Gesetz des ausgeschlossenen Dritten aufgegeben ist. Es ist freilich bewiesen worden, daß dieses System inkonsistent ist. Siehe Anm. 50.

[50] Cf. S. C. Kleene und J. B. Rosser, „The Inconsistency of Certain Formal Logics“, *Annals of Math.*, Vol. 36 (1935), S. 630.

[51] Denn dies würde die Existenz eines Entscheidungsverfahrens für alle arithmetischen Propositionen implizieren. Cf. A. M. Turing, *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 42 (1936), S. 230.

[52] Cf. auch F. P. Ramsey, *loc. cit.* (Anm. 28), wo allerdings das Unendlichkeitsaxiom nicht erreicht werden kann, weil es so interpretiert wird, daß es sich auf die Individuen in der Welt bezieht.

[53] Die beiden Bedeutungen des Terms *analytisch* könnten vielleicht unterschieden werden als tautologisch und analytisch.

[54] Diese Ansicht widerspricht nicht der oben vertretenen Meinung, daß die Mathematik auf Axiomen mit einem realen Inhalt basiert, denn gerade die Existenz des Konzepts von, z. B., „Klasse“ konstituiert bereits ein solches Axiom; denn wenn man, z. B., „Klasse“ und „ε“ definierte als „die Konzepte, welche den Axiomen genügen“, wäre man nicht imstande, ihre Existenz zu beweisen. „Konzept“ könnte vielleicht in Termini von „Proposition“ definiert werden (cf. S. XXV) (obwohl ich nicht glaube, daß dies ein natürliches Vorgehen wäre); aber dann werden gewisse Axiome über Propositionen angenommen werden müssen, die sich nur unter Bezug auf den undefinierten Sinn dieses Terms rechtfertigen lassen. Es ist zu beachten, daß diese Ansicht über Analytizität es wiederum möglich macht, daß jede mathematische Proposition vielleicht auf einen Spezialfall von a = a reduziert werden könnte, wenn nämlich die Reduktion nicht kraft der Definitionen der vorkommenden Terme vorgenommen wird, sondern kraft ihres Sinns, der niemals vollständig in einer Menge von formalen Regeln ausgedrückt werden kann.

[55] *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, herausgegeben von C. J. Gerhardt, Bd. 7 (1890), S. 12. Cf. auch G. Vacca, „La logica di Leibniz“ (Abschnitt VII), *Riv. di Mat.*, Bd. 8 (1902—1906), S. 72, und das Vorwort im ersten Band der ersten Abteilung von *Leibniz's Sämtliche Briefe und Schriften*, herausgegeben von der Preussischen Akademie der Wissenschaften (1923 ff.).

[56] Leibniz, *Philosophische Schriften* (hrsg. v. Gerhardt), Bd. 7, S. 187. A. d. Ü.: Gödel gibt den lateinischen Text von Leibniz in freier Paraphrase wieder.

[57] Ich möchte Prof. Alonzo Church, Princeton University, der mir behilflich war, an einigen Stellen die korrekten englischen Ausdrücke zu finden, meinen Dank ausdrücken.

Inhaltsübersicht.

Erster Teil.

ERSTER TEIL

(1910)

Vorwort.

Die mathematische Behandlung der Grundlagen der Mathematik, die den Gegenstand des vorliegenden Werkes bildet, ist aus der Verbindung zweier verschiedener Forschungsrichtungen — beide im Wesen recht modern — hervorgegangen. Einerseits das Werk der Meister der Analysis und der Geometrie, sofern sie ihre Axiome formulierten und systematisierten, und das Werk von CANTOR und andern über Gebiete, wie die Mengentheorie. Anderseits die symbolische Logik, die nach einer notwendigen Entwicklungsperiode jetzt dank PEANO und seinen Nachfolgern die technische Verwendbarkeit und logische Bündigkeit erreicht hat, die wesentlich sind für ein mathematisches Hilfsmittel zur Behandlung dessen, was bisher die Grundlagen der Mathematik gebildet hat. Aus der Verbindung dieser zwei Forschungsrichtungen entspringen zwei Ergebnisse, nämlich: 1. Daß, was früher stillschweigend oder ausdrücklich als Axiom angenommen wurde, unnötig oder beweisbar ist; 2. daß dieselben Methoden, durch die vermeintliche Axiome bewiesen werden, auch schätzenswerte Resultate in Gebieten, wie dem der unendlichen Zahl, ergeben, die früher als unzugänglich für den Menschengeist betrachtet wurden. So wurde das Gebiet der mathematischen Wissenschaften durch das Hinzukommen neuer Gegenstände und durch eine nachträgliche Ausdehnung über bisher der Philosophie überlassene Provinzen bereichert.

Die vorliegende Arbeit gedachten wir ursprünglich in einen zweiten Band der „Principles of Mathematics" aufzunehmen. Mit diesem Ziel vor Augen begannen wir seine Niederschrift im Jahre 1900. Im Fortschreiten aber wurde es immer klarer, daß der Gegenstand viel ausgebreiteter ist, als wir gedacht hatten; überdies sind wir in vielen Grundfragen, die im früheren Werk dunkel und zweifelhaft geblieben waren, jetzt zu — wie wir glauben — befriedigenden Lösungen gelangt. Es wurde daher notwendig, unser Buch von den „Principles of Mathematics" unabhängig zu machen. Wir haben jedoch Kontroversen und allgemeines Philosophieren vermieden und unsere Aufstellungen in dogmatischer Form gemacht.

Das läßt sich dadurch rechtfertigen, daß die hauptsächliche Begründung für irgendeine Theorie über die Grundlagen der Mathematik immer induktiv sein muß, d. h. sie muß in der Tatsache liegen, daß uns die betreffende Theorie befähigt, die gewöhnliche Mathematik daraus zu deduzieren. In der Mathematik ist der höchste Grad von innerer Gewißheit gewöhnlich nicht gleich am Anfang zu finden, sondern an einem späteren Punkt; daher geben die früheren Ableitungen, bis sie diesen Punkt erreichen, eher Grund, die Voraussetzungen zu glauben, weil wahre Folgerungen daraus hervorgehen, als die Folgerungen zu glauben, weil sie aus den Voraussetzungen hervorgehen.

Beim Aufbau eines deduktiven Systems, wie es das vorliegende Werk enthält, gibt es zwei entgegengesetzte Aufgaben, die nebeneinander zu erfüllen sind. Einerseits haben wir die gegebene Mathematik zu analysieren mit dem Bestreben, aufzudecken, welche Voraussetzungen darin stecken, ob diese Voraussetzungen verträglich sind und ob sie der Zurückführung auf noch fundamentalere Voraussetzungen fähig sind. Anderseits haben wir, wenn wir die Entscheidung über unsere Voraussetzungen getroffen haben, daraus wiederum von den früher analysierten Gegebenheiten, soviel nötig scheinen mag, zu rekonstruieren und so viel andere Folgerungen aus unseren Voraussetzungen zu ziehen, als um ihres hinlänglich allgemeinen Interesses willen ausdrückliche Aufstellung verdienen. Die vorgängige analytische Arbeit erscheint nicht mehr in der endgültigen axiomatischen Darstellung, die bloß das Ergebnis der Analyse in gewissen undefinierten Begriffen und unbewiesenen Sätzen herausstellt. Dabei wird nicht behauptet, die Analyse hätte nicht mehr weiter fortgeführt werden können: wir haben keinen Grund zu glauben, daß es unmöglich ist, noch einfachere Begriffe und Axiome zu finden, mittels deren die, von denen wir ausgehen, definiert und bewiesen werden könnten. Alles, was behauptet wird, ist nur, daß die Begriffe und Axiome, von denen wir ausgehen, hinreichend, nicht, daß sie notwendig sind.

Bei den Ableitungen aus unseren Voraussetzungen hielten wir es für wesentlich, sie so weit zu führen, bis wir so viel Wahrheiten bewiesen haben, als in dem liegen, was gewöhnlich für ausgemacht gilt. Wir hielten es aber nicht für wünschenswert, uns allzu peinlich an diese Aufgabe zu halten. Es ist üblich, nur Spezialfälle zu betrachten, auch wenn es mit unseren Mitteln ebenso leicht ist, den allgemeinen Fall zu behandeln. So wird z. B. die Arithmetik der Kardinalzahlen meist in Verbindung mit endlichen Zahlen ge-

Kardinalzahlen ?

dacht, ihre allgemeinen Gesetze gelten aber ebenso auch für unendliche Zahlen und werden am leichtesten ohne Rücksicht auf die Unterscheidung zwischen endlich und unendlich bewiesen. Und viele der Eigenschaften, die gewöhnlich Reihen zugeschrieben werden, gelten wieder von Anordnungen, die nicht Reihen im strengen Sinn sind, sondern nur einige der charakteristischen Eigenschaften von Reihenanordnungen haben. In solchen Fällen ist es ein logischer Stilfehler, für eine Teilklasse von Anordnungen zu beweisen, was ebenso gut allgemeiner hätte bewiesen werden können. Ein ähnlicher Verallgemeinerungsprozeß liegt mehr oder minder in unserer ganzen Arbeit. Wir haben immer die allgemeinste, leidlich einfache Hypothese gesucht, von der man zu irgendeiner gegebenen Folgerung gelangen konnte. Aus diesem Grunde liegt — besonders in den späteren Teilen des Buches[1]) — die Bedeutung eines Satzes gewöhnlich in der zugrunde liegenden Hypothese. Die Folgerung wird oft etwas sein, das — in einer gewissen Klasse von Fällen — wohlbekannt ist; aber die Hypothese wird, wenn irgend möglich, weit genug sein, um noch viele Fälle außer denen zuzulassen, bei denen die Folgerung etwas Wohlbekanntes darstellt.

Wir haben es nötig gefunden, sehr ausführliche Beweise zu geben, weil es sonst kaum möglich ist, zu sehen, welche Hypothesen wirklich erforderlich sind und ob unsere Ergebnisse aus unseren ausgesprochenen Voraussetzungen folgen. (Man erinnere sich, daß wir nicht bloß behaupten, diese und jene Sätze seien wahr, sondern auch, daß die von uns aufgestellten Axiome hinreichend seien, sie zu beweisen.) Zugleich sind ausführliche Beweise zwar zur Vermeidung von Irrtümern nötig und um die zu überzeugen, die kein rechtes Zutrauen zu unserer Genauigkeit haben; sie können jedoch in der Regel von einem Leser, der sich nicht gerade für diesen Teil des betreffenden Gegenstandes interessiert und keinen Zweifel an unserer verläßlichen Sorgfalt in der Behandlung des Stoffes hegt, übergangen werden. Der Leser, den nur ein einzelner Teil des Buches interessiert, wird wahrscheinlich für die vorhergegangenen Teile das Auslangen finden, wenn er die Übersichten dieser früheren Teile, Abschnitte und Zahlen[2]) liest, da sie Erklärungen der darin enthaltenen Begriffe und Darstellungen der wichtigsten bewiesenen

---

[1]) Damit ist insbesondere der — nicht übersetzte — Hauptteil des Werkes gemeint. (Anm. d. Übers.).
[2]) Es sind die mit ✱ versehenen im Hauptteil des Werkes gemeint. (Anm. d. Übers.).

Sätze geben. Die Beweise in Teil I, Abschnitt A[1]), sind jedoch notwendig, weil in ihrem Verlaufe das Beweis*verfahren* erklärt wird. Die Beweise der ersten Sätze sind ohne jede Auslassung eines Schrittes gegeben, je mehr aber das Werk fortschreitet, desto mehr sind die Beweise zusammengedrängt; doch bleiben genügend Einzelheiten erhalten, um den Leser instand zu setzen, mit Hilfe der Verweisungen lückenlose Beweise zu rekonstruieren.

Die gewählte Reihenfolge ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich. Z. B. haben wir die Arithmetik der Kardinalzahlen und die Relationenlehre vor den Reihen behandelt, hätten aber auch die Reihen zuerst behandeln können. In weitem Maße aber ist die Reihenfolge durch logische Notwendigkeiten bestimmt.

Ein sehr großer Teil der zur Abfassung des vorliegenden Werkes erforderlichen Arbeit wurde auf die Widersprüche und Paradoxien verwendet, die Logik und Mengenlehre verunstaltet hatten. Wir haben eine große Zahl von Hypothesen zur Behandlung dieser Widersprüche geprüft; viele solche Hypothesen wurden von anderen angeführt und ungefähr ebensoviel von uns selbst erfunden. Bisweilen hat es uns eine Arbeit von einigen Monaten gekostet, uns zu überzeugen, daß eine Hypothese unhaltbar war. Im Laufe so langdauernder Studien wurden wir — wie zu erwarten — dazu geführt, unsere Ansichten von Zeit zu Zeit zu ändern; aber es wurde uns immer klarer, daß man irgendeine Form der Typenlehre annehmen muß, sollten die Widersprüche vermeidbar sein. Die im vorliegenden Werk vertretene spezielle Form der Typenlehre ist nicht logisch unerläßlich und es gibt verschiedene andere, mit der Wahrheit unserer Ableitungen gleich verträgliche Formen. Wir haben diese spezielle Form gewählt, weil die von uns vertretene Lehre uns am einleuchtendsten erscheint und weil es nötig war, wenigstens *eine* völlig bestimmte Theorie zu liefern, die die Widersprüche vermeidet. Aber kaum irgend etwas in unserem Buch würde sich durch die Annahme einer anderen Form der Typenlehre ändern. In der Tat, wir können weiter gehen und sagen: angenommen, es gäbe einen anderen Weg, die Widersprüche zu vermeiden, so wäre doch kein großer Teil unseres Buches — außer dem, der geradezu von Typen handelt — von der Annahme der Typenlehre in irgendeiner Form abhängig, sobald gezeigt ist (und wir machen den Anspruch, dies gezeigt zu haben), daß es *möglich* ist, eine mathematische Logik zu konstruieren, die zu keinen Widersprüchen führt. Man beachte, daß

[1]) Bezieht sich auf den Hauptteil des Werkes; auch besteht nur für ihn diese Notwendigkeit. (Anm. d. Übers.).

der ganze Effekt der Typenlehre negativ ist: sie verbietet gewisse Schlüsse, die sonst gültig wären, aber sie erlaubt nicht *einen*, der sonst ungültig wäre. Daher können wir vernünftigerweise erwarten, daß die Schlüsse, die die Typenlehre erlaubt, gültig blieben, auch wenn die Lehre selbst sich als ungültig herausstellen sollte.

Unser logisches System ist vollständig in den numerierten Sätzen enthalten; diese sind unabhängig von der Einleitung und den Übersichten. Die Einleitung und die Übersichten sind ausschließlich erklärender Natur und bilden keinen Teil der Beweiskette. Die Erklärung der Typenhierarchie in der Einleitung zeigt leichte Abweichungen von der in ∗12 im Hauptteil des Werkes gegebenen. Die letztere Erklärung ist die strengere und die, die den Rest des Buches hindurch angenommen ist.

Die symbolische Form der Darstellung hat sich uns mit Notwendigkeit aufgedrängt: ohne ihre Hilfe wären wir nicht in der Lage gewesen, die erforderliche Beweisführung zu leisten. Sie entwickelte sich als das Ergebnis wirklicher Praxis und wurde nicht überflüssigerweise und nur zu Erklärungszwecken eingeführt. Die allgemeine Methode, die unsere Handhabung logischer Symbole leitet, verdanken wir Peano. Sein großes Verdienst besteht nicht so sehr in bestimmten logischen Entdeckungen, noch auch in den Einzelheiten seiner Bezeichnungsweise (so ausgezeichnet auch beide sind), als in der Tatsache, daß er zuerst zeigte, wie die symbolische Logik von der ungebührlichen Beeinträchtigung durch die Formen der gewöhnlichen Algebra zu befreien sei und daß er sie dadurch zu einem brauchbaren Forschungsmittel machte. Geleitet durch unser Studium seiner Methoden, haben wir doch große Freiheit in der Konstruktion oder Rekonstruktion einer Symbolik walten lassen, die geeignet sein soll, alle Teile des Gegenstandes zu behandeln. Kein Symbol wurde eingeführt außer auf Grund seiner praktischen Verwendbarkeit für die unmittelbaren Zwecke unserer Beweisführung.

In den Anmerkungen und Erklärungen wird sich eine gewisse Zahl von Vorverweisungen finden. Obwohl wir alle vernünftige Vorsicht angewendet haben, um die Verläßlichkeit dieser Vorverweisungen zu sichern, können wir doch natürlich ihre Verläßlichkeit nicht mit derselben Zuversicht garantieren, wie das im Fall von Rückverweisungen möglich ist.

Im einzelnen anzuführen, was wir früheren Schriftstellern verdanken, war nicht sehr oft möglich, da wir alles, was wir übernommen haben, umformen mußten, um es unserm System und unserer Bezeichnungsweise anzupassen. Unsere Hauptabhängigkeit wird für jeden Leser, der mit der Literatur des Gegenstandes vertraut ist, unverkennbar sein. In Sachen der Bezeichnungsweise sind wir soweit als möglich PEANO gefolgt, haben aber seine Bezeichnungsweise, wenn nötig, durch die von FREGE oder SCHRÖDER ergänzt. Ein gut Teil der Symbolik jedoch mußte neu sein, nicht sosehr aus Unzufriedenheit mit der Symbolik anderer, als infolge des Umstandes, daß wir von früher symbolisch nicht dargestellten Begriffen handeln. In allen logisch-analytischen Fragen verdanken wir das meiste FREGE. Wo wir von ihm abweichen, geschieht es meist, weil die Widersprüche zeigten, daß er — wie übrigens alle alten und modernen Logiker — einen Irrtum in seine Voraussetzungen sich hatte einschleichen lassen; ohne die Widersprüche aber wäre es fast unmöglich gewesen, diesen Irrtum aufzudecken. In der Arithmetik und in der Theorie der Reihen gründet unsere ganze Arbeit auf der von GEORG CANTOR. In der Geometrie hatten wir ständig die Schriften von v. STAUDT, PASCH, PEANO, PIERI und VEBLEN zur Hand.

An mehreren Stellen haben wir in kritischen Bemerkungen von Freunden, insbesondere von Mr. G. G. BERRY von der Bodleian Library und von Mr. R. G. HAWTREY Unterstützung gefunden.

Wir haben dem Rat der Royal Society für einen großen Druckkostenzuschuß von 200 Pfund aus dem Government Publication Fund zu danken und auch den Leitern der Universitätsdruckerei, die großzügig den überwiegenden Teil der bei der Herausgabe des Werkes aufgelaufenen Kosten auf sich genommen haben. Der technische Hochstand in allen Abteilungen der Universitätsdruckerei und der Eifer sowie das Entgegenkommen all ihrer Kräfte haben die Korrekturarbeit wesentlich erleichtert.

Der zweite Band ist bereits im Druck und wird mit dem dritten zusammen erscheinen, sobald der Druck beendet werden kann.

