Wann ist aber möglich eine Matrix zu diagonalisieren? Das kann z.B mit Hilfe der algebraischen und geometrischen Vielfachheit der Eigenwerte beantwortet werden.

1.5 Algebraische/geometrische Vielfachheit.

$A \in K^{n \times n}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ EW von A

Vielfachheit von λ_0

geometrische $= \dim E_A(\lambda_0)$

algebraische Vielfachheit von λ_0 als Nullstelle von $p_A(\lambda)$.

Bsp 1.5.1 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^3$$

Also ist 4 EW von A mit algebraischer Vielfachheit 3

$$E_A(4) = \operatorname{Kern}(A - 4I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aber $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also

$$E_A(4) = \text{lin}\underbrace{\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}_{\text{linear unabhängig.}} \Rightarrow \dim E_A(4) = 2.$$

Also hat 4 geometrische Vielfachheit

2.

Bem 1.5.1 $2 \leq 3$ allgemein gilt

geometrische Vielfachheit eines EW $\leq$ algebraische Vielfachheit des EW

Satz 1.5.1 Sei $A \in K^{n \times n}$ mit

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{a_1} (\lambda_2 - \lambda)^{a_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{a_k}$$

und sei $g_j = \dim E_A(\lambda_j)$.

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n.)$ Dann

$$A \text{ diagonalisierbar} \iff \sum_{j=1}^{k} g_j = n \iff a_j = g_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Bsp 1.5.2. Die Matrix A von Bsp 1.5.1 ist nicht diagonalisierbar weil $3 \neq 2$.

Beweisidee: $g_j \leq a_j$ (Bem 1.5.1) und A ist diagonalisierbar nach Satz 1.4.1 genau dann wenn es eine Basis gibt von $\mathbb{C}^n$ aus EV von $A \iff$

$$\sum_{j=1}^{k} g_j = n \iff g_j = a_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}.$$

1.6 Symmetrische und hermetesche Matrizen

Def $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = A^T$ heißt symmetrisch und, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A = A^*$ heißt hermitesch oder selbstadjungiert.

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A.$

Also ist A symmetrisch.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sei $B = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$.

Dann $B^* = \overline{(B^T)}$

$$= \overline{\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1-i} \\ \overline{1+i} & \overline{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} = B$$

<u>Satz:</u> Eine hermitesche Matrix ($A^*=A$) hat nur reelle Eigenwerte. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal (d.h $A\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1$ $A\vec{v}_2=\lambda_2\vec{v}_2$ und $\lambda_1\neq\lambda_2$ dann $(\vec{v}_1|\vec{v}_2)=0$).

<u>Erinnerung:</u> (1) In $\mathbb{C}^n$ gilt $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$

dann $(\vec{u}|\vec{v})=\sum_{j=1}^{n}u_j\overline{v_j}$ also $(\vec{u}|\vec{v})=\overline{(\vec{v}|\vec{u})}$. (1)

(2) In $\mathbb{R}^n$ gilt $(A\vec{u}|\vec{v})=(\vec{u}|A^T\vec{v})$

In $\mathbb{C}^n$ gilt $(A\vec{u}|\vec{v})=(\vec{u}|A^*\vec{v})$.

Also wenn $A=A^*$ dann

$$(A\vec{u}|\vec{v})=(\vec{u}|A\vec{v}). \quad (2)$$

<u>Beweis</u> $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ dann

$$(\vec{v}|A\vec{v})=\lambda(\vec{v}|\vec{v})=\lambda\underbrace{\|\vec{v}\|^2}_{\text{reell}}$$

Aus (1) $(A\vec{v}|\vec{v})=\overline{(\vec{v}|A\vec{v})}$

Aus (2) $(A\vec{v}|\vec{v})=(\vec{v}|A\vec{v})$

$\Rightarrow (\vec{v}|A\vec{v})=\overline{(\vec{v}|A\vec{v})}$.

$\Rightarrow (\vec{v}|A\vec{v})\in\mathbb{R}$ also $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ist $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dann

$$\lambda_1 (\vec{v}_1 | \vec{v}_2) = (\lambda_1 \vec{v}_1 | \vec{v}_2) = (A\vec{v}_1 | \vec{v}_2) \overset{(2)}{=} (\vec{v}_1 | A\vec{v}_2)$$

$$= (\vec{v}_1 | \lambda_2 \vec{v}_2) \underset{\text{da } \lambda_2 \in \mathbb{R}}{=} \lambda_2 (\vec{v}_1 | \vec{v}_2). \Longrightarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{v}_1 | \vec{v}_2) = 0 \xRightarrow{\lambda_1 \neq \lambda_2} (\vec{v}_1 | \vec{v}_2) = 0.$$

Erinnerung: $S \in K^{n \times n}$ heißt unitär [orthogonal] wenn $S^*S = I$ [bzw $S^tS = I$]

S ist unitär [orthogonal] $\Longleftrightarrow$ die Spalten von S bilden ONB von $\mathbb{C}^n$ [bzw $\mathbb{R}^n$].

