazität und stellen Sie diese graphisch dar.
- e. **Zusatzaufgabe:** Bilden Sie die Ableitung $\frac{\partial U}{\partial V}$. Wie groß müßte diese eigentlich für das ideale Gas sein? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.