Cambridge November, 1910.

A. N. W.
B. R.

Einleitung.

Der Aufbau der mathematischen Logik, die Teil I des vorliegenden Werkes einnimmt, ist von drei verschiedenen Absichten geleitet. Erstens sucht sie die weitestgehende Analyse der Begriffe, von denen sie handelt, und der Prozesse, mit denen sie Beweise führt, zu erzielen und die Zahl der undefinierten Begriffe und unbewiesenen Sätze (genannt *Grund*begriffe bzw. *Grund*sätze), von denen sie ausgeht, aufs äußerste zu vermindern. Zweitens hat sie es in ihrem Aufbau auf die völlig präzise Formulierung mathematischer Sätze durch ihre Symbole abgesehen: solche Formulierung zu sichern, und zwar sie in möglichst einfacher und praktischer Bezeichnungsweise zu sichern, ist das Hauptmotiv bei der Wahl von Grundtermen. Drittens ist das System insbesondere zur Lösung der Paradoxien, die in den letzten Jahren die Vertreter der symbolischen Logik und der Mengenlehre beunruhigt hatten, aufgebaut; man darf hoffen, daß die Typenlehre, sowie sie im Folgenden vorgeführt wird, sowohl zur Vermeidung von Widersprüchen führt, als auch zur Aufdeckung des ganz bestimmten Trugschlusses, der dazu Anlaß gegeben hat.

Die erste und dritte der oben genannten drei Absichten zwingt uns oft zu Methoden, Definitionen und Bezeichnungsweisen, die komplizierter oder schwieriger sind, als sie es wären, wenn wir allein das zweite Ziel vor Augen hätten. Das gilt besonders für die Theorie der beschreibenden Ausdrücke (∗14 und ∗30) und für die Theorie der Klassen und Relationen (∗20 und ∗21). An diesen zwei Stellen und in geringerem Grade an anderen war es nötig, manches Opfer an Durchsichtigkeit zugunsten der Korrektheit zu bringen. Das Opfer ist jedoch der Hauptsache nach nur vorübergehend: in beiden Fällen hat die schließlich gewählte Bezeichnung, obwohl ihre eigentliche Bedeutung sehr kompliziert ist, auch eine scheinbar einfache Bedeutung, durch die, außer an gewissen kritischen Punkten, die wahre Bedeutung ohne Gefahr in Gedanken ersetzt werden kann. Es ist daher praktisch, in einer ersten Erklärung der Bezeichnungsweise diese scheinbar einfachen Bedeutungen als Grundbegriffe zu behandeln, d. h. als Begriffe, die ohne Definition eingeführt werden. Wenn einem dann die Bezeichnung schon mehr oder minder vertraut geworden ist, ist es leichter, den komplizierteren Erklärungen zu folgen, die wir für korrekter halten. Im Hauptteil des Werkes, wo man sich streng an die straffe logische Ordnung halten muß, konnte die leichtere Entwicklungsfolge nicht gewählt werden; sie ist darum in der Einleitung gegeben. Die Erklärungen in Kapitel I der Einleitung sind diejenigen, die der Durchsichtigkeit den Vorzug vor der Korrektheit geben; die ausführlichen Erklärungen sind teils in späteren Kapiteln der Einleitung nachgetragen, teils im Hauptteil des Werkes gegeben.

Der Gebrauch einer Symbolik an Stelle von Worten in allen Teilen des Buches, die ganz streng beweisende Schlußfolgerungen darstellen sollen, wurde uns durch die beharrliche Verfolgung der oben genannten drei Ziele aufgezwungen. Der Gründe für diese Ausdehnung der Symbolik über die üblichen Gebiete der Zahl und damit verwandter Begriffe hinaus gibt es viele:

Peano!!

1. Die hier verwendeten Begriffe sind abstrakter als die für gewöhnlich in der Sprache berücksichtigten. Dementsprechend gibt es keine Worte, die gewöhnlich in so genau gleichbleibendem Sinn gebraucht werden, wie er hier erforderlich ist. Jeder Gebrauch von Worten würde eine unnatürliche Abgrenzung gegen ihre gewöhnlichen Bedeutungen erfordern, was tatsächlich schwieriger dauernd zu merken wäre als die Definitionen von völlig neuen Symbolen.

2. Die grammatische Struktur der Sprache ist einer großen Variationsbreite im Gebrauch angepaßt. So besitzt sie nicht die einzigartige Einfachheit, um die wenigen einfachen, obgleich höchst abstrakten Prozesse und Begriffe wiederzugeben, die sich bei der hier verwendeten Ableitung durch Schlußketten ergeben. In der Tat versagt die Sprache gegenüber der ganz abstrakten Einfachheit der in diesem Werk gebrauchten Begriffe. Die Sprache kann komplexe Begriffe leichter wiedergeben. Den Sachverhalt „ein Walfisch ist groß" gibt die Sprache aufs beste wieder, indem sie einer komplizierten Tatsache bündigen Ausdruck verleiht; die wahre Analyse von „eins ist eine Zahl" dagegen führt sprachlich zu einer unerträglichen Weitschweifigkeit. Daher läßt sich Bündigkeit nur durch den Gebrauch einer Symbolik erzielen, die eigens dazu bestimmt ist, die Begriffe und deduktiven Prozesse wiederzugeben, die in diesem Werk vorkommen.

3. Die Anwendung der Symbolregeln auf die Deduktionsprozesse unterstützt das Verständnis in Gebieten, die zu abstrakt sind, als

Untersuchung von Weierstrass

daß die Anschauung dem Geiste gleich die wahre Beziehung zwischen den betreffenden Begriffen darbieten könnte. Denn man wird mit verschiedenen Symbolgruppen als Vertretern wichtiger Begriffsgruppen vertraut und dann — entsprechend den Regeln der Symbolik — mit den möglichen Beziehungen zwischen diesen Symbolgruppen; und diese weiteren Gruppen vertreten noch kompliziertere Beziehungen zwischen den abstrakten Begriffen. Und so wird der Geist schließlich dazu geführt, Schlußketten in Gedankenregionen zu bilden, wo die Anschauung allein ohne Hilfe einer Symbolik sich ganz unmöglich behaupten könnte. Die gewöhnliche Sprache bietet nicht solche Hilfen. Ihre grammatische Struktur gibt die Beziehungen zwischen den betreffenden Begriffen nicht eindeutig wieder. So sehen „ein Walfisch ist groß" und „eins ist eine Zahl" beide ganz gleich aus und das Auge bietet daher der Vorstellung keine Hilfe.

4. Die Bündigkeit der Symbolik gestattet es uns, eine ganze Aussage auch für den Blick als Einheit wiederzugeben oder höchstens dort in zwei oder drei Teile geteilt, wo — auch in der Symbolik wiedergegebene — Abschnitte vorliegen. Das ist eine ganz schlichte Eigenschaft, ist aber tatsächlich in Verbindung mit den unter Punkt 3 aufgezählten Vorteilen sehr wichtig.

5. Die Erreichung des ersterwähnten Zieles dieses Werkes, nämlich die vollständige Aufzählung aller bei mathematischen Schlüssen verwendeten Begriffe und Schritte, erfordert sowohl Bündigkeit als auch die Darstellung jedes Satzes mit einem Maximum an Ausführlichkeit in einer für sich selbst möglichst charakteristischen Form.

Weiteres Licht fällt auf die Methoden und die Symbolik dieses Buches durch eine flüchtige Betrachtung der Grenzen ihrer nützlichen Verwendung:

α) Die meisten mathematischen Forschungen haben es nicht mit der Analyse des gesamten Schlußprozesses, sondern mit der Darstellung eines solchen Auszuges aus dem Beweis zu tun, wie er genügt, um einen geeignet unterrichteten Intellekt zu überzeugen. Für solche Untersuchungen ist die Darstellung der Beweisschritte im einzelnen natürlich unnötig, wenn man nur weit genug ins einzelne gegangen ist, um Irrtümer zu vermeiden. In diesem Zusammenhang sei aber daran erinnert, daß die Untersuchungen von Weierstrass und anderen aus derselben Schule gezeigt haben, daß selbst in den gewöhnlichen Gebieten mathematischen Denkens viel mehr Einzelheiten nötig sind als frühere Generationen von Mathematikern vorausgesetzt hatten.

β) Je leichter die Anschauung in irgendeinem Gedankengebiet arbeitet, desto mehr wird die Symbolik (außer für die ausgesprochenen Zwecke der Analyse) nur noch als eine praktische Kurzschrift zum Festhalten von Ergebnissen nötig, die ohne ihre Hilfe erhalten wurden. Es ist ein Nebenziel dieses Werkes, zu zeigen, daß mit Hilfe einer Symbolik das deduktive Verfahren auf Gedankengebiete ausgedehnt werden kann, die man gewöhnlich mathematischer Behandlung nicht für zugänglich hält. Und bis die Begriffe eines solchen Wissensgebietes vertrauter geworden sind, ist die zergliederte Art des Schlußverfahrens, die auch für die Analyse der einzelnen Schritte dieses Verfahrens erforderlich ist, die geeignete zur Untersuchung der allgemeinen Wahrheiten über diese Gegenstände.

Kapitel I.

Vorläufige Erklärungen über Begriffe und Zeichen.

Die im vorliegenden Werk gewählte Bezeichnungsweise gründet auf der von Peano, und die folgenden Erklärungen sind bis zu einem gewissen Ausmaß nach dem Vorbild derer gebildet, die er seinem „*Formulario mathematico*“ vorausschickt. Seine Verwendung von Punkten als Klammern sowie viele seiner Symbole wurden übernommen.

Veränderliche. Der Begriff einer Veränderlichen, wie er in dem vorliegenden Werk vorkommt, ist allgemeiner als der in der gewöhnlichen Mathematik ausdrücklich verwendete. In der gewöhnlichen Mathematik steht eine Veränderliche im allgemeinen für eine unbestimmte Zahl oder Quantität. In der mathematischen Logik dagegen heißt jedes Symbol, dessen Bedeutung nicht bestimmt ist, eine *Veränderliche*, und die verschiedenen Bestimmungen, deren seine Bedeutung fähig ist, heißen die *Werte* der Veränderlichen. Die Werte können je nach den Umständen irgendein Bestand von Gegenständen, Propositionen[1]), Funktionen, Klassen oder Relationen sein. Wenn eine Behauptung über „Herrn A und Herrn B“ aufgestellt wird, sind „Herr A“ und „Herr B“ Veränderliche, deren Werte auf Menschen beschränkt sind. Eine Veränderliche kann entweder einen ihr nach Übereinkommen zugewiesenen Wertebereich haben oder kann (mangels jeder Angabe über den Wertebereich) als Wertebereich alle Bestimmungen haben, die die Behauptung, in der sie auftritt, sinnvoll machen. Wenn z. B. ein Lehrbuch der Logik behauptet, „A ist A“, ohne alle Angabe darüber, was A sein kann, so ist gemeint, daß *jede* Behauptung von der Form „A ist A“ wahr sei. Wir können eine Veränderliche *beschränkt* nennen, wenn ihre Werte nur auf einige von denen eingeschränkt sind, deren sie fähig ist; sonst werden wir sie *unbeschränkt* nennen. Wenn also eine unbeschränkte Veränderliche vorkommt, vertritt sie jedes Objekt, das so beschaffen ist, daß die betreffende Aussage über es mit Sinn gemacht werden kann (d. h. entweder wahr oder falsch ist). Für die Zwecke der Logik ist die unbeschränkte Veränderliche praktischer als die beschränkte Veränderliche und wir werden immer jene verwenden. Wir werden finden, daß die unbeschränkte Veränderliche doch noch Beschränkungen unterworfen ist, die ihr durch die Umstände ihres Auftretens auferlegt werden, d. h. Dinge, die mit Sinn von einer Proposition gesagt werden können, können nicht mit Sinn von einer Klasse oder Relation gesagt werden usw. Die Beschränkungen aber, denen die „unbeschränkte" Veränderliche unterliegt, brauchen nicht ausdrücklich angegeben werden, da sie ja die Bedeutungsgrenzen der Behauptung bilden, in der die Veränderliche vorkommt, und darum schon innerlich durch diese Behauptung bestimmt sind. Das wird später ausführlicher erklärt werden[1]).

Kurz gefaßt sind also die drei Hauptpunkte beim Gebrauch der Veränderlichen: 1. daß eine Veränderliche mehrdeutig in ihrer Bezeichnung und dementsprechend unbestimmt ist; 2. daß eine Veränderliche eine merklich identische Bedeutung bei ihrem verschiedentlichen Vorkommen im selben Zusammenhang bewahrt, so daß viele Veränderliche zusammen im selben Zusammenhang vorkommen können, jede mit ihrer besonderen identischen Bedeutung; und 3. daß der Bereich möglicher Bestimmungen von zwei Veränderlichen derselbe sein kann, so daß eine mögliche Bestimmung einer Veränderlichen auch eine mögliche Bestimmung der anderen ist, oder aber, daß die Bereiche zweier Veränderlicher verschieden sein können, so daß, wird eine mögliche Bestimmung einer Veränderlichen der anderen gegeben, der resultierende vollständige Satz sinnlos ist, statt zu einer vollständigen eindeutigen (wahren oder falschen) Aussage zu werden, wie es der Fall wäre, wenn man allen Veränderlichen in ihm irgendwelche *passende* Bestimmungen gegeben hätte.

Der Gebrauch verschiedener Buchstaben. Veränderliche sollen durch einzelne Buchstaben bezeichnet werden und ebenso auch gewisse Konstanten; ein Buchstabe aber, der einmal definitorisch einer Konstanten zugewiesen worden ist, darf später nicht zur Bezeichnung einer Veränderlichen verwendet werden. Die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets sollen alle für Veränderliche verwendet werden außer p und s laut $*40$, wo diesen zwei Buchstaben konstante Bedeutungen zugeordnet werden. Die folgenden großen Buchstaben werden konstante Bedeutungen erhalten: B, C, D, E, F, I und J. Unter den kleinen griechischen Buchstaben werden wir ε, ι und (auf einer späteren Stufe) η, ϑ und ω konstante Bedeutungen geben. Gewisse griechische Großbuchstaben

[1]) Vgl. Kapitel II der Einleitung.

werden von Zeit zu Zeit für Konstanten eingeführt werden, für Veränderliche werden jedoch griechische Großbuchstaben nicht verwendet werden. Von den restlichen Buchstaben sollen p, q, r *Propositionalbuchstaben* heißen und für veränderliche Propositionen stehen (von $*40$ aufwärts jedoch darf p nicht mehr für eine Veränderliche gebraucht werden); f, g, φ, ψ, χ, ϑ und (bis $*33$) F sollen *Funktionalbuchstaben* heißen und für veränderliche Funktionen gebraucht werden.

Die noch nicht erwähnten kleinen griechischen Buchstaben sollen für Veränderliche verwendet werden, deren Werte Klassen sind und werden einfach als *griechische Buchstaben* zitiert werden. Noch nicht erwähnte lateinische große Buchstaben sollen für Veränderliche verwendet werden, deren Werte Relationen sind, und werden einfach als *große Buchstaben* zitiert werden. Kleine lateinische Buchstaben außer p, q, r, s, f, g sollen für Veränderliche verwendet werden, deren Werte nicht schon als Funktionen, Klassen oder Relationen bekannt sind; diese Buchstaben werden einfach als *kleine lateinische Buchstaben* zitiert werden.

In den späteren Teilen des Werkes werden veränderliche Propositionen und veränderliche Funktionen kaum vorkommen. Wir werden dann also drei Hauptarten von Veränderlichen haben: veränderliche Klassen, bezeichnet durch griechische Kleinbuchstaben; veränderliche Relationen, bezeichnet durch Großbuchstaben; und Veränderliche, die nicht schon mit Notwendigkeit als Klassen oder Relationen gegeben sind und durch kleine Lateinbuchstaben bezeichnet werden sollen.

Neben diesem Gebrauch von kleinen griechischen Buchstaben für veränderliche Klassen, von großen Buchstaben für veränderliche Relationen, von kleinen lateinischen Buchstaben für Veränderliche eines durch den Zusammenhang gar nicht bestimmten Typus (solche ergeben sich durch die Möglichkeit „systematischer Mehrdeutigkeit", was später in den Erklärungen der Typentheorie erörtert wird) braucht der Leser nur merken, daß alle Buchstaben Veränderliche vertreten, es sei denn, sie wurden als Konstante an früherer Stelle des Buches definiert. Im allgemeinen bestimmt der ganze Zusammenhang den Sinn der darin stehenden Veränderlichen; jedoch erspart die spezielle Angabe über die Natur der verwendeten Veränderlichen, wie sie hier vorausgeschickt wurde, merkliche Gedankenarbeit.

Die Grundfunktionen von Propositionen. Betrachtet man mehrere Propositionen als Einheiten, aber nicht notwendigerweise als eindeutig bestimmte, und faßt sie zu *einer* Proposition zusammen, die komplexer ist als ihre Bestandteile, so erhält man eine *Funktion mit Propositionen als Argumenten.* Der allgemeine Begriff einer solchen Zusammenfassung von Propositionen oder von Veränderlichen, die Propositionen vertreten, wird in diesem Werk nicht verwendet werden. Es gibt aber vier Spezialfälle, die von grundlegender Wichtigkeit sind, da aus ihnen Schritt für Schritt alle im Folgenden vorkommenden Zusammenfassungen untergeordneter Propositionen zu *einer* komplexen Proposition gebildet sind.

Es sind das 1. die kontradiktorische Funktion, 2. die logische Summe oder die disjunktive Funktion, 3. das logische Produkt oder die konjunktive Funktion, 4. die implikative Funktion. Diese Funktionen sind nicht alle in dem Sinne, in dem sie in diesem Werk erforderlich sind, unabhängig; wenn zwei von ihnen als undefinierte Grundbegriffe angenommen werden, können die zwei anderen durch Ausdrücke in jenen definiert werden. Es ist bis zu einem gewissen Grade — wenngleich nicht völlig — willkürlich, welche Funktionen als Grundbegriffe angenommen werden. Man scheint an Einfachheit der Grundbegriffe und an Symmetrie der Behandlung zu gewinnen, wenn man die ersten zwei Funktionen als Grundbegriffe annimmt.

Die kontradiktorische Funktion mit dem Argument p, wo p irgendeine Proposition ist, ist die Proposition, die den kontradiktorischen Gegensatz von p bildet, d. h. die Proposition, die behauptet, p ist nicht wahr. Das wird bezeichnet mit $\sim p$. So ist $\sim p$ die kontradiktorische Funktion mit p als Argument und bedeutet die Negation der Proposition p. Sie wird auch als die Proposition Non-p angeführt werden. So bedeutet $\sim p$ also Non-p und dieses die Negation von p.