Satz Jede hermitesche [symmetrische] Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ [$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$]. lässt sich diagonalisieren, wobei die Matrix S unitär [orthogonal] gewählt werden kann.

Bsp 1.6.2 Sei $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie eine orthogonale Matrix S so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist.

Lö: $S = (\vec{s}_1 \mid \vec{s}_2)$ (Basis von $\mathbb{R}^2$ aus EV) (muss orthonormal sein).

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda-3)-4$$

$$= \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

$$(A - 2I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff 2a + b = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\Rightarrow E_A(2) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ähnlich $E_A(7) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal aber keine ONB (Länge $\neq 1$). Aber $\vec{v}_1 = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\vec{v}_2 = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden ONB von EV

Also $S = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Motivation für das nächste Kapitel

Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f \in C^2$ und $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ [bzw $f''(x_0) < 0$] $\Rightarrow$ f hat lokales Minimum [bzw lok Maximum] in x_0.

Ist eine analoge Aussage Möglich für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$? In diesem Fall, wie wir lernen werden, ist $f \in C^2$ dann f'' ist eine $n \times n$ Matrix, und eine analoge Aussage ist Möglich mit Hilfe der Definitheit von Matrizen.

1.7 Definitheit reeller symmetrischer Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

(i) A heißt <u>positiv definit</u> [bzw. negativ definit], wenn $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ [bzw $\vec{x}^T A \vec{x} < 0$] $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

(ii) A heißt <u>positiv semidefinit</u> [bzw negativ semidefinit], wenn $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ [bzw $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$] $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

(iii) A heißt <u>indefinit</u>, falls $\exists \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
$\vec{x}^T A \vec{x} > 0$, $\vec{y}^T A \vec{y} < 0$.

<u>Bsp 1.7.1</u> Die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit:

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. $\vec{x}^T A \vec{x} =$

$$(x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 (2x_1 + x_2) + x_2 (x_1 + x_2) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$$

$$= x_1^2 + x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0$$

weil $x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow$
$x_1 = x_2 = 0$.

Bsp: Die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit

da z.B

$$(1 \ \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0.$$

und

$$(1 \ \ -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \ \ -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

Bsp 1.7.3 Die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ist negativ semidefinit; Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dann

$$(x_1 \ \ x_2 \ \ x_3) \, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_1^2 - 2x_2^2 \leq 0.$$

aber $-x_1^2 - 2x_2^2$ nicht immer < 0

da $(0 \ \ 0 \ \ 1) \, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ \ 0 \ \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Satz 1.7.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

Dann A ist

$$\left.\begin{array}{ll} \text{positiv definit} & \lambda > 0 \\ \text{negativ definit} & \lambda < 0 \\ \text{positiv semidefinit} \Longleftrightarrow & \lambda \geq 0 \\ \text{negativ semidefinit} & \lambda \leq 0 \end{array}\right\} \text{für alle Eigenwerte } \lambda.$$

indefinit — Es gibt positive und negative EW

$\boxed{\text{Bsp } 1.7.4}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. A ist symmetrisch

und $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1) - 4 = \lambda(\lambda-5)$

$\leadsto$ EW $0, 5$ alle ≥ 0 also ist A positiv semidefinit.

Beweisidee für $n=2$, Fall positiver EWe.

A symmetrisch $\Longrightarrow \exists\, S$ orthogonal

mit $S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. $(S^T S = I \Rightarrow S^T = S^{-1})$.

Dann $\vec{y}^T A \vec{y} = (S\vec{x})^T A S\vec{x} = \vec{x}^T S^T A S \vec{x}$

$= \vec{x}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 > 0$.

Kriterium von Hurwitz: Eine symmetrische Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle <u>Hauptunterdeterminanten</u> sind positiv

d.h. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall m = 1, \ldots, n.$$

<u>Bsp 1.75</u> $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$ ist

positiv definit da

$$\begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}^{-2} + 2 \overbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}^{5} = 8 > 0.$$

Anwendungen: Stabilität, lokale Extremstellen Funktionen mehrerer Variablen.