Die logische Summe ist eine Propositionalfunktion mit zwei Argumenten p und q, und zwar die Proposition, die p oder q disjunktiv behauptet, d. h. behauptet, daß wenigstens eins von p und q wahr ist. Das wird bezeichnet mit $p \vee q$. So ist also $p \vee q$ die logische Summe mit p und q als Argumenten. Es heißt auch die logische Summe von p und q. Danach bedeutet also $p \vee q$, daß wenigstens p oder q wahr ist, ohne den Fall auszuschließen, wo beide wahr sind.

Das logische Produkt ist eine Propositionalfunktion mit zwei Argumenten p und q, und zwar die Proposition, die p und q konjunktiv behauptet, d. h. behauptet, daß p und q beide zugleich wahr sind. Das wird mit $p \,.\, q$ bezeichnet oder — um in gleich zu

erklärender Weise die Punkte als Klammern fungieren zu lassen — mit $p : q$ oder $p :. q$ oder $p :: q$. So ist also $p \,.\, q$ das logische Produkt mit p und q als Argumenten. Es heißt auch das logische Produkt von p und q. Danach bedeutet $p \,.\, q$, daß p und q beide zugleich wahr sind. Man sieht leicht, daß diese Funktion durch Ausdrücke in den beiden vorhergehenden Funktionen definiert werden kann. Denn wenn p und q beide wahr sind, muß es falsch sein, daß $\sim p$ oder $\sim q$ wahr ist. Daher ist in diesem Buch $p \,.\, q$ nur eine abgekürzte symbolische Form für

$$\sim(\sim p \vee \sim q).$$

Ob sich noch ein weiterer Sinn mit der Proposition „p und q sind beide wahr" verbindet, kümmert uns hier nicht.

Die implikative Funktion ist eine Propositionalfunktion mit zwei Argumenten p und q, und zwar die Proposition, die behauptet, daß Non-p oder q wahr ist, d. h. sie ist die Proposition $\sim p \vee q$. So ist, wenn p wahr ist, $\sim p$ falsch, und demnach ist die einzige durch die Proposition $\sim p \vee q$ übrig gelassene Alternative die, daß q wahr ist. Mit anderen Worten: wenn p und $\sim p \vee q$ beide wahr sind, dann ist q wahr. In diesem Sinn wird die Proposition $\sim p \vee q$ als die Behauptung angeführt werden, daß p das q impliziert. Der in dieser Propositionalfunktion liegende Begriff ist so wichtig, daß er eine Symbolik erfordert, die einfach unmittelbar die p und q verbindende Proposition darstellt ohne Heranziehung von $\sim p$. „Implizieren" aber, so wie es hier gebraucht ist, drückt nichts anderes aus als die auch durch die Disjunktion „Non-p oder q" ausgedrückte Verbindung zwischen p und q. Das für „p impliziert q", d. h. für „$\sim p \vee q$" verwendete Symbol ist „$p \supset q$". Dieses Symbol kann auch gelesen werden: „wenn p, so q". Die Verbindung der Implikation mit dem Gebrauch einer Scheinveränderlichen führt zu einer Begriffserweiterung, genannt „Formalimplikation". Das wird später erklärt: sie ist ein vom hier definierten Implikationsbegriff abgeleiteter Begriff. Wenn es nötig ist, „Implikation" ausdrücklich von „Formalimplikation" zu unterscheiden, so heißt sie „Materialimplikation". Also ist „Materialimplikation" einfach die hier definierte „Implikation". Der Schlußvorgang, der im gewöhnlichen Gebrauch oft mit der Implikation verwechselt wird, wird sogleich erklärt.

Diese vier Funktionen von Propositionen sind die grundlegenden konstanten (d. h. bestimmten) Propositionalfunktionen mit *Propositionen als Argumenten*; und alle anderen konstanten Propositionalfunktionen mit Propositionen als Argumenten, soweit sie im vorliegenden Werk gebraucht werden, sind daraus durch schrittweise Entwicklung gebildet. Dagegen kommt keine *veränderliche* Propositionalfunktion dieser Art in diesem Werk vor.

Äquivalenz. Das einfachste Beispiel der Bildung einer komplexeren Funktion von Propositionen mit Hilfe dieser vier Grundformen liefert die „Äquivalenz". Zwei Propositionen p und q heißen äquivalent, wenn p das q impliziert und q das p impliziert. Diese Relation zwischen p und q wird mit „$p \equiv q$" bezeichnet. So steht „$p \equiv q$" für „$(p \supset q) . (q \supset p)$". Es ist leicht zu sehen, daß zwei Propositionen dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie beide wahr oder beide falsch sind. Die Äquivalenz gewinnt an Bedeutung, wenn wir zur „Formalimplikation" und damit auch zur „Formaläquivalenz" kommen. Man darf nicht unterstellen, daß zwei Propositionen, die äquivalent sind, in irgendeinem Sinne identisch wären oder auch nur entfernt denselben Gegenstand beträfen. So sind etwa „Newton war ein Mensch" und „Die Sonne ist heiß" äquivalent, da sie beide wahr sind; und „Newton war nicht ein Mensch" und „Die Sonne ist kalt" sind äquivalent, da sie beide falsch sind. Doch hier haben wir Folgerungen vorweg genommen, die sich später aus unseren formalen Schlüssen ergeben. Äquivalenz in ihrem Ursinn ist einfach gegenseitige Implikation, wie oben dargestellt.

Wahrheitswerte. Der „Wahrheitswert" einer Proposition ist *Wahrheit*, wenn sie wahr, und *Falschheit*, wenn sie falsch ist[1]). Man wird bemerken, daß die Wahrheitswerte von $p \vee q$, $p . q$, $p \supset q$, $\sim p$, $p \equiv q$ nur von denen von p und q abhängen; der Wahrheitswert von „$p \vee q$" ist nämlich Wahrheit, wenn der Wahrheitswert von p oder von q Wahrheit ist, sonst Falschheit; der von „$p . q$" ist Wahrheit, wenn sowohl der von p als auch der von q Wahrheit ist, sonst Falschheit; der von „$p \supset q$" ist Wahrheit, wenn der von p Falschheit oder der von q Wahrheit ist; der von $\sim p$ ist das Gegenteil dessen von p; und der von „$p \equiv q$" ist Wahrheit, wenn p und q denselben Wahrheitswert haben, sonst Falschheit. Nun sind die Formen, in denen Propositionen im vorliegenden Werk vorkommen werden, einzig und allein von den obigen durch Verbindung und Wiederholung abgeleitet. Daher ist es leicht einzusehen (obwohl es formal nur in jedem einzelnen Fall bewiesen werden kann), daß beim Vorkommen einer Proposition p in irgendeiner Proposition $f(p)$, von der wir gerade zu handeln haben, der Wahrheitswert von $f(p)$ nicht von der speziellen Proposition p, sondern nur von ihrem Wahrheitswert abhängen wird; wenn z. B. $p \equiv q$ ist, so haben wir auch $f(p) \equiv f(q)$. So kann immer, wenn zwei Propositionen als äquivalent bekannt sind, eine von ihnen für die andere in jeder Formel, mit der wir gerade zu tun haben, eingesetzt werden.

[1]) Dieser Ausdruck stammt von FREGE.

Wir können eine Funktion $f(p)$ eine „Wahrheitsfunktion" nennen, wenn ihr Argument p eine Proposition ist und der Wahrheitswert von $f(p)$ nur vom Wahrheitswert von p abhängt. Solche Funktionen sind keineswegs die einzig üblichen Funktionen von Propositionen. „A glaubt p" ist z. B. eine Funktion von p, die ihren Wahrheitswert für verschiedene Argumente desselben Wahrheitswertes ändert: A kann eine wahre Funktion glauben, ohne eine andere zu glauben, und kann eine falsche Funktion glauben, ohne eine andere zu glauben. Solche Funktionen sind nicht aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen und liegen noch im Gebiete der ganz allgemeinen Propositionen, die wir über Funktionen aufstellen können; die besonderen Funktionen von Propositionen aber, die wir zu konstruieren oder ausdrücklich zu betrachten haben werden, sind alle Wahrheitsfunktionen. Dieser Umstand steht in engem Zusammenhang mit einer Eigentümlichkeit der Mathematik, damit nämlich, daß es die Mathematik immer mehr mit Extensionalem als mit Intensionalem zu tun hat. Der Zusammenhang wird, wenn er jetzt noch nicht klar ist, es werden, wenn wir die Theorie der Klassen und Relationen betrachtet haben.

Behauptungszeichen. Das Zeichen „$\vdash$", genannt das „Behauptungszeichen", bedeutet, daß das Folgende behauptet wird. Es ist erforderlich zur Unterscheidung einer Gesamtproposition, die wir behaupten, von einer untergeordneten, in ihr enthaltenen, aber nicht behaupteten Proposition. In gewöhnlicher Schreibung bezeichnet ein zwischen Punkten stehender Satz eine behauptete Proposition und, wenn er falsch ist, liegt eben im Text ein Irrtum. Das einer Proposition vorgesetzte Zeichen „$\vdash$" dient in unserer Symbolik demselben Zweck. Wenn z. B. „$\vdash (p \supset p)$" vorkommt, so ist es als volle Behauptung aufzufassen, welche die Verfasser des Irrtums überweist, wenn nicht die Proposition „$p \supset p$" wahr ist (wie es ja auch der Fall ist). Auch eine in Symbolen dargestellte Proposition wird ohne dieses vorangehende Zeichen „$\vdash$" nicht behauptet, sondern nur der Betrachtung vorgelegt oder ist ein untergeordneter Teil einer behaupteten Proposition.

Schluß. Der Prozeß des Schließens verläuft folgendermaßen: eine Proposition „p" wird behauptet und eine Proposition „p impliziert q" wird behauptet; dann wird als Folgerung auch die Proposition „q" behauptet. Das Zutrauen zum Schluß liegt im Glauben, wenn nur die zwei ersten Behauptungen nicht irrig seien, sei es auch die Endbehauptung nicht. Immer also, wenn in Symbolen, wobei p und q natürlich speziell bestimmt sind,

$$„\vdash p\text{" und „}\vdash (p \supset q)\text{"}$$

auftreten, wird auch „$\vdash q$" auftreten, falls es erwünscht ist, das zum Ausdruck zu bringen. Der Prozeß des Schließens kann nicht auf bloße Symbole zurückgeführt werden. Sein einziges Zeichen ist das Auftreten von „$\vdash q$". Es ist natürlich zweckmäßig, selbst auf die Gefahr einer Wiederholung hin „$\vdash p$" und „$\vdash (p \supset q)$" nahe zusammen zu schreiben, bevor man zu „$\vdash q$", als dem Ergebnis des Schlusses, übergeht. Wenn das geschehen soll, werden wir, um die Aufmerksamkeit auf den Schluß zu lenken, der gerade gemacht wird, dafür

$$„\vdash p \supset \vdash q\text{"}$$

schreiben; das ist dann als bloße Abkürzung für die dreifache Behauptung

$$„\vdash p\text{" und „}\vdash (p \supset q)\text{" und „}\vdash q\text{"}$$

anzusehen. So kann man „$\vdash p \supset \vdash q$" lesen als „$p$, daher q", was tatsächlich im Wesen ebenso eine Abkürzung ist, wie jene; denn „p, daher q" spricht auch nicht ausdrücklich aus, daß p das q impliziert, was doch ein Teil seines Sinnes ist. Ein Schluß ist das Wegfallen einer wahren Prämisse, er ist das Zerfallen einer Implikation.

Der Gebrauch von Punkten. Punkte auf der Schreiblinie der Symbole haben zwei Verwendungsweisen: einmal Propositionen wie durch Klammern abzutrennen, zum anderen das logische Produkt von zwei Propositionen anzuzeigen. Punkte unmittelbar nach oder vor Zeichen wie „$\vee$", „$\supset$", „$\equiv$", „$\vdash$" oder „(x)", „(x, y)", „(x, y, z)" ... oder „$(\exists x)$", „$(\exists x, y)$", „$(\exists x, y, z)$" ... oder „$[(\imath x)(\varphi x)]$" oder „$[R‘y]$" oder ähnlichen Ausdrücken dienen dazu, eine Proposition abzutrennen; sonst vorkommende Punkte dienen als Zeichen eines logischen Produktes. Der allgemeine Grundsatz ist, daß eine größere Zahl von Punkten eine äußere Klammer anzeigt, eine kleinere Anzahl aber eine innere Klammer. Zur genauen Regel für den Erstreckungsbereich der durch Punkte bezeichneten

Klammern gelangt man, indem man das Vorkommen von Punkten in drei Gruppen teilt, die wir I, II und III nennen. Gruppe I besteht aus Punkten in der Nachbarschaft eines Zeichens der Implikation ($\supset$), der Äquivalenz ($\equiv$), der Disjunktion ($\vee$) oder der definitorischen Gleichheit ($=$ Df). Gruppe II besteht aus Punkten nach Klammern zum Zeichen von Scheinveränderlichen wie (x) oder (x, y), $(\exists x)$ oder $(\exists x, y)$ oder $[(\imath x)(\varphi x)]$ oder ähnlichen Ausdrücken[1]). Gruppe III besteht aus Punkten, die zwischen Propositionen stehen, um ein logisches Produkt zu bezeichnen. Gruppe I ist stärker als Gruppe II und Gruppe II wieder stärker als Gruppe III. Der Bereich einer durch eine Punktgruppe angedeuteten Klammer reicht rückwärts und vorwärts hinaus über jede *kleinere* Zahl von Punkten und über jede *gleiche* Zahl einer schwächeren Gruppe, bis wir entweder an das Ende der behaupteten Proposition gelangen oder zu einer *größeren* Zahl von Punkten oder aber zu einer *gleichen* Zahl, die zu einer gleich starken oder stärkeren Gruppe gehört. Punkte zur Bezeichnung eines logischen Produktes haben einen vorwärts und rückwärts wirkenden Erstreckungsbereich; andere Punkte wirken nur weg von dem benachbarten Disjunktions-, Implikations- oder Äquivalenzzeichen, oder vorwärts von dem benachbarten Symbol einer der in Gruppe II aufgezählten Arten.

Einige Beispiele werden zur Erläuterung des Gebrauchs der Punkte dienen.

„$p \vee q . \supset . q \vee p$" bedeutet die Proposition „‚p oder q' impliziert ‚q oder p'". Wenn wir diese Proposition *behaupten*, statt sie bloß zu betrachten, schreiben wir

$$„\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p\text{"},$$

wobei die zwei Punkte nach dem Behauptungszeichen anzeigen, daß alles, was auf das Behauptungszeichen folgt, behauptet wird, denn noch einmal zwei Punkte gibt es dort nirgends mehr. Wenn wir geschrieben hätten „$p : \vee : q . \supset . q \vee p$", so würde das die Proposition „p ist wahr oder q impliziert ‚q oder p'" bedeuten. Wollten wir das behaupten, so müßten wir drei Punkte hinter das Behauptungszeichen setzen. Wenn wir geschrieben hätten „$p \vee q . \supset . q : \vee : p$", so würde das die Proposition „‚p oder q' impliziert q oder p ist wahr" bedeuten. Die Formen „$p . \vee q . \supset . q \vee p$" und „$p \vee q . \supset . q . \vee . p$" haben keinen Sinn.

[1]) Die Bedeutung dieser Ausdrücke wird später erklärt werden, und Beispiele für den Gebrauch von Punkten im Zusammenhang damit werden auf S. 28f. gegeben werden.

„$p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$“ wird bedeuten: „wenn p das q impliziert, so gilt, wenn q das r impliziert, auch, daß p das r impliziert“. Wenn wir das — was übrigens wahr ist — behaupten wollen, so schreiben wir

$$„\vdash : . p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r“.$$

„$p \supset q . \supset . q \supset r : \supset . p \supset r$“ wiederum wird bedeuten: „wenn 'p impliziert q' impliziert 'q impliziert r', dann impliziert p das r“. Das ist im allgemeinen unrichtig. (Man beachte übrigens, daß man „$p \supset q$“ manchmal am praktischesten liest: „p impliziert q“ und manchmal: „wenn p, so q“.) „$p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$“ wird bedeuten: „wenn p das q impliziert und q das r impliziert, dann impliziert p das r“ In dieser Formel bezeichnet der erste Punkt ein logisches Produkt; daher erstreckt sich der Bereich des zweiten Punktes zurück bis zum Anfang der Proposition.

„$p \supset q : q \supset r . \supset . p \supset r$“ wird bedeuten: „$p$ impliziert q; und wenn q das r impliziert, so impliziert p das r“. (Das ist im allgemeinen nicht wahr.) Hier bezeichnen die zwei Punkte ein logisches Produkt; da zwei Punkte sonst nirgendmehr auftreten, erstreckt sich der Wirkungsbereich dieser zwei Punkte zurück bis zum Anfang der Proposition und vorwärts bis zu ihrem Ende.

„$p \vee q . \supset \boxed{:.} p . \vee q \supset r : . \supset . p \vee r$“ wird bedeuten: „wenn p oder q wahr ist, dann folgt, wenn p oder 'q impliziert r' wahr ist, daß p oder r wahr ist“. Wenn das behauptet werden soll, müssen wir vier Punkte hinter das Behauptungszeichen setzen:

$$„\vdash \boxed{::} p \vee q . \supset : . p . \vee q \supset r : \supset . p \vee r“.$$

(Diese Proposition ist im Hauptteil des Werkes unter *2.75 bewiesen.) Wenn wir (was mit dem Obigen äquivalent ist) die Proposition „wenn p oder q wahr ist und p oder 'q impliziert r' wahr ist, dann ist p oder r wahr“ behaupten wollen, so schreiben wir:

$$„\vdash : . p \vee q : p . \vee . q \supset r : \supset . p \vee r“.$$

Hier bezeichnet das erste Punktepaar ein logisches Produkt, während das beim zweiten nicht der Fall ist. Der Bereich des zweiten Paares erstreckt sich also über das erste hinweg und zurück, bis wir die drei Punkte nach dem Behauptungszeichen treffen.

Andere Verwendungsweisen von Punkten folgen denselben Grundsätzen und werden bei ihrer Einführung erklärt werden. Beim Lesen einer Proposition sollte man zuerst die Punkte beachten, da sie deren Struktur anzeigen. In einer Proposition mit mehreren Implikations- oder Äquivalenzzeichen ist das mit der größten Punktzahl davor

oder dahinter das *Hauptzeichen*: alles Vorhergehende wird von der Proposition als Implikans oder Äquivalent alles Folgenden hingestellt.

Definitionen. Eine Definition ist eine Erklärung, daß ein gewisses neu eingeführtes Symbol oder eine Verbindung von Symbolen dasselbe zu bedeuten hat, wie eine gewisse andere Verbindung von Symbolen, deren Sinn schon bekannt ist. Und wenn die definierende Symbolverbindung eine ist, die nur dann Sinn gewinnt, wenn sie in geeigneter Weise mit anderen Symbolen verbunden wird[1]), so ist gemeint: irgendeine Symbolverbindung, in der das neudefinierte Symbol oder die neudefinierte Symbolverbindung vorkommt, soll (wenn überhaupt einen) so den Sinn haben, der sich durch Substitution der definierenden Symbolverbindung für das neudefinierte Symbol oder die neudefinierte Symbolverbindung ergibt, wo immer letztere vorkommt. Wir geben den Namen *definiendum* dem Gebilde, das definiert wird, und den Namen *definiens* dem, das jenes definitionsgemäß bedeuten soll. Im Ausdruck einer Definition setzen wir das *definiendum* links und das *definiens* rechts mit dem Zeichen „=“ dazwischen und die Buchstaben „Df“ rechts vom *definiens*. Selbstverständlich sind Zeichen „=“ und Buchstaben „Df“ als gemeinsam *ein* Symbol bildend anzusehen. Das Zeichen „=“ ohne die Buchstaben „Df“ wird eine andere — in Kürze zu erklärende — Bedeutung haben.

Ein Beispiel einer Definition ist

$$p \supset q . = . \sim p \vee q \text{ Df.}$$

Man beachte, daß eine Definition, strenggenommen, keinen Teil des Gegenstandes bildet, bei dessen Behandlung sie vorkommt. Denn eine Definition hat es nur mit den Symbolen zu tun, nicht mit dem durch sie Symbolisierten. Ferner ist sie weder wahr noch falsch, da sie der Ausdruck eines Willens, nicht einer Aussage ist. (Aus diesem Grunde steht vor einer Definition kein Behauptungszeichen.) Theoretisch ist es überhaupt unnötig, Definitionen zu geben: wir könnten immer das *definiens* dafür gebrauchen und so das *definiendum* ganz erübrigen. Obwohl wir also Definitionen verwenden und „Definition“ nicht definieren, erscheint doch „Definition“ nicht unter unseren Grundbegriffen, weil die Definitionen kein Teil unseres Gegenstandes, sondern, strenggenommen, nur Übereinkommen über die Art des Druckes sind. Praktisch freilich würden unsere Formeln, wenn wir keine Definitionen einführten,

[1]) Dieser Fall wird ausführlich betrachtet werden in Kapitel III der Einleitung. Augenblicklich braucht er uns nicht weiter zu interessieren.

Definit ⇒ Bestimmt

bald so umfänglich, daß sie nicht mehr zu handhaben wären; theoretisch aber sind alle Definitionen überflüssig.

Trotz des Umstandes, daß Definitionen theoretisch überflüssig sind, ist es doch wahr, daß sie oft wichtigere Belehrung vermitteln, als in den Propositionen enthalten ist, in denen sie gebraucht werden. Das ergibt sich aus zwei Gründen. Erstens bedeutet eine Definition gewöhnlich, daß das definiens sorgfältiger Betrachtung wert ist. Daher ist der Bestand an Definitionen ein Ausdruck für unsere Auswahl der Gegenstände und für unser Urteil über die Frage, was besonders wichtig sei. Zweitens enthält die Definition, wenn das, was definiert wird (wie es oft vorkommt), etwas schon Vertrautes ist, wie Kardinal- oder Ordinalzahlen, eine Analyse eines Alltagsbegriffes und vermag darum einen merklichen Fortschritt auszudrücken. CANTORS Definition des Kontinuums erläutert das: seine Definition läuft auf die Feststellung hinaus, was er zu definieren unternehme, sei der Gegenstand, der die gewöhnlich mit dem Wort „Kontinuum" in Verbindung gebrachten Eigenschaften hat, obwohl man vorher nicht gewußt habe, was genau genommen diese Eigenschaften konstituiert. In solchen Fällen ist eine Definition ein „Bestimmt (definit) machen": sie gibt einem Begriff Bestimmtheit, der vorher mehr oder weniger vag gewesen war.

Aus diesen Gründen wird man im Folgenden finden, daß die Definitionen das Wichtigste sind und am meisten die erhöhte Aufmerksamkeit des Lesers verdienen.

Einige wichtige Bemerkungen müssen über die im *definiens* und *definiendum* vorkommenden Veränderlichen gemacht werden. Das soll aber verschoben werden, bis der Begriff einer „Scheinveränderlichen" eingeführt ist und dieser Gegenstand dann als ein Ganzes untersucht werden kann.

Überblick über die bisherigen Aufstellungen. Es gibt im Obigen drei Grundbegriffe, die nicht „definiert", sondern nur beschreibend erklärt sind. Ihr Grundcharakter besteht nur relativ zu unserer Darstellung des logischen Gebäudes und ist nicht absolut; dennoch gewinnt natürlich eine solche Darstellung an Bedeutung mit der Einfachheit ihrer Grundbegriffe. Diese Begriffe werden durch „$\sim p$" und „$p \vee q$", und durch „$\vdash$" vor einer Proposition symbolisiert.

Drei Definitionen sind eingeführt worden:

$$p \,.\, q \,.=.\, \sim(\sim p \vee \sim q) \quad \text{Df},$$
$$p \supset q \,.=.\, \sim p \vee q \quad \text{Df},$$
$$p \equiv q \,.=.\, p \supset q \,.\, q \supset p \quad \text{Df}.$$

Primitive Propositionen

Grundpropositionen. Einige Propositionen müssen ohne Beweis angenommen werden, da alles Schließen von vorher behaupteten Propositionen ausgeht. Soweit diese die oben erwähnten Funktionen von Propositionen betreffen, findet man sie zusammengestellt in ∗1, wo die formale und fortlaufende Darstellung des Gegenstandes beginnt. Solche Propositionen sollen „Grundpropositionen" heißen. Diese sind, gleich den Grundbegriffen, bis zu einem gewissen Grad eine Sache willkürlicher Auswahl; gleichwohl wächst, wie im früheren Fall, die Bedeutung eines logischen Systems, je geringer an Zahl und je einfacher seine Grundpropositionen sind. Man wird finden, daß wegen der Schwäche unseres Vorstellungsvermögens in der Behandlung einfacher, abstrakter Begriffe kein sehr großes Gewicht auf ihre mühelose Einsichtigkeit gelegt werden kann. Sie sind plausibel für den geschulten Geist, aber das sind anderseits auch viele Propositionen, die nicht ganz wahr sein können, da sie durch ihre widersprüchlichen Folgerungen widerlegt werden. Ein logisches System erprobt sich an seiner Vollständigkeit und innerer Folgerichtigkeit. Das bedeutet: 1. das System muß unter seiner Deduktionen alle jene Propositionen umfassen, die wir für wahr und einer Ableitung aus rein logischen Prämissen fähig halten mögen sie auch noch eine leichte Einschränkung in der Form einer erhöhten Strenge der Formulierung erfordern; und 2. darf das System zu keinen Widersprüchen führen, d. h. im Verfolg unserer Schlüsse dürfen wir nie dazu geführt werden, sowohl p als Non-p zu behaupten, d. h. es kann darin legitimerweise nicht sowohl „$\vdash . p$" als auch „$\vdash . \sim p$" auftreten.

Im Folgenden stellen wir die im Propositionskalkül verwendeten Grundpropositionen zusammen. Dabei stehen die Buchstaben „Pp" für „Grundproposition" („primitive Proposition").

1. Was von einer wahren Prämisse impliziert wird, ist wahr Pp. Das ist die Regel, die das Schließen rechtfertigt.

2. $\vdash : p \vee p \,.\supset.\, p$ Pp,
d. h. wenn p oder p wahr ist, dann ist p wahr.

3. $\vdash : q \,.\supset.\, p \vee q$ Pp,
d. h. wenn q wahr ist, dann ist p oder q wahr.

4. $\vdash : p \vee q \,.\supset.\, q \vee p$ Pp,
d. h. wenn p oder q wahr ist, dann ist q oder p wahr.

5. $\vdash : p \vee (q \vee r) \,.\supset.\, q \vee (p \vee r)$ Pp,
d. h. wenn p wahr ist oder „q oder r" wahr ist, dann ist q wahr oder „p oder r" ist wahr.

$x \approx x$

6. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ Pp,

d. h. wenn q das r impliziert, dann impliziert „p oder q“ das „p oder r“.

7. Neben den obigen Grundpropositionen brauchen wir noch eine Grundproposition, genannt „Das Axiom der Identifizierung echter Veränderlicher“. Wenn wir zwei verschiedene Funktionen von x, wobei x unbestimmt ist, je für sich behauptet haben, ist es oft wichtig, zu wissen, ob wir das x in der einen Behauptung mit dem x in der anderen identifizieren können. Das wird der Fall sein — so erlaubt uns unser Axiom zu schließen —, wenn beide Behauptungen das x als Argument zu ein und derselben Funktion zeigen, d. h. wenn $\varphi(x)$ ein Konstituent in beiden Behauptungen ist (welche Propositionalfunktion φ auch sein mag), oder allgemeiner, wenn $\varphi(x, y, z, \ldots)$ ein Konstituent in der einen und $\varphi(x, u, v, \ldots)$ ein Konstituent in der anderen Behauptung ist. Dieses Axiom führt Begriffe ein, die noch nicht erklärt worden sind; zu einer genaueren Rechenschaft darüber vergleiche man die Begleitbemerkungen zu $*3.03$, $*1.7$, $*1.71$ und $*1.72$ (das ist die Aufstellung dieses Axioms) im Hauptteil des Werkes, sowie die gleich zu gebende Erklärung der Propositionalfunktionen und der unbestimmten Behauptung.

Einige einfache Propositionen. Neben den schon erwähnten Grundpropositionen gehören die folgenden zu den wichtigsten unter den elementaren Eigenschaften von Propositionen, die unter den Folgerungen auftreten.

Das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten:

$$\vdash . p \vee \sim p .$$

Das ist $*2.11$ unten. Wir werden in Klammern die Nummern angeben, die die folgenden Propositionen im Hauptteil des Werkes erhalten haben.

Das Gesetz vom Widerspruch ($*3.24$):

$$\vdash . \sim (p . \sim p) .$$

Das Gesetz von der doppelten Negation ($*4.13$):

$$\vdash . p \equiv \sim(\sim p) .$$

Das Transpositionsprinzip[1]), d. h. „wenn p das q impliziert, dann impliziert Non-q das Non-p“ und umgekehrt: dieses Prinzip hat verschiedene Formen, nämlich

$$(*4.1) \quad \vdash : p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p ,$$
$$(*4.11) \quad \vdash : p \equiv q . \equiv . \sim p \equiv \sim q ,$$
$$(*4.14) \quad \vdash :. p . q . \supset . r : \equiv : p . \sim r . \supset . \sim q ,$$

sowie auch andere, die Varianten davon sind.

[1]) Sonst Kontrapositionsgesetz genannt. (Anm. des Übers.)

Das Tautologiegesetz in den zwei Formen:

$$(*4.24) \quad \vdash : p . \equiv . p . p ,$$
$$(*4.25) \quad \vdash : p . \equiv . p \vee p ,$$

d. h. „p ist wahr“ ist äquivalent mit „p ist wahr und p ist wahr“, sowie mit „p ist wahr oder p ist wahr“. Formal betrachtet ist die Algebra der Logik hauptsächlich durch das Tautologiegesetz und seine Folgerungen von der gewöhnlichen Algebra unterschieden.

Das Absorptionsgesetz:

$$(*4.71) \quad \vdash :. p \supset q . \equiv : p . \equiv . p . q ,$$

d. h. „p impliziert q“ ist äquivalent mit „p ist äquivalent mit $p . q$“. Es heißt Absorptionsgesetz, weil es zeigt, daß der Faktor q im Produkt vom Faktor p absorbiert wird, wenn p das q impliziert. Dieses Prinzip ermöglicht es uns, eine Implikation ($p \supset q$) immer, wenn es praktisch ist, durch eine Äquivalenz ($p . \equiv . p . q$) zu ersetzen.

Ein analoges und sehr wichtiges Prinzip ist das folgende:

$$(*4.73) \quad \vdash :. q . \supset : p . \equiv . p . q .$$

Die logische Addition und Multiplikation von Propositionen befolgt das assoziative und kommutative Gesetz und in zwei Formen das distributive Gesetz, nämlich

$$(*4.4) \quad \vdash :. p . q \vee r . \equiv : p . q . \vee . p . r ,$$
$$(*4.41) \quad \vdash :. p . \vee . q . r : \equiv : p \vee q . p \vee r .$$

Die zweite davon scheidet die Beziehungen der logischen Addition und Multiplikation von denen der arithmetischen Addition und Multiplikation.

Propositionalfunktionen. Es sei φx ein Ansatz, der die Veränderliche x enthält, und zwar so, daß er eine Proposition wird, wenn man dem x irgendeinen fest bestimmten Sinn gibt. Dann heißt φx eine „Propositionalfunktion“; es ist keine Proposition, weil es ja wegen der Mehrdeutigkeit von x in der Tat überhaupt keine Behauptung ausmacht. So macht in der Tat „x ist verletzt“ überhaupt keine Behauptung aus, bis wir festgesetzt haben, wer x ist. Ja, wegen der der mehrdeutigen Veränderlichen x verbliebenen Individualität ist es ein mehrdeutiges Exemplar aus der Menge der Propositionen, zu denen man gelangt, wenn man dem x in „x ist verletzt“ alle möglichen Bestimmungen gibt, die eine wahre oder falsche Proposition liefern. Auch wenn „x ist verletzt“ und „y ist verletzt“ *im selben Zusammenhang* vorkommen, wo y eine andere

Propositionalfunktione – Beschreibende Funktionen

Veränderliche ist, können sie je nach den Bestimmungen für x und y so festgesetzt werden, daß sie (möglicherweise) dieselbe Proposition sind oder (möglicherweise) verschiedene Propositionen. Aber abgesehen von irgendeiner Bestimmung für x und y behalten sie in diesem Zusammenhang ihre mehrdeutige Verschiedenheit. So ist „x ist verletzt" ein mehrdeutiger „Wert" einer Propositionalfunktion. Wenn wir von der Propositionalfunktion sprechen wollen, die dem „x ist verletzt" entspricht, werden wir schreiben „$\hat{x}$ ist verletzt". So ist „$\hat{x}$ ist verletzt" die Propositionalfunktion und „x ist verletzt" ein mehrdeutiger Wert davon. Obwohl also „x ist verletzt" und „y ist verletzt" *beim Auftreten im selben Zusammenhang* unterschieden werden kann, drücken „$\hat{x}$ ist verletzt" und „$\hat{y}$ ist verletzt" gar keinen Sinnunterschied aus. Allgemeiner: φx ist ein mehrdeutiger Wert der Propositionalfunktion $\varphi \hat{x}$ und, wenn eine bestimmte Bedeutung a für x eingesetzt wird, ist φa ein eindeutiger Wert von $\varphi \hat{x}$.

Propositionalfunktionen sind die Grundform, von der die üblicheren Funktionsformen, wie „$\sin x$" oder „$\log x$" oder „der Vater von x" abgeleitet sind. Diese abgeleiteten Funktionen werden später betrachtet und heißen „beschreibende Funktionen". Die oben betrachteten Funktionen von Propositionen sind ein Spezialfall von Propositionalfunktionen.

Der Wertebereich und die vollständige Variation. So gibt es zu irgendeiner Propositionalfunktion $\varphi \hat{x}$ einen Bereich oder eine Menge von Werten, bestehend aus allen (wahren oder falschen) Propositionen, die man erhält, indem man dem x in φx jede mögliche Bestimmung gibt. Von einem Wert von x, für den φx wahr ist, werden wir sagen, er „genüge" dem $\varphi \hat{x}$. Nun muß man bezüglich Wahrheit oder Falschheit von Propositionen dieses Bereiches drei wichtige Fälle auffassen und symbolisch bezeichnen. Diese Fälle sind durch drei Propositionen gegeben, von denen wenigstens eine wahr sein muß. Entweder 1. alle Propositionen des Bereiches sind wahr, oder 2. einige Propositionen des Bereiches sind wahr, oder 3. keine Proposition des Bereiches ist wahr. Der Tatbestand 1 wird symbolisiert durch „$(x) . \varphi x$" und 2 wird symbolisiert durch „$(\exists x) . \varphi x$". Von diesen zwei Symbolen wird keine Definition gegeben; sie stellen also zwei neue Grundbegriffe in unserem System dar. Das Symbol „$(x) . \varphi x$" kann gelesen werden „φx immer" oder „φx ist immer wahr" oder „φx ist wahr für alle möglichen Werte von x". Das Symbol „$(\exists x) . \varphi x$" kann gelesen werden „es gibt ein x, für das φx wahr ist" oder

„es gibt ein x, das dem $\varphi \hat{x}$ genügt", und so entspricht es auch der natürlichen Form des Gedankenausdruckes.

Proposition 3 kann in Termen der Grundbegriffe ausgedrückt werden, die wir jetzt schon zur Hand haben. Um das zu tun, beachte man, daß „$\sim \varphi x$" für den kontradiktorischen Gegensatz von φx steht. Dann ist $\sim \varphi \hat{x}$ eine weitere Propositionalfunktion derart, daß jeder Wert von $\varphi \hat{x}$ einem Wert von $\sim \varphi \hat{x}$ widerspricht und umgekehrt. Daher bedeutet „$(x) . \sim \varphi x$" die Proposition, daß jeder Wert von $\varphi \hat{x}$ falsch ist. Das aber ist nach obiger Festsetzung Nummer 3.

Es ist ein offenbarer und doch leicht zu begehender Fehler, anzunehmen, daß die Fälle 1 und 3 kontradiktorische Gegensätze sind. Die Symbolik deckt diese Täuschung sofort auf, denn 1 ist $(x) . \varphi x$ und 3 ist $(x) . \sim \varphi x$, während der kontradiktorische Gegensatz von 1 lautet: $\sim \{(x) . \varphi x\}$. Der Kürze der Symbolik halber stellen wir eine Definition auf, nämlich

$$\sim (x) . \varphi x . = . \sim \{(x) . \varphi x\} \quad \text{Df.}$$

Definitionen, deren Zweck nur der Gewinn einer vorteilhaften Abkürzung durch leichte Zurichtung der Symbole ist, wollen wir solche von „bloß symbolischer Bedeutung" nennen, im Gegensatz zu solchen, die zur Betrachtung eines wichtigen Begriffes anregen.

Die Proposition $(x) . \varphi x$ heißt die „vollständige Variation" der Funktion $\varphi \hat{x}$.

Aus Gründen, die in Kapitel II erörtert werden, fassen wir, wenn es sich um Propositionen von der Form $(x) . \varphi x$ und $(\exists x) . \varphi x$ handelt, die Negation nicht als Grundbegriff auf, sondern *definieren* die Negation von $(x) . \varphi x$, d. i. von „φx ist immer wahr" als „φx ist manchmal falsch", d. i. „$(\exists x) . \sim \varphi x$"; und ähnlich *definieren* wir die Negation von $(\exists x) . \varphi x$ als $(x) . \sim \varphi x$. So setzen wir

$$\sim \{(x) . \varphi x\} . = . (\exists x) . \sim \varphi x \quad \text{Df,}$$

$$\sim \{(\exists x) . \varphi x\} . = . (x) . \sim \varphi x \quad \text{Df.}$$

Gleicherweise definieren wir eine Disjunktion, in der eine der Propositionen von der Form „$(x) . \varphi x$" oder „$(\exists x) . \varphi x$" ist, in Termen einer Disjunktion von Propositionen anderer Form und setzen

$$(x) . \varphi x . \vee . p : = . (x) . \varphi x \vee p \quad \text{Df,}$$

d. h. „φx ist immer wahr oder p ist wahr" soll bedeuten „'φx oder p' ist immer wahr" samt ähnlichen Definitionen in anderen

Scheinveränderliche: x muss erwähnt sein
gegeben in φx.

Fällen. Dieser Gegenstand wird übrigens in Kapitel II und *9 im Hauptteil des Werkes wiederaufgenommen.

Scheinveränderliche. Das Symbol „$(x) . \varphi x$" bezeichnet *eine* bestimmte Proposition, und es ist keinerlei Sinnunterschied zwischen „$(x) . \varphi x$" und „$(y) . \varphi y$", wenn sie im selben Zusammenhang vorkommen. So ist „x" in „$(x) . \varphi x$" nicht ein mehrdeutiger Bestandteil irgendeines Ausdruckes, in dem „$(x) . \varphi x$" vorkommt; und solch ein Ausdruck bleibt trotz der Mehrdeutigkeit des x in „φx" Träger eines ganz bestimmten Sinnes. Das Symbol „$(x) . \varphi x$" steht in gewisser Analogie mit dem Symbol

$$„\int_a^b \varphi(x)\, dx"$$

für das bestimmte Integral, denn in beiden Fällen ist der Ausdruck keine Funktion von x.

Der Bereich von x in „$(x) . \varphi x$" oder „$(\exists x) . \varphi x$" erstreckt sich über das ganze Feld der Werte von x, für die „φx" Sinn hat, und daher liegt im Sinn von „$(x) . \varphi x$" oder „$(\exists x) . \varphi x$" die Annahme, daß ein solches Feld bestimmt ist. Das in „$(x) . \varphi x$" oder „$(\exists x) . \varphi x$" vorkommende x heißt (nach Peano) eine „Scheinveränderliche". ~~Es ergibt sich aus dem Sinn von „$(\exists x) . \varphi x$", daß~~ das x in diesem Ausdruck auch eine Scheinveränderliche ist. Eine Proposition, in der x als Scheinveränderliche vorkommt, ist keine Funktion von x. So z. B. wird „$(x) . x = x$" bedeuten: „Jedes Ding ist sich selbst gleich". Das ist eine absolute Konstante, nicht eine Funktion einer Veränderlichen x. Eben darum heißt x in solchen Fällen eine *Schein*veränderliche.

Neben dem „*Bereich*" von x in „$(x) . \varphi x$" oder „$(\exists x) . \varphi x$" als dem Feld der Werte, die x haben kann, werden wir noch von der *Erstreckung* von x sprechen und damit die Funktion meinen, von der alle oder einige Werte behauptet werden. Wenn wir alle (oder einige) Werte von „φx" behaupten, ist „φx" die Erstreckung von x; wenn wir alle (oder einige) Werte von „$\varphi x \supset p$" behaupten, ist „$\varphi x \supset p$" die Erstreckung von x; wenn wir alle (oder einige) Werte von „$\varphi x \supset \psi x$" behaupten, wird „$\varphi x \supset \psi$" die Erstreckung von x sein und so weiter. Die Erstreckung ist durch die Zahl der Punkte nach dem „(x)" oder „$(\exists x)$" angegeben, d. h. die Erstreckung reicht vorwärts, bis wir zu einer gleich großen Punktzahl gelangen, die kein logisches Produkt, oder zu einer größeren, die ein logisches Produkt bezeichnet, oder zum Ende der behaupteten Proposition, in der „(x)" oder „$(\exists x)$" vor-

kommt, und zwar immer bis zum ersten derartigen Fall[1]). So wird z. B.

$$„(x) : \varphi x . \supset . \psi x"$$

bedeuten: „φx impliziert immer ψx', dagegen wird

$$„(x) . \varphi x . \supset . \psi x"$$

bedeuten: „wenn φx immer wahr ist, dann ist ψx wahr für das Argument x".

Man beachte, daß in der Proposition

$$(x) . \varphi x . \supset . \psi x$$

die zwei x miteinander keinen Zusammenhang haben. Da nämlich nur *ein* Punkt nach dem eingeklammerten x steht, ist das Gebiet des ersten x auf das dem eingeklammerten x unmittelbar folgende „φx" beschränkt. Es trägt gewöhnlich zur Klarheit bei, wenn man

$$(x) . \varphi x . \supset . \psi y$$

schreibt, statt

$$(x) . \varphi x . \supset . \psi x ;$$

denn der Gebrauch verschiedener Buchstaben betont das Fehlen eines Zusammenhanges zwischen den zwei Veränderlichen; es besteht aber keine logische Notwendigkeit, verschiedene Buchstaben zu gebrauchen, und es ist bisweilen *praktisch*, denselben Buchstaben zu gebrauchen.

Mehrdeutige Behauptung und die echte Veränderliche. Es kann irgendein beliebiger Wert „φx" der Funktion $\varphi \hat{x}$ behauptet werden. So eine Behauptung eines mehrdeutigen Vertreters der Werte von $\varphi \hat{x}$ wird symbolisiert durch

$$„\vdash . \varphi x".$$

Mehrdeutige Behauptung dieser Art ist ein Grundbegriff, der nicht durch Ausdrücke, bestehend aus der Behauptung von Propositionen, definiert werden kann. Dieser Grundbegriff ist auch der einzige, der einen Gebrauch der Veränderlichen involviert. Abgesehen von der mehrdeutigen Behauptung hätte die Betrachtung von „φx", das ja ein mehrdeutiger Vertreter der Werte von $\varphi \hat{x}$ ist, wenig Bedeutung. Wenn wir „φx" betrachten oder behaupten, heißt die Veränderliche x eine „echte Veränderliche". Man nehme z. B. das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten in der Form, die es in der formalen Logik der Tradition hat:

„*a* ist *b* oder nicht *b*".

[1]) Das stimmt überein mit den oben S. 18 und 19 erklärten Regeln über das Vorkommen von Punkten beim Typus der Gruppe II.

Hier sind a und b echte Veränderliche: werden sie variiert, so ergeben sich stets verschiedene Propositionen, und doch sind sie alle wahr. Solange a und b unbestimmt sind, wie im obigen Ausdruck, wird nicht *eine* bestimmte Proposition behauptet, sondern was behauptet wird, ist nur *irgendein* Wert der betreffenden Propositionalfunktion. Das kann legitimerweise nur behauptet werden, wenn jeder wie immer gewählte Wert wahr ist, d. h. wenn alle Werte wahr sind. So ist die obige Form des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten äquivalent mit

$$„(a, b) \,.\, a \text{ ist } b \text{ oder nicht } b“,$$

d. h. mit „es ist immer wahr, daß a entweder b oder nicht b ist“. Obzwar äquivalent, sind diese zwei Formen aber doch nicht identisch, und wir werden es nötig finden, sie auseinander zu halten.

Wenn wir einen Ausdruck behaupten, der eine echte Veränderliche enthält, wie z. B.

$$„\vdash . x = x“,$$

so behaupten wir *irgendeinen* Wert einer Propositionalfunktion. Wenn wir einen Ausdruck behaupten, der eine Scheinveränderliche enthält, wie in

$$„\vdash . (x) . x = x“$$

oder

$$„\vdash . (\exists x) . x = x“,$$

so behaupten wir im ersten Fall *alle* Werte, im zweiten Fall *einige* (unbestimmte) Werte der betreffenden Propositionalfunktion. Es ist klar, daß wir nur dann legitimerweise „*irgendeinen* Wert“ behaupten können, wenn *alle* Werte wahr sind; da nämlich der Wert der Veränderlichen noch zu bestimmen bleibt, könnte er sonst so bestimmt werden, daß sich eine falsche Proposition ergibt. So können wir im obigen Fall, da wir

$$\vdash . x = x$$

haben, auch schließen $\vdash . (x) . x = x$.

Und allgemein: Wenn eine Behauptung, die eine echte Veränderliche x enthält, gegeben ist, können wir die echte Veränderliche in eine Scheinveränderliche verwandeln, indem wir x eingeklammert an den Anfang setzen und so viel Punkte folgen lassen, als nach dem Behauptungszeichen stehen.

Wenn wir einen Ausdruck behaupten, der eine echte Veränderliche enthält, so kann man genau genommen nicht sagen, wir behaupten eine *Proposition*, denn wir erhalten eine bestimmte Proposition nur, indem wir der Veränderlichen einen Wert zuweisen; dann aber bezieht sich unsere Behauptung nur auf *einen* bestimmten Fall, so daß sie gar nicht dieselbe umfassende Bedeutung hat, wie früher. Wenn wir einen Ausdruck mit einer echten Veränderlichen behaupten, so behaupten wir *eine* völlig unbestimmte von allen Propositionen, die sich ergeben, indem man der Veränderlichen verschiedene Werte erteilt. Es wird praktisch sein, von solchen Behauptungen zu sagen, sie *behaupten eine Propositionalfunktion.* Die gewöhnlichen Formeln der Mathematik enthalten solche Behauptungen;

$$„\sin^2 x + \cos^2 x = 1“$$

z. B. behauptet nicht diesen oder jenen speziellen Fall der Formel, noch auch, daß die Formel für *alle* möglichen Werte von x gilt, obwohl sie äquivalent ist mit dieser letzteren Behauptung; sie läßt einfach x völlig unbestimmt und behauptet, daß dabei die Formel gilt; und sie ist imstande, das legitimerweise zu tun, weil sich, wie immer x bestimmt werden mag, eine wahre Proposition ergibt.

Obwohl eine Behauptung, die eine echte Veränderliche enthält, im eigentlichen Sinne nicht eine Proposition behauptet, soll es von ihr doch heißen, sie behaupte eine Proposition, außer wenn das Wesen der betreffenden mehrdeutigen Behauptung noch zur Erörterung steht.

Definition und echte Veränderliche. Wenn das *definiens* eine oder mehrere echte Veränderliche enthält, muß das *definiendum* sie auch enthalten. Denn in diesem Fall haben wir eine Funktion der echten Veränderlichen und das *definiendum* muß denselben Sinn haben wie das *definiens* für alle Werte dieser Veränderlichen; und das erfordert, daß das Symbol, das das *definiendum* ist, die Buchstaben enthält, die die echten Veränderlichen darstellen. Diese Regel wird von Mathematikern nicht immer beobachtet und ihre Verletzung hat bisweilen zu beträchtlicher gedanklicher Verwirrung geführt, vornehmlich in der Geometrie und in der Philosophie des Raumes.

In den oben gegebenen Definitionen von „$p . q$“, „$p \supset q$“ und „$p \equiv q$“ sind p und q echte Veränderliche und erscheinen darum auf beiden Seiten der Definition. In der Definition von „$\sim\{(x) . \varphi x\}$“ ist nur die betrachtete Funktion, nämlich $\varphi \hat{x}$, eine echte Veränderliche; so braucht unter dem Gesichtspunkt der vorliegenden Regel x links nicht aufzutreten. Wenn aber eine echte Veränderliche eine Funktion ist, so ist es nötig, anzugeben, wie das Argument ausgefüllt werden soll, und darum unterliegt es Bedenken, eine Scheinveränderliche auszulassen, wo sie (wie im vorliegenden

Fall) das Argument der Funktion bildet, die selbst die echte Veränderliche ist. Das tritt klarer hervor, wenn wir statt einer allgemeinen Funktion $\varphi\hat{x}$ eine spezielle Funktion, etwa „$\hat{x} = a$" wählen und die Definition von $\sim\{(x) . x = a\}$ betrachten. Unsere Definition gibt

$$\sim\{(x) . x = a\} . = . (\exists x) . \sim(x = a) \ \mathrm{Df}.$$

Wenn wir aber eine Bezeichnungsweise gewählt hätten, in der der mehrdeutige Wert „$x = a$", der die Scheinveränderliche x enthält, im *definiendum* nicht vorkäme, hätten wir eine Bezeichnungsweise unter Verwendung der Funktion selbst, nämlich „$\hat{x} = a$", konstruieren müssen. Die enthält dann keine Scheinveränderliche, wäre aber schwerfällig im Gebrauch. In der Tat haben wir es praktisch und möglich gefunden — außer in den erklärenden Teilen —, den ausführlichen Gebrauch von Symbolen des Typus „φx" als Konstanten (z. B. $\hat{x} = a$) oder als echten Veränderlichen fast ganz aus diesem Werk zu verbannen.

Propositionen mit echten und Scheinveränderlichen. Die wichtigsten Propositionen mit echten und Scheinveränderlichen sind die folgenden:

1. „Wenn eine Propositionalfunktion behauptet werden kann, dann kann es auch die Proposition, daß alle Werte der Funktion wahr sind." Kürzer, wenn auch weniger genau: „Was von irgendeinem beliebig Gewählten gilt, das gilt von allen." Das führt sich selbst in die Regel über, daß wir eine in einer Behauptung vorkommende echte Veränderliche in eine Scheinveränderliche verwandeln können, indem wir den sie vertretenden Buchstaben eingeklammert unmittelbar hinter das Behauptungszeichen setzen.

2. „Was von allen gilt, gilt von irgendeinem", d. h.

$$\vdash : (x) . \varphi x . \supset . \varphi y .$$

Das stellt fest: „Wenn φx immer wahr ist, dann ist φy wahr".

3. „Wenn φy wahr ist, dann ist φx manchmal wahr", d. h.

$$\vdash : \varphi y . \supset . (\exists x) . \varphi x .$$

Eine behauptete Proposition von der Form „$(\exists x) . \varphi x$" ist der Ausdruck eines „Existenztheorems", lautend: „Es gibt ein x, für das φx wahr ist." Die obige Proposition gibt den praktisch allein gangbaren Weg zum Beweis von Existenztheoremen: wir müssen immer ein spezielles y finden, für das φy gilt, und dann schließen „$(\exists x) . \varphi x$". Wollten wir das Axiom annehmen, das das multiplikative heißt, oder das äquivalente von ZERMELO ausgesprochene

Axiom[1]), so ergäbe das in einer wichtigen Klasse von Fällen ein Existenztheorem, wo kein Spezialfall seiner Wahrheit gefunden werden kann.

Vermöge „$\vdash : (x) . \varphi x . \supset . \varphi y$" und „$\vdash : \varphi y . \supset . (\exists x) . \varphi x$" haben wir „$\vdash : (x) . \varphi x . \supset . (\exists x) . \varphi x$", d. h. „was immer wahr ist, ist manchmal wahr". Das wäre nicht der Fall, wenn nichts existierte; so enthalten unsere Annahmen die Annahme, daß es etwas gibt. Das ist enthalten im Grundsatz, daß, was von allen gilt, von irgendeinem gilt; denn das wäre nicht wahr, wenn es nicht „irgendeines" gäbe.

4. „Wenn φx immer wahr ist und ψx immer wahr ist, dann ist '$\varphi x . \psi x$' immer wahr", d. h.

$$\vdash :. (x) . \varphi x : (x) . \psi x : \supset . (x) . \varphi x . \psi x .$$

(Das erfordert, daß φ und ψ Funktionen sind, die Argumente vom selben *Typus* annehmen. Wir werden diese Forderung auf einer späteren Stufe erklären.) Die Umkehrung gilt auch, d. h. wir haben

$$\vdash :. (x) . \varphi x . \psi x . \supset : (x) . \varphi x : (x) . \psi x .$$

Es ist bis zu einem gewissen Grad willkürlich, welche der Propositionen mit echten und Scheinveränderlichen als Grundpropositionen genommen werden. Die im Hauptteil des Werkes (*9) in dieser Sache als Grundpropositionen gewählten sind die folgenden:

1. $\vdash : \varphi x . \supset . (\exists z) . \varphi z ,$

2. $\vdash : \varphi x \vee \varphi y . \supset . (\exists z) . \varphi z ,$

d. h. „wenn φx wahr ist oder φy wahr ist, dann ist $(\exists z) . \varphi z$ wahr". (Über die Notwendigkeit dieser Grundproposition vergleiche man die Bemerkungen in *9.11 im Hauptteil des Werkes.)

3. Wenn wir φy behaupten können, wo y eine echte Veränderliche ist, dann können wir auch $(x) . \varphi x$ behaupten; d. h. was von irgendeinem beliebig Gewählten gilt, das gilt von allen.

Formalimplikation und Formaläquivalenz. Wenn eine Implikation, etwa $\varphi x . \supset . \psi x$, allgemein gelten soll, d. h. wenn $(x) : \varphi x . \supset . \psi x$, werden wir sagen, daß φx das ψx *formal impliziert*; und Propositionen von der Form „$(x) : \varphi x . \supset . \psi x$" sollen der Ausdruck von *Formalimplikationen* heißen. In den gewöhnlichen Fällen von Implikation, wie „'Sokrates ist ein Mensch' impliziert 'Sokrates ist sterblich'" haben wir eine Proposition von der Form „$\varphi x . \supset . \psi x$" in einem Fall, in dem „$(x) : \varphi x . \supset . \psi x$"

[1]) Gemeint ist wohl das Auswahlaxiom. (Anm. des Übers.)

wahr ist. In einem solchen Fall fühlen wir die Implikation als Spezialfall einer Formalimplikation. So ist es gekommen, daß Implikationen, die nicht Spezialfälle von Formalimplikationen sind, überhaupt nicht als Implikationen angesehen worden sind. Es gibt auch einen praktischen Grund für die Vernachlässigung solcher Implikationen, denn man kann sie — allgemein gesprochen — nur *erkennen*, wenn schon bekannt ist, daß entweder ihre Voraussetzung falsch oder daß ihre Folge wahr ist; und in keinem dieser Fälle helfen sie uns zur Erkenntnis der Folge, denn im ersten Fall braucht die Folge nicht wahr zu sein und im zweiten ist sie schon bekannt. So dienen solche Implikationen nicht dem Zweck, für den Implikationen hauptsächlich von Nutzen sind, nämlich uns durch Deduktion Folgerungen erkennen zu lassen, von denen wir im vorhinein nichts wußten. *Formal*implikationen dagegen dienen zu diesem Zweck, dank der psychologischen Tatsache, daß uns oft „$(x):\varphi x\,.\supset.\,\psi x$" und φy bekannt sind in Fällen, wo ψy (das aus diesen Prämissen folgt) unmittelbar nicht leicht erkannt werden kann.

Obwohl diese Gründe die völlige Vernachlässigung von Implikationen, die nicht Fälle von Formalimplikationen sind, nicht rechtfertigen, sind es doch Gründe, die die Formalimplikation sehr wichtig machen. Eine Formalimplikation stellt fest, daß für alle möglichen Werte von x die Folge ψx wahr ist, wenn die Voraussetzung φx es ist. Da „$\varphi x\,.\supset.\,\psi x$" immer wahr sein wird, wenn φx falsch ist, sind nur jene Werte von x, die φx wahr machen, in einer Formalimplikation *von Bedeutung*; was eigentlich damit festgestellt wird, ist, daß für alle diese Werte ψx wahr ist. So stellen Propositionen von der Form „alle α sind β", „kein α ist β" Formalimplikationen fest, da die erste (wie aus dem eben Gesagten hervorgeht) feststellt

$$(x):x \text{ ist ein } \alpha\,.\supset.\,x \text{ ist ein } \beta,$$

während die zweite feststellt

$$(x):x \text{ ist ein } \alpha\,.\supset.\,x \text{ ist nicht ein } \beta.$$

Jede Formalimplikation „$(x):\varphi x\,.\supset.\,\psi x$" kann auch wiedergegeben werden durch: „Alle Werte von x, die dem φx genügen[1]), genügen auch dem ψx"; die Formalimplikation „$(x):\varphi x\,.\supset.\sim\psi x$" dagegen kann wiedergegeben werden durch: „Kein Wert von x, der dem φx genügt, genügt dem ψx".

[1]) Man sagt, ein Wert von x *genügt* dem φx oder dem $\varphi\hat{x}$, wenn φx für diesen Wert von x wahr ist.

Ganz ähnlich haben wir für „Einige α sind β" die Formel

$$(\exists x)\,.\,x \text{ ist ein } \alpha\,.\,x \text{ ist ein } \beta,$$

und für „Einige α sind nicht β" die Formel

$$(\exists x)\,.\,x \text{ ist ein } \alpha\,.\,x \text{ ist nicht ein } \beta.$$

Zwei Funktionen φx, ψx heißen *formal äquivalent*, wenn sie einander implizieren, d. h. wenn

$$(x):\varphi x\,.\equiv.\,\psi x,$$

und eine Proposition von dieser Form heißt eine *Formaläquivalenz*. Nach dem, was über Wahrheitswerte gesagt wurde, können φx und ψx, wenn sie formal äquivalent sind, in einer Wahrheitsfunktion einander ersetzen. Daher können für alle Zwecke der Mathematik oder des vorliegenden Werkes $\varphi\hat{z}$ und $\psi\hat{z}$ einander in jeder Proposition ersetzen, mit der wir zu tun haben werden. Nun ist es dasselbe, zu sagen, daß φx und ψx formal äquivalent sind, wie zu sagen, daß $\varphi\hat{z}$ und $\psi\hat{z}$ dieselbe *Extension* haben, d. h. daß jeder Wert von x, der der einen genügt, auch der anderen genügt. Wo immer also eine gleichbleibende Funktion in unserem Werk vorkommt, hängt der Wahrheitswert der Proposition, in der sie vorkommt, lediglich von der Extension der Funktion ab. Eine Proposition, die eine Funktion $\varphi\hat{z}$ enthält und diese Eigenschaft hat (daß nämlich ihr Wahrheitswert nur von der Extension von $\varphi\hat{z}$ abhängt), soll eine *extensionale* Funktion von $\varphi\hat{z}$ heißen. So werden alle Funktionen von Funktionen, mit denen gerade wir zu tun haben werden, extensionale Funktionen von Funktionen sein.

Das eben Gesagte erklärt den (oben bemerkten) Zusammenhang zwischen dem Umstand, daß die Funktionen von Propositionen, mit denen besonders die Mathematik zu tun hat, allesamt Wahrheitsfunktionen sind, und dem Umstand, daß sich die Mathematik mehr mit Extensionalem als mit Intensionalem befaßt.

Eine praktische Abkürzung. Die folgenden Definitionen geben wahlfrei anwendbare und oft praktischere Bezeichnungen:

$$\varphi x\,.\supset_x.\,\psi x:=:(x):\varphi x\,.\supset.\,\psi x \quad \text{Df},$$

$$\varphi x\,.\equiv_x.\,\psi x:=:(x):\varphi x\,.\equiv.\,\psi x \quad \text{Df}.$$

Diese Bezeichnungsweise „$\varphi x\,.\supset_x.\,\psi x$" verdanken wir Peano, der jedoch keine Bezeichnung für den allgemeinen Gedanken „$(x)\,.\,\varphi x$" hat. Man mag es als Übung im Gebrauch von Punkten als Klammern zur Kenntnis nehmen, daß wir auch hätten schreiben können

$$\varphi x \supset_x \psi x \,.\, = \,.\, (x) \,.\, \varphi x \supset \psi x \quad \text{Df},$$

$$\varphi x \equiv_x \psi x \,.\, = \,.\, (x) \,.\, \varphi x \equiv \psi x \quad \text{Df}.$$

Im praktischen Gebrauch jedoch, wenn $\varphi \hat{x}$ und $\psi \hat{x}$ spezielle Funktionen sind, ist es nicht möglich, weniger Punkte zu verwenden als in der ersten Form; und oft sind sogar mehr erforderlich.

Die folgenden Definitionen geben abgekürzte Bezeichnungsweisen für Funktionen von zwei oder mehr Veränderlichen:

$$(x, y) \,.\, \varphi(x, y) \,.\, = \,:\, (x) \,:\, (y) \,.\, \varphi(x, y) \quad \text{Df},$$

und so weiter für irgendeine Anzahl von Veränderlichen;

$$\varphi(x, y) \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \psi(x, y) \,:\, = \,:\, (x, y) \,:\, \varphi(x, y) \,.\, \supset \,.\, \psi(x, y) \quad \text{Df}.$$

und so weiter für jede beliebige Zahl von Veränderlichen.

Identität. Die Propositionalfunktion „x ist identisch mit y" wird durch

$$x = y$$

ausgedrückt. Das wird definiert werden (vgl. $*13.01$), aber wegen gewisser schwieriger in dieser Definition enthaltener Punkte wollen wir sie hier unterlassen (vgl. Kapitel II). Wir haben natürlich

$$\vdash \,.\, x = x \text{ (den Identitätssatz)},$$

$$\vdash \,:\, x = y \,.\, \equiv \,.\, y = x,$$

$$\vdash \,:\, x = y \,.\, y = z \,.\, \supset \,.\, x = z.$$

Die erste dieser Anschreibungen drückt die *reflexive* Eigenschaft der Identität aus: eine Relation heißt *reflexiv*, wenn sie zwischen einem Term und diesem selbst gilt, sei es allgemein oder doch immer dann, wenn sie zwischen diesem Term und irgendeinem gilt. Die zweite der obigen Propositionen drückt aus, daß Identität eine *symmetrische* Relation ist: eine Relation heißt *symmetrisch*, wenn sie immer, sofern sie zwischen x und y gilt, dann auch zwischen y und x gilt. Die dritte Proposition drückt aus, daß Identität eine *transitive* Relation ist: eine Relation heißt *transitiv*, wenn sie immer, falls sie zwischen x und y und zwischen y und z gilt, dann auch zwischen x und z gilt.

Wir werden finden, daß für das Gleichheitszeichen in der Mathematik keine neue Definition erforderlich ist: alle mathematischen Gleichungen, in denen das Gleichheitszeichen in gewöhnlicher Weise gebraucht wird, drücken eine Identität aus und gebrauchen so das Gleichheitszeichen im obigen Sinn.

Wenn x und y identisch sind, kann eins das andere in jeder Proposition ersetzen, ohne den Wahrheitswert der Proposition zu ändern; so haben wir

$$\vdash \,:\, x = y \,.\, \supset \,.\, \varphi x \equiv \varphi y.$$

Das ist eine Grundeigenschaft der Identität, aus der die übrigen Eigenschaften zumeist folgen.

Man könnte denken, daß Identität nicht viel Bedeutung hat, da sie zwischen x und y nur gelten kann, wenn x und y verschiedene Symbole für denselben Gegenstand sind. Diese Ansicht trifft aber nicht für das zu, was wir „beschreibende Ausdrücke" nennen werden, d. i. „das So-und-so". Gerade im Hinblick auf solche Ausdrücke ist Identität von Bedeutung, wie wir kurz zeigen werden. Eine Proposition wie „Scott war der Verfasser von Waverley" drückt eine Identität aus, bei der ein beschreibender Ausdruck vorkommt (nämlich „der Verfasser von Waverley"); das zeigt, wieso in solchen Fällen die Behauptung einer Identität von Bedeutung sein kann. Im wesentlichen derselbe Fall liegt vor, wenn die Zeitungen sagen „die Identität des Verbrechers wurde nicht ermittelt". In einem solchen Fall ist der Verbrecher bekannt in einem beschreibenden Ausdruck, nämlich „der Mensch, der die Tat beging", und wir wollen ein x finden, von dem es wahr ist, daß „x = der Mensch, der die Tat beging". Wenn ein solches x gefunden ist, ist die Identität des Verbrechers ermittelt.

Klassen und Relationen. Eine *Klasse* (was dasselbe wie eine *Mannigfaltigkeit* oder eine *Menge* ist) bilden alle Gegenstände, die einer Propositionalfunktion genügen. Wenn α die aus den $\varphi \hat{x}$ genügenden Gegenständen gebildete Klasse ist, werden wir sagen, α sei die durch $\varphi \hat{x}$ *bestimmte* Klasse. Jede Propositionalfunktion bestimmt so eine Klasse, obwohl dann, wenn die Propositionalfunktion eine immer falsche ist, die Klasse *Null* sein, d. h. keine Glieder haben wird. Die durch die Funktion $\varphi \hat{x}$ bestimmte Klasse soll durch $\hat{z}(\varphi z)$ dargestellt werden[1]). So wird z. B., wenn φx eine Gleichung ist, $\hat{z}(\varphi z)$ die Klasse ihrer Wurzeln sein; wenn φx bedeutet „x hat zwei Beine und keine Federn", wird $\hat{z}(\varphi z)$ die Klasse der Menschen sein; wenn φx bedeutet „$0 < x < 1$", wird $\hat{z}(\varphi z)$ die Klasse der echten Brüche sein und so fort.

Es liegt auf der Hand, daß dieselbe Klasse von Gegenständen vielerlei bestimmende Funktionen haben wird. Wenn es nicht nötig ist, eine bestimmende Funktion einer Klasse besonders anzugeben,

[1]) Statt z kann ein beliebiger anderer Buchstabe verwendet werden.

kann die Klasse in praktischer Weise durch einen einzelnen griechischen Buchstaben dargestellt werden. So sollen griechische Buchstaben — außer solche, denen schon eine feste Bedeutung zugewiesen ist — ausschließlich für Klassen verwendet werden.

In der formalen Logik erheben sich zwei Arten von Schwierigkeiten: eine im Zusammenhang mit Klassen und Relationen und die andere in Verbindung mit Beschreibungsfunktionen. Der schwierige Punkt bei Klassen und Relationen besteht, soweit es sich um Klassen handelt, darin, daß eine Klasse kein als Argument zu irgendeiner ihrer bestimmenden Funktionen geeigneter Gegenstand sein kann. Wenn α eine Klasse und φx eine ihrer bestimmenden Funktionen darstellt [so daß $\alpha = \hat{z}(\varphi z)$], so genügt es nicht, daß $\varphi\alpha$ eine falsche Proposition wäre, sie muß vielmehr sinnlos sein. So scheint eine gewisse Einteilung dessen, was anscheinend Gegenstand ist, in Dinge wesentlich verschiedener Typen notwendig zu werden. Diese ganze Frage wird in Kapitel II (über die Typentheorie)[1]) erörtert und die formale Behandlung in systematischer Darstellung, die den wesentlichsten Teil dieses Werkes bildet, steht unter dem Leitgedanken dieser Erörterung. Der Teil der systematischen Darstellung, der es besonders mit der Klassentheorie zu tun hat, ist ∗20; in dieser Einleitung ist sie in Kapitel III erörtert. Es genügt, hier zu bemerken, daß wir in der vollständigen Behandlung in ∗20 die Entscheidung darüber vermieden haben, ob eine Klasse von Dingen in irgendeinem Sinne Existenz als ein einziger Gegenstand hat. Eine irgendwie geartete Entscheidung dieser Frage ist für unsere Logik bedeutungslos; wären wir zur Anschauung gelangt, eine Lösung, die Klassen und Relationen in irgendeinem Sinne als wirkliche Gegenstände aufrechterhielte, sei wahr und werde wahrscheinlich allgemein angenommen, so hätten wir allerdings dadurch vielleicht eine oder zwei Definitionen und ein paar vorbereitende Propositionen vereinfachen können. Unsere Symbole, wie „$\hat{x}(\varphi x)$" und α und andere, die Klassen und Relationen darstellen, sind nur in ihrem Gebrauche definiert; genau so, wie ∇^2, das für

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

steht, keinen Sinn hat ohne eine geeignete Funktion der x, y, z, der gegenüber es Operator ist. Das Ergebnis unserer Definitionen ist, daß die Art, in der wir Klassen gebrauchen, im allgemeinen

[1]) Diese Klammer steht im Original nicht. (Anm. des Übers.)

dem gewöhnlichen Denk- und Sprachgebrauch entspricht; und was immer die letzte Deutung im einen Fall sein mag, ist dann auch die Deutung im anderen. In der Tat leistet so unsere Typeneinteilung in Kapitel II wirklich nur den einen, freilich wesentlichen Dienst, unsere Zurückhaltung gegenüber Schlußketten zu rechtfertigen, die zu widersprechenden Folgerungen führen. Die Rechtfertigung aber liegt darin, daß, was Propositionen zu sein scheinen, in Wirklichkeit Sinnlosigkeiten sind.

Die in der Klassentheorie vorkommenden Definitionen, durch die der Begriff einer Klasse (wenigstens in seinem Gebrauche) auf die anderen als Grundbegriffe angenommenen gegründet wird, können nicht verstanden werden ohne eine umfassendere Erörterung, als sie jetzt gegeben werden kann (vgl. Kapitel II dieser Einleitung und auch ∗20). Dementsprechend gehen wir in diesem vorläufigen Überblick dazu über, die wichtigeren einfachen Propositionen aufzustellen, die sich aus diesen Definitionen ergeben, und stellen es dem Leser frei, im Geiste den gewöhnlichen, unanalysierten Begriff einer Klasse von Dingen anzuwenden. Unsere Symbole stimmen in ihrem Gebrauch mit dem gewöhnlichen Gebrauch dieses Begriffes in der Sprache überein. Man beachte, daß in der systematischen Darstellung unsere Behandlung der Klassen und Relationen keine neuen Grundbegriffe erfordert und nur zwei neue Grundpropositionen, nämlich die zwei Formen des „Reduzibilitätsaxioms" für eine bzw. zwei Veränderliche.

Die Propositionalfunktion „x ist ein Element der Klasse α" soll nach Peano durch die Bezeichnung

$$x \varepsilon \alpha$$

ausgedrückt werden. ε ist hier als der Anfangsbuchstabe von ἐστί gewählt. „$x \varepsilon \alpha$" kann gelesen werden: „x ist ein α". So wird „$x \varepsilon$ Mensch" bedeuten „x ist ein Mensch" und so fort. Zur Vereinfachung des Druckbildes setzen wir

$$x \sim \varepsilon \alpha \,.\!=.\, \sim(x \varepsilon \alpha) \quad \text{Df},$$
$$x, y \varepsilon \alpha \,.\!=.\, x \varepsilon \alpha \,.\, y \varepsilon \alpha \quad \text{Df}.$$

Für „Klasse" schreiben wir „Cls"; „$\alpha \varepsilon$ Cls" bedeutet so „α ist eine Klasse".

Wir haben $\vdash : x \varepsilon \hat{z}(\varphi z) \,.\equiv.\, \varphi x,$

d. h. „'x ist ein Element der durch $\varphi \hat{z}$ bestimmten Klasse' ist äquivalent mit 'x genügt dem $\varphi \hat{z}$' oder 'φx ist wahr'".

Eine Klasse ist vollständig bestimmt, wenn ihr Elementenbestand bekannt ist, d. h. es gibt nicht zwei verschiedene Klassen mit demselben Elementenbestand. Wenn also φx, ψx formal äquivalente Funktionen sind, bestimmen sie dieselbe Klasse; wenn nämlich in diesem Falle x ein Element der durch $\varphi \hat{x}$ bestimmten Klasse ist und darum dem φx genügt, so genügt es auch dem ψx und ist darum ein Element der durch $\psi \hat{x}$ bestimmten Klasse. So haben wir

$$\vdash : . \hat{z}(\varphi z) = \hat{z}(\psi z) . \equiv : \varphi x . \equiv_x . \psi x .$$

Die folgenden Propositionen sind klar und wichtig:

$$\vdash : . \alpha = \hat{z}(\varphi z) . \equiv : x \varepsilon \alpha . \equiv_x . \varphi x ,$$

d. h. α ist mit der durch $\varphi \hat{z}$ bestimmten Klasse dann und nur dann identisch, wenn „x ist ein α" mit φx formal äquivalent ist;

$$\vdash : . \alpha = \beta . \equiv : x \varepsilon \alpha . \equiv_x . x \varepsilon \beta ,$$

d. h. zwei Klassen α und β sind dann und nur dann identisch, wenn sie denselben Elementenbestand haben;

$$\vdash . \hat{x}(x \varepsilon \alpha) = \alpha ,$$

d. h. die Klasse, deren bestimmende Funktion lautet „x ist ein α", ist α; mit anderen Worten, α ist die Klasse der Gegenstände, die Elemente von α sind;

$$\vdash . \hat{z}(\varphi z) \varepsilon \mathrm{Cls},$$

d. h. die durch die Funktion $\varphi \hat{z}$ definierte Klasse ist eine Klasse.

Man wird nach dem Obigen einsehen, daß jede Funktion *einer* Veränderlichen durch eine äquivalente Funktion von der Form „$x \varepsilon \alpha$" ersetzt werden kann. Darum wird jede extensionale Funktion von Funktionen, die gilt, wenn ihr Argument eine Funktion von der Form „$\hat{z} \varepsilon \alpha$" ist, gleichviel, welchen möglichen Wert α haben mag, auch gelten, wenn ihr Argument eine beliebige Funktion $\varphi \hat{z}$ ist. So kann eine Variation von Klassen an die Stelle der Variation von Funktionen einer Veränderlichen in all den Propositionen treten, mit denen *wir* zu tun haben.

In einer völlig analogen Weise führen wir duale oder dyadische Relationen ein, d. s. Relationen zwischen zwei Termen. Solche Relationen sollen einfach „Relationen" heißen; Relationen mit mehr als zwei Termen sollen davon unterschieden werden als *mehrfache* Relationen oder (wenn die Zahl ihrer Terme bestimmt ist) als dreifache, vierfache ... Relationen oder als triadische, tetradische ... Relationen. Solche Relationen werden uns erst beschäftigen, wenn

wir zur Geometrie kommen. Für den Augenblick sind die einzigen Relationen, mit denen wir zu tun haben, *duale* Relationen.

Relationen müssen — wie Klassen — *extensional* gefaßt werden, d. h. wenn R und S Relationen sind, die zwischen demselben Paar von Termen gelten, sollen R und S identisch sein. Wir können eine Relation in dem Sinn, in dem wir sie für unsere Zwecke benötigen, als eine Klasse von Paaren ansehen; d. h. das Paar (x, y) soll eines aus der Klasse der Paare sein, von der die Relation R konstituiert wird, wenn x die Relation R zu y hat[1]). Diese Auffassung von Relationen als Klassen von Paaren wird jedoch nicht in unsere symbolische Behandlung eingehen und wird nur erwähnt, um zu zeigen, daß es möglich ist, den Sinn des Wortes *Relation* so zu verstehen, daß eine Relation durch ihre Extension bestimmt sein soll.

Eine Funktion $\varphi(x, y)$ bestimmt eine Relation R zwischen x und y. Wenn wir eine Relation als eine Klasse von Paaren betrachten, so ist die durch $\varphi(x, y)$ bestimmte Relation die Klasse der Paare (x, y), für die $\varphi(x, y)$ wahr ist. Die durch die Funktion $\varphi(x, y)$ bestimmte Relation soll durch

$$\hat{x} y \, \varphi(x, y)$$

bezeichnet werden. Wir werden einen großen Buchstaben für eine Relation verwenden, wenn es nicht nötig ist, die besondere Form der bestimmenden Funktion anzugeben. Wo immer also ein großer Buchstabe vorkommt, heißt das, daß er für eine Relation steht.

Die Propositionalfunktion „x hat die Relation R zu y" soll ausgedrückt werden durch die Bezeichnung

$$x R y .$$

Diese Bezeichnungsweise wurde erfunden, um sich so nahe als möglich an die gewöhnliche Sprache zu halten, die ja auch, wenn sie eine Relation auszudrücken hat, sie im allgemeinen zwischen ihren Termen anführt, wie in „x liebt y", „x gleicht y", „x ist größer als y" und so fort. Für „Relation" werden wir „Rel" schreiben; „$R \varepsilon$ Rel" bedeutet also „R ist eine Relation".

Infolge unserer extensionalen Auffassung der Relationen haben wir

$$\vdash : . \hat{x} \hat{y} \, \varphi(x, y) = \hat{x} \hat{y} \, \psi(x, y) . \equiv : \varphi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi(x, y) ,$$

---

[1]) Solch ein Paar hat eine *Richtung*, d. h. das Paar (x, y) ist verschieden vom Paar (y, x), außer wenn $x = y$. Wir werden es ein „Paar mit Richtung" heißen zum Unterschied von der aus x und y bestehenden Klasse. Es möge auch ein *geordnetes* Paar heißen.

d. h. zwei Funktionen von zwei Veränderlichen bestimmen dann und nur dann dieselbe Relation, wenn die zwei Funktionen formal äquivalent sind.

Wir haben
$$\vdash . z\{\hat{x}\hat{y}\,\varphi(x,y)\}\,w\,.\equiv .\,\varphi(z,w),$$

d. h. „z hat zu w die durch die Funktion $\varphi(x,y)$ bestimmte Relation" ist äquivalent mit $\varphi(z,w)$;

$$\vdash :. R = \hat{x}\hat{y}\,\varphi(x,y) . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . \varphi(x,y),$$
$$\vdash :. R = S . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . xSy,$$
$$\vdash . \hat{x}\hat{y}(xRy) = R,$$
$$\vdash . \{\hat{x}\hat{y}\,\varphi(x,y)\}\,\varepsilon\,\mathrm{Rel}.$$

Diese Propositionen sind analog den früher für Klassen angegebenen. Aus ihnen ergibt sich, daß jede Funktion von zwei Veränderlichen mit einer Funktion von der Form xRy formal äquivalent ist; daher kann in extensionalen Funktionen von zwei Veränderlichen eine Variation von Relationen an die Stelle einer Variation von Funktionen zweier Veränderlicher treten.

Klassen sowohl wie Relationen haben Eigenschaften, die den meisten Eigenschaften von Propositionen analog sind, die sich aus Negierung und logischer Summenbildung ergeben. Das *logische Produkt* von zwei Klassen α und β ist ihr gemeinsamer Teil, d. h. die Klasse der Terme, die Elemente von beiden sind. Es wird durch $\alpha \cap \beta$ dargestellt. So setzen wir

$$\alpha \cap \beta = \hat{x}(x\,\varepsilon\,\alpha\,.\,x\,\varepsilon\,\beta)\ \mathrm{Df}.$$

Das gibt uns
$$\vdash : x\,\varepsilon\,\alpha \cap \beta\,.\equiv .\,x\,\varepsilon\,\alpha\,.\,x\,\varepsilon\,\beta,$$

d. h. „x ist ein Element des logischen Produktes von α und β" ist äquivalent mit dem logischen Produkt von „x ist ein Element von α" und „x ist ein Element von β".

In ähnlicher Weise ist die *logische Summe* von zwei Klassen α und β die Klasse der Terme, die Elemente (wenigstens)[1]) einer von beiden sind; wir bezeichnen sie mit $\alpha \cup \beta$. Die Definition ist

$$\alpha \cup \beta = \hat{x}(x\,\varepsilon\,\alpha\,.\vee .\,x\,\varepsilon\,\beta)\ \mathrm{Df},$$

und der Zusammenhang mit der logischen Summe von Propositionen ist gegeben durch

$$\vdash :. x\,\varepsilon\,\alpha \cup \beta\,.\equiv : x\,\varepsilon\,\alpha\,.\vee .\,x\,\varepsilon\,\beta.$$

[1]) Der Deutlichkeit wegen in der Übersetzung hinzugefügt. (Anm. des Übers.)

Die *Negation* einer Klasse α besteht aus jenen Termen x, für die „$x\,\varepsilon\,\alpha$" *sinnvoll und richtig* negiert werden kann. Wir werden finden, daß es Terme anderer Typen gibt, für die „$x\,\varepsilon\,\alpha$" weder wahr noch falsch, sondern sinnlos ist. Diese Terme sind nicht Elemente der Negation von α.

So ist die *Negation* einer Klasse α die Klasse von Termen eines passenden Typus, die nicht ihre Elemente sind, d. h. die Klasse $\hat{x}(x \sim \varepsilon\,\alpha)$. Wir nennen diese Klasse „$-\alpha$" (zu lesen „Non-α"); die Definition ist also

$$-\alpha = \hat{x}(x \sim \varepsilon\,\alpha)\ \mathrm{Df}$$

und der Zusammenhang mit der Negation von Propositionen ist durch

$$\vdash : x\,\varepsilon - \alpha\,.\equiv .\,x \sim \varepsilon\,\alpha$$

gegeben.

An Stelle der Implikation haben wir die Relation der *Einschließung*. Eine Klasse α heißt in einer Klasse β eingeschlossen oder enthalten, wenn alle Elemente von α auch Elemente von β sind, d. h. wenn $x\,\varepsilon\,\alpha\,.\supset_x .\,x\,\varepsilon\,\beta$. Wir schreiben „$\alpha \subset \beta$" für „$\alpha$ ist in β enthalten". So setzen wir

$$\alpha \subset \beta\,.=: x\,\varepsilon\,\alpha\,.\supset_x .\,x\,\varepsilon\,\beta\ \mathrm{Df}.$$

Die meisten Formeln betreffend $p.q$, $p \vee q$, $\sim p$, $p \supset q$ bleiben wahr, wenn wir an ihre Stelle $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $-\alpha$, $\alpha \subset \beta$ setzen. Statt Äquivalenz setzen wir Identität; denn „$p \equiv q$" war als „$p \supset q\,.\,q \supset p$" definiert; „$\alpha \subset \beta\,.\,\beta \subset \alpha$" aber gibt „$x\,\varepsilon\,\alpha\,.\equiv_x .\,x\,\varepsilon\,\beta$", wonach $\alpha = \beta$.

Im Folgenden geben wir Propositionen über Klassen in Analogie zu früher gegebenen Propositionen über Propositionen:

$$\vdash . \alpha \cap \beta = -(-\alpha \cup -\beta),$$

d. h. das gemeinsame Gebiet von α und β ist die Negation von „Non-α oder Non-β";

$$\vdash . x\,\varepsilon(\alpha \cup -\alpha),$$

d. h. „x ist ein Element von α oder von Non-α";

$$\vdash . x \sim \varepsilon(\alpha \cap -\alpha),$$

d. h. „x ist nicht zugleich ein Element von α und von Non-α";

$$\vdash . \alpha = -(-\alpha),$$
$$\vdash : \alpha \subset \beta\,.\equiv .\,-\beta \subset -\alpha,$$
$$\vdash : \alpha = \beta\,.\equiv .\,-\alpha = -\beta,$$
$$\vdash : \alpha = \alpha \cap \alpha,$$
$$\vdash : \alpha = \alpha \cup \alpha.$$

Die zwei letzten sind die zwei Formen des Tautologiesatzes.
Das Absorptionsgesetz gilt in der Form

$$\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \alpha \cap \beta .$$

So ist z. B. „Alle Kreter sind Lügner" äquivalent mit „Die Kreter sind identisch mit den lügenden Kretern".

Ebenso wie wir
$$\vdash : p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$$
haben, so haben wir auch

$$\vdash : \alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma .$$

Das ist der Ausdruck des gewöhnlichen Schlusses nach Barbara (mit vertauschten Prämissen); denn „$\alpha \subset \beta$" bedeutet dasselbe wie „alle α sind β", so daß die obige Proposition feststellt: „Wenn alle α auch β sind und alle β auch γ, dann sind alle α auch γ". (Man beachte, daß Schlüsse herkömmlicherweise mit „daher" ausgesprochen werden, als ob sie Prämissen *und* Schlußsatz behaupteten. Das ist natürlich nur eine nachlässige Sprechweise, denn was wirklich behauptet wird, ist nur der Zusammenhang der Prämissen mit dem Schlußsatz.)

Wenn der Untersatz ein individuelles Subjekt hat, ist der Schluß nach Barbara
$$\vdash : x \varepsilon \beta . \beta \subset \gamma . \supset . x \varepsilon \gamma ,$$
z. B. „wenn Sokrates ein Mensch ist und alle Menschen sterbliche Wesen sind, dann ist Sokrates ein sterbliches Wesen". Das ist, wie von Peano gezeigt wurde, kein Spezialfall von „$\alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$", da „$x \varepsilon \beta$" kein Spezialfall von „$\alpha \subset \beta$" ist. Dieser Punkt ist wichtig, weil sich die traditionelle Logik hier im Irrtum befindet. Die Art und Größe dieses Irrtums wird auf einer späteren Stufe klarer werden.

Für Relationen haben wir ganz analoge Definitionen und Propositionen. Wir setzen

$$R \dot{\cap} S = \hat{x}\hat{y}(xRy . xSy) \text{ Df},$$

was zu
$$\vdash : x(R \dot{\cap} S)y . \equiv . xRy . xSy$$
führt.

Ähnlich
$$R \dot{\cup} S = \hat{x}\hat{y}(xRy . \vee . xSy) \text{ Df},$$
$$\dot{-} R = \hat{x}\hat{y}\{\sim(xRy)\} \text{ Df},$$
$$R \dot{\subset} S . = : xRy . \supset_{x,y} . xSy \text{ Df}.$$

Ganz allgemein: Wenn wir analoge, aber doch verschiedene Symbole für Relationen und Klassen brauchen, werden wir für Rela-

tionen das Symbol wählen, das man erhält, indem man dem entsprechenden Symbol für Klassen an geeigneter Stelle einen Punkt beigibt. (Der Punkt darf aber nicht auf die Schreiblinie gesetzt werden, denn das würde zu Verwechslungen mit dem Gebrauch von Punkten als Klammern führen.) Solche Symbole aber erfordern und erhalten auch in jedem einzelnen Fall eine eigene Definition.

Wir sagen, eine Klasse *existiert*, wenn sie wenigstens *ein* Element hat: „α existiert" wird bezeichnet mit „$\exists ! \alpha$". So setzen wir

$$\exists ! \alpha . = . (\exists x) . x \varepsilon \alpha \text{ Df}.$$

Die Klasse, die kein Element hat, heißt die „Nullklasse" und wird mit „Λ" bezeichnet. Jede Propositionalfunktion, die immer falsch ist, bestimmt die Nullklasse. Eine solche Funktion ist uns schon bekannt, nämlich „x ist nicht identisch mit x", was wir mit „$x \neq x$" bezeichnen. So können wir diese Funktion zur Definition von Λ benützen und setzen
$$\Lambda = \hat{x}(x \neq x) \text{ Df}.$$

Die Klasse, die durch eine immer wahre Funktion bestimmt ist, heißt die *Allklasse* und wird durch V dargestellt; so ist

$$V = \hat{x}(x = x) \text{ Df}.$$

So ist Λ die Negation von V. Wir haben

$$\vdash . (x) . x \varepsilon V ,$$

d. h. „'x ist ein Element von V' ist immer wahr"; und

$$\vdash . (x) . x \sim \varepsilon \Lambda ,$$

d. h. „'x ist ein Element von Λ' ist immer falsch". Auch

$$\vdash : \alpha = \Lambda . \equiv . \sim \exists ! \alpha ,$$

d. h. „α ist die Nullklasse" ist äquivalent mit „α existiert nicht".

Für Relationen gebrauchen wir ähnliche Bezeichnungsweisen. Wir setzen
$$\dot{\exists} ! R . = . (\exists x, y) . xRy ;$$
d. h. „$\dot{\exists} ! R$" bedeutet, daß es wenigstens *ein* Paar von x und y gibt, zwischen denen die Relation R gilt. $\dot{\Lambda}$ wird die Relation sein, die nie gilt, und $\dot{V}$ die Relation, die immer gilt. $\dot{V}$ ist praktisch nie erforderlich; $\dot{\Lambda}$ wird die Relation $\hat{x}\hat{y}(x \neq x . y \neq y)$ sein. Wir haben
$$\vdash . (x, y) . \sim (x \dot{\Lambda} y) ,$$
$$\vdash : R = \dot{\Lambda} . \equiv . \sim \dot{\exists} ! R .$$

Es gibt keine Klasse, die Gegenstände von mehr als *einem* Typus enthielte. Dementsprechend gibt es zu jedem Typus von Gegenständen eine Allklasse und eine Nullklasse. Diese Symbole brauchen aber nicht unterschieden werden, da sich finden wird, daß es hier keine Verwechslungsmöglichkeit gibt. Ähnliche Bemerkungen gelten auch für Relationen.

Beschreibungen. Mit einer „Beschreibung" meinen wir einen Ausdruck von der Form „das So-und-so" oder von einer damit äquivalenten Form. Für den Augenblick richten wir unsere Aufmerksamkeit ausschließlich auf das „*das*" in der Einzahl. Wir werden dieses Wort im strengen Sinn gebrauchen, so daß damit Einzigkeit gemeint ist; z. B. würden wir nicht sagen „A ist *der* Sohn von B", wenn B noch andere Söhne außer A hätte. So soll eine Beschreibung von der Form „das So-und-so" eine Anwendung nur in dem Falle haben, daß es *ein* So-und-so gibt und nicht mehr. Daher erfordert eine Beschreibung eine Propositionalfunktion $\varphi\hat{x}$, der durch einen und nur einen Wert von x genügt wird; dann ist „das x, das dem $\varphi\hat{x}$ genügt" eine Beschreibung, die eindeutig einen bestimmten Gegenstand beschreibt, mögen wir vielleicht auch nicht wissen, welchen Gegenstand sie beschreibt. Wenn z. B. y ein Mensch ist, so muß „x ist der Vater von y" für einen und nur einen Wert von x wahr sein. Daher ist „der Vater von y" eine Beschreibung eines bestimmten Menschen, mögen wir auch nicht wissen, *welchen* Menschen sie beschreibt. Ein Ausdruck mit „das" setzt immer eine Ausgangspropositionalfunktion ohne „das" voraus; so hätten wir statt „x ist der Vater von y" als unsere Ausgangsfunktion „x zeugte y" zu nehmen; dann bedeutet „der Vater von y" den einzigen Wert x, der dieser Propositionalfunktion genügt.

Wenn $\varphi\hat{x}$ eine Propositionalfunktion ist, wird das Symbol „$(\iota x)(\varphi x)$" in unserer Symbolik so gebraucht, daß es immer gelesen werden kann: „das x, das dem $\varphi\hat{x}$ genügt". Wir definieren aber nicht, daß „$(\iota x)(\varphi x)$" für „das x, das dem $\varphi\hat{x}$ genügt" stehe, indem wir etwa diese letztere Wendung als Ausdruck eines Grundbegriffes behandeln. Jeder Gebrauch von „$(\iota x)(\varphi x)$", wobei es scheinbar als Konstituent einer Proposition an Stelle eines Gegenstandes auftritt, wird in Termen der schon verfügbaren Grundbegriffe definiert. Ein Beispiel einer solchen Gebrauchsdefinition gibt die Proposition „$E!(\iota x)(\varphi x)$", die wir sogleich betrachten wollen. Der ganze Gegenstand wird ausführlicher in Kapitel III behandelt.

Das Symbol werde in Vergleich und Gegensatz mit „$\hat{x}(\varphi x)$" gesetzt, das im Gebrauch immer als „die x, die $\varphi\hat{x}$ genügen" gelesen werden kann. Beide Symbole sind unvollständige, nur im Gebrauch definierte Symbole und werden als solche in Kapitel III erörtert. Das Symbol „$\hat{x}(\varphi x)$" hat immer eine Anwendung, nämlich für die durch φx bestimmte Klasse; „$(\iota x)(\varphi x)$" aber hat eine Anwendung nur, wenn dem $\varphi\hat{x}$ durch einen und nur einen Wert von x genügt wird. Man beachte auch, daß der dem Symbol durch die gleich unten gegebene Definition von $E!(\iota x)(\varphi x)$ beigelegte Sinn nicht voraussetzt, daß wir den Sinn von „eins" kennen. Das ist auch für die Definition jedes sonstigen Gebrauches von $(\iota x)(\varphi x)$ charakteristisch.

Wir gehen nun dazu über, „$E!(\iota x)(\varphi x)$" so zu definieren, daß es gelesen werden kann: „Das dem $\varphi\hat{x}$ genügende x existiert". (Man beachte, daß dies ein anderer Sinn von Existenz ist als der, den wir durch „$\exists$" ausdrücken.) Seine Definition ist

$$E!(\iota x)(\varphi x) . = : (\exists c) : \varphi x . \equiv_x . x = c \quad Df,$$

d. h. „das dem $\varphi\hat{x}$ genügende x existiert" soll heißen „es gibt einen Gegenstand c so beschaffen, daß φx wahr ist, wenn $x = c$ ist, sonst aber nicht".

Die folgenden Formen sind äquivalent

$$\vdash :. E!(\iota x)(\varphi x) . \equiv : (\exists c) : \varphi c : \varphi x . \supset_x . x = c,$$
$$\vdash :. E!(\iota x)(\varphi x) . \equiv : (\exists c) . \varphi c : \varphi x . \varphi y . \supset_{x,y} . x = y,$$
$$\vdash :. E!(\iota x)(\varphi x) . \equiv : (\exists c) : \varphi c : x \neq c . \supset_x . \sim\varphi x .$$

Die letzte davon stellt fest, daß „das dem $\varphi\hat{x}$ genügende x existiert" äquivalent ist mit: „es gibt einen dem $\varphi\hat{x}$ genügenden Gegenstand c und jeder andere Gegenstand als c genügt dem $\varphi\hat{x}$ nicht".

Die soeben definierte Art von Existenz deckt eine große Menge von Fällen. So wird z. B. „das vollkommenste Wesen existiert" bedeuten:

$$(\exists c) : x \text{ ist vollkommenst} . \equiv_x . x = c,$$

was unter Heranziehung der letzten der obigen Äquivalenzen äquivalent ist mit

$$(\exists c) : c \text{ ist vollkommenst} : x \neq c . \supset_x . x \text{ ist nicht vollkommenst.}$$

Eine Proposition wie „Apollo existiert" ist tatsächlich von derselben logischen Form, obwohl sie nicht ausdrücklich das Wort *der* enthält. Denn „Apollo" bedeutet in der Tat dasselbe wie „der

Gegenstand mit solchen und solchen Eigenschaften", etwa „der Gegenstand mit den im Handbuch der Altertumswissenschaften aufgezählten Eigenschaften"[1]). Wenn diese Eigenschaften die Propositionalfunktion φx ausmachen, dann bedeutet „Apollo" eben „$(\iota x)(\varphi x)$" und „Apollo existiert" bedeutet „$E!(\iota x)(\varphi x)$". Um eine andere Erläuterung zu wählen: „Der Verfasser von Waverley" bedeutet „der Mensch, der (oder eigentlich der Gegenstand, der) Waverley schrieb". „Scott ist der Verfasser von Waverley" ist also

$$\text{Scott} = (\iota x)(x \text{ schrieb Waverley}).$$

Hier (wie schon früher bemerkt) tritt die Bedeutung der *Identität* im Zusammenhang mit Beschreibungen deutlich hervor.

Die Bezeichnungsweise „$(\iota x)(\varphi x)$", die lang und unpraktisch ist, wird selten verwendet, und wir brauchen sie in der Hauptsache nur, um zu einer anderen überzuleiten, nämlich zu „$R'y$", was bedeutet, „der Gegenstand, der in der Relation R zu y steht". Das heißt, wir setzen

$$R'y = (\iota x)(xRy) \text{ Df.}$$

Der verkehrte Beistrich kann als „von" gelesen werden. So wird „$R'y$" als „das R von y" gelesen. Wenn also R die Relation von Vater zu Sohn ist, bedeutet „$R'y$" dasselbe wie „der Vater von y"; wenn R die Relation von Sohn zu Vater ist, bedeutet „$R'y$" dasselbe wie „der Sohn von y", und das wird nur dann „existieren", wenn y einen und nur einen Sohn hat. $R'y$ ist eine Funktion von y, aber keine Propositionalfunktion; wir werden sie eine *beschreibende* Funktion nennen. Alle gewöhnlichen Funktionen der Mathematik sind von dieser Art, wie sich im Folgenden noch deutlicher zeigen wird. So würde in unserer Bezeichnungsweise „$\sin y$" als „$\sin' y$" geschrieben und „sin" stünde dabei für die Relation, in der $\sin' y$ zu y steht. Statt einer veränderlichen beschreibenden Funktion fy setzen wir $R'y$, wobei die veränderliche Relation R an die Stelle der veränderlichen Funktion f tritt. Eine beschreibende Funktion wird im allgemeinen existieren, solange y einem gewissen Gebiet angehört, aber nicht außerhalb dieses Gebietes; so wird, wenn wir positive Rationalzahlen behandeln, $\sqrt{y}$ sinnvoll sein, wenn y ein vollständiges Quadrat ist, sonst aber nicht; wenn wir reelle Zahlen behandeln und annehmen, daß „$\sqrt{y}$" die *positive* (oder negative) Quadratwurzel bedeute, wird $\sqrt{y}$ unter der Voraussetzung, daß y positiv ist, sinnvoll sein, sonst aber nicht, und so fort. So hat jede beschreibende Funktion etwas, das wir ihr „Definitionsgebiet" oder ihr „Existenzgebiet" nennen können und das folgendermaßen definiert werden kann: Wenn die betreffende Funktion $R'y$ ist, so wird ihr Definitions- oder Existenzgebiet die Klasse jener Argumente y sein, für die wir $E!R'y$ haben, d. h. für die $E!(\iota x)(xRy)$, für die es also ein und nur ein x gibt, das zu y in der Relation R steht.

[1]) Grundsätzlich dasselbe gilt für den mannigfachen Gebrauch von Eigennamen existierender Gegenstände, z. B. für den Gebrauch von Eigennamen für alle Gegenstände, die der Sprecher nur vom Hörensagen, nicht durch persönliche Bekanntschaft kennt.

Wenn R irgendeine Relation ist, wollen wir von $R'y$ als von der „zugeordneten Beschreibungsfunktion" sprechen. Eine große Zahl der konstanten Relationen, die wir gelegentlich einführen werden, sind nur oder doch hauptsächlich wegen ihrer zugeordneten Beschreibungsfunktionen wichtig. In solchen Fällen ist es leichter (obwohl minder korrekt), mit der Festlegung des Sinnes der Beschreibungsfunktion zu beginnen und den Sinn der Relation von dem der Beschreibungsfunktion abzuleiten. Das wird in den folgenden Erklärungen der Bezeichnungsweise geschehen.

Verschiedene beschreibende Funktionen von Relationen. Wenn R eine beliebige Relation ist, so ist die *konverse* Relation von R die Relation, die zwischen y und x gilt, wenn R zwischen x und y gilt. So ist „größer" die konverse Relation von „kleiner", „vorher" von „nachher", „Ursache" von „Wirkung", „Ehemann" von „Ehefrau" usw. Die konverse Relation von R wird $\mathrm{Cnv}'R$ oder $\breve{R}$ geschrieben[1]). Die Definition ist

$$\breve{R} = \hat{x}\hat{y}(yRx) \text{ Df},$$

$$\mathrm{Cnv}'R = \breve{R} \text{ Df}.$$

Die zweite ist keine formal korrekte Definition, da wir erst „Cnv" definieren und dann den Sinn von $\mathrm{Cnv}'R$ ableiten sollten. Es ist aber nicht der Mühe wert, dieses Verfahren in unsere vorliegende einleitende Darstellung aufzunehmen, die es mehr auf Einfachheit als auf formale Korrektheit abgesehen hat.

Eine Relation heißt *symmetrisch*, wenn $R = \breve{R}$, d. h. wenn sie zwischen y und x gilt, sobald sie zwischen x und y gilt (und darum gegenseitig). Identität, Verschiedenheit, Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit in irgendeiner Hinsicht sind symmetrische Relationen. Eine Relation heißt *asymmetrisch*, wenn sie mit ihrer konversen unverträglich ist, d. h. wenn $R \dot{\frown} \breve{R} = \dot{\Lambda}$, oder, was äquivalent ist, wenn

$$xRy \,.\supset_{x,y}.\, \sim(yRx).$$

[1]) Die zweite dieser Bezeichnungsweisen ist SCHRÖDERS „Algebra und Logik der Relative" entnommen.

Vorher und nachher, größer und kleiner, Vorfahre und Nachkomme sind asymmetrisch, wie es überhaupt alle Relationen sind, die zu *Reihen* führen. Es gibt aber auch viele asymmetrische Relationen, die nicht zu Reihen führen, z. B. die des Bruders der Ehefrau[1]). Eine Relation kann auch weder symmetrisch noch asymmetrisch sein; das gilt z. B. von der Einschließungsrelation zwischen Klassen: $\alpha \subset \beta$ und $\beta \subset \alpha$ werden beide wahr sein, wenn $\alpha = \beta$, sonst aber wird höchstens eine von ihnen wahr sein. Die Relation Bruder ist weder symmetrisch noch asymmetrisch, denn wenn x der Bruder von y ist, kann y sowohl Bruder als auch Schwester des x sein.

In der Propositionalfunktion xRy nennen wir x das *Referens* und y das *Relat*. Die Klasse $\hat{x}(xRy)$, bestehend aus allen x, die die Relation R zu y haben, heißt die Klasse der Referentien von y bezüglich R; die Klasse $\hat{y}(xRy)$, bestehend aus allen y, zu denen x die Relation R hat, heißt die Klasse der Relate von x bezüglich R. Diese zwei Klassen werden durch $\overrightarrow{R}\text{‘}y$ bzw. $\overleftarrow{R}\text{‘}x$ bezeichnet. Also

$$\overrightarrow{R}\text{‘}y = \hat{x}(xRy) \text{ Df},$$
$$\overleftarrow{R}\text{‘}x = \hat{y}(xRy) \text{ Df}.$$

Der Pfeil läuft im ersten Fall zu y, um zu zeigen, daß wir es mit Dingen zu tun haben, die *zu* y in der Relation R stehen; er läuft im zweiten Fall weg von x, um zu zeigen, daß die Relation R *von* x zu den Elementen von $\overleftarrow{R}\text{‘}x$ gerichtet ist. Er läuft in der Tat *von* einem Referens und *zu* einem Relat.

Die Bezeichnungen $\overrightarrow{R}\text{‘}y$ und $\overleftarrow{R}\text{‘}x$ sind sehr wichtig und werden ständig verwendet. Wenn R die Relation von Eltern zu Kind ist, gilt: „$\overrightarrow{R}\text{‘}y$ = die Eltern von y, $\overleftarrow{R}\text{‘}x$ = die Kinder von x“. Wir haben

$$\vdash : x \varepsilon \overrightarrow{R}\text{‘}y \,.\equiv.\, xRy$$

und

$$\vdash : y \varepsilon \overleftarrow{R}\text{‘}x \,.\equiv.\, xRy.$$

Diese Äquivalenzen liegen oft dem gewöhnlichen Sprachgebrauch zugrunde. Wir sagen z. B., ohne einen Unterschied zu machen: „x ist ein Bewohner von London“ oder „x bewohnt London“. Wenn wir „R“ für „bewohnen“ setzen, wird „x bewohnt London“

[1]) Diese Relation ist nicht streng asymmetrisch; sie ist es aber, außer wenn der Bruder der Ehefrau auch Ehemann der Schwester ist. In der griechischen Kirche ist die Relation streng asymmetrisch.

zu „xR London“, während „x ist ein Bewohner von London“ zu „$x \varepsilon \overrightarrow{R}\text{‘}$London“ wird.

Statt $\overrightarrow{R}$ und $\overleftarrow{R}$ gebrauchen wir bisweilen sg‘R, gs‘R, wo „sg“ für „sagitta“ steht und „gs“ das „sg“ von rückwärts gelesen ist. So setzen wir

$$\text{sg‘}R = \overrightarrow{R} \text{ Df},$$
$$\text{gs‘}R = \overleftarrow{R} \text{ Df}.$$

Diese Bezeichnungsweisen sind manchmal praktischer als ein Pfeil, wenn die betreffende Relation durch eine Buchstabengruppe statt durch einen einzelnen Buchstaben, wie R, dargestellt ist. So würden wir z. B. lieber sg‘$(R \dot{\frown} S)$ schreiben als einen Pfeil über die ganze Länge von $(R \dot{\frown} S)$ setzen.

Die Klasse aller Terme, die die Relation R zu dem oder jenem Ding haben, heißt das *Gebiet* von R. So wird, wenn R die Relation von Eltern und Kind ist, das Gebiet von R die Klasse der Eltern sein. Wir stellen das Gebiet von R durch „D‘R“[1]) dar. So setzen wir

$$\text{D‘}R = \hat{x}\{(\exists x) \,.\, xRy\} \text{ Df}.$$

Ähnlich heißt die Klasse aller Terme, zu denen dies oder jenes Ding die Relation R hat, das *konverse Gebiet* von R; es ist dasselbe, wie das Gebiet der zu R konversen Relation. Das konverse Gebiet von R wird dargestellt durch „Ɑ‘R“; also

$$\text{Ɑ‘}R = \hat{y}\{(\exists x) \,.\, xRy\} \text{ Df}.$$

Die Summe des Gebietes und des konversen Gebietes heißt das *Feld* und wird durch C‘R dargestellt, also

$$C\text{‘}R = \text{D‘}R \cup \text{Ɑ‘}R \text{ Df}.$$

Das *Feld* ist besonders im Zusammenhang mit Reihen wichtig. Wenn R die ordnende Relation einer Reihe ist, wird C‘R die Klasse von Termen der Reihe sein, D‘R werden alle Terme außer dem letzten sein (wenn es einen solchen gibt), und Ɑ‘R werden alle Terme außer dem ersten sein (wenn es einen solchen gibt). Der erste Term, wenn er existiert, ist das einzige Element von D‘$R \cap -$Ɑ‘R, da er der einzige Term ist, der ein Vorgänger, aber kein Nachfolger ist. Ähnlich ist der letzte Term (wenn es ihn gibt), das einzige Element von Ɑ‘$R \cap -$D‘R. Die Bedingung dafür, daß eine Reihe kein Ende habe, ist Ɑ‘$R \subset$ D‘R, d. h. „jeder Nachfolger ist ein Vorgänger“; die Bedingung fürs Fehlen eines Anfangs ist D‘$R \subset$ Ɑ‘R. Diese Bedingungen sind äquivalent mit D‘$R = C$‘R bzw. Ɑ‘$R = C$‘R.

[1]) Das „Gebiet“ heißt im Original „domain“. (Anm. des Übers.)

Das *relative Produkt* von zwei Relationen R und S ist die Relation, die zwischen x und z gilt, wenn es einen Zwischenterm y gibt, so daß x die Relation R zu y und y die Relation S zu z hat. Das relative Produkt von R und S wird durch $R|S$ dargestellt; so setzen wir

$$R|S = \hat{x}\hat{z}\{(\exists y).xRy.ySz\} \text{ Df},$$

wonach

$$\vdash : x(R|S)z. \equiv .(\exists y).xRy.ySz.$$

So ist „väterliche Tante" das relative Produkt von „Schwester" und „Vater"; „väterliche Großmutter" ist das relative Produkt von „Mutter" und „Vater"; „mütterlicher Großvater" ist das relative Produkt von „Vater" und „Mutter". Das relative Produkt ist nicht kommutativ, aber es folgt dem assoziativen Gesetz, d. h.

$$\vdash .(P|Q)|R = P|(Q|R).$$

Es folgt hinsichtlich der logischen Addition von Relationen auch dem distributiven Gesetz, d. h. wir haben

$$\vdash .P|(Q \dot{\cup} R) = (P|Q) \dot{\cup} (P|R),$$
$$\vdash .(Q \dot{\cup} R)|P = (Q|P) \dot{\cup} (R|P).$$

Hinsichtlich des logischen *Produktes* aber gilt bloß

$$\vdash .P|(Q \dot{\cap} R) \subset (P|Q) \dot{\cap} (P|R),$$
$$\vdash .(Q \dot{\cap} R)|P \subset (Q|P) \dot{\cap} (R|P)$$[1].

Das relative Produkt folgt nicht dem Tautologiegesetz, d. h. wir haben im allgemeinen nicht $R|R = R$. Wir setzen

$$R^2 = R|R \text{ Df}.$$

So ist väterlicher Großvater $=$ (Vater)^2,
mütterliche Großmutter $=$ (Mutter)^2.

Eine Relation heißt *transitiv*, wenn $R^2 \subset R$, d. h. wenn wir immer, wenn xRy und yRz, auch xRz haben oder wenn

$$xRy.yRz. \supset_{x,y,z} .xRz.$$

Relationen, die Reihen bilden, sind immer transitiv; so z. B.

$$x > y.y > z. \supset_{x,y,z} .x > z.$$

Wenn P eine reihenbildende Relation ist, kann P zweckmäßig als „vor" gelesen werden; so wird „$xPy.yPz. \supset_{x,y,z} .xPz$" zu „wenn x vor y und y vor z, dann x immer vor z". Die reihenbildenden Relationen sind besonders durch den Umstand gekennzeichnet, daß sie transitiv und asymmetrisch sind und niemals einen Term mit sich selbst in Beziehung bringen.

[1]) Im Original heißt fälschlich der letzte Term $(Q|R)$. (Anm. d. Übers.)

Wenn P eine reihenbildende Relation ist und wir nicht nur $P^2 \subset P$, sondern $P^2 = P$ haben, dann bildet P eine Reihe, die *überall dicht* ist, d. h. eine solche, in der es zwischen irgend zwei Termen immer wieder welche gibt. Denn in diesem Fall haben wir

$$xPz. \supset .(\exists y).xPy.yPz,$$

d. h. wenn x vor z, so gibt es einen Term y so beschaffen, daß x vor y und y vor z, d. h. es gibt einen Term zwischen x und z. So sind unter den reihenbildenden Relationen diejenigen, die überall dichte Reihen bilden, jene, für die $P^2 = P$.

Viele nicht reihenbildende Relationen sind transitiv, z. B. Identität oder die Einschließungsrelation zwischen Klassen. Solche Fälle ergeben sich, wenn die Relationen nicht asymmetrisch sind. Relationen, die transitiv und symmetrisch sind, bilden eine wichtige Klasse: man kann der Auffassung sein, sie bestünden darin, daß ihre Glieder einige gemeinsame Eigenschaften besitzen.

Mehrfache beschreibende Funktionen. Die Klasse von Termen x, die die Relation R zu einem Element einer Klasse α haben, wird mit $R``\alpha$ oder $R_\epsilon`\alpha$ bezeichnet. Die Definition ist

$$R``\alpha = \hat{x}\{(\exists y).y\epsilon\alpha.xRy\} \text{ Df}.$$

So sei z. B. R die Relation des „Bewohnens" und α die Klasse der Städte; dann ist $R``\alpha =$ Städtebewohner. Es sei $R$ die Relation „kleiner als" unter Rationalzahlen und $\alpha$ die Klasse der Rationalzahlen, die von der Form $1 - 2^{-n}$ sind für ganze Werte von $n$; dann wird $R``\alpha$ aus allen Rationalzahlen kleiner als ein Element von α bestehen, d. i. aus allen Rationalzahlen kleiner als 1. Wenn P eine reihenbildende Relation ist und α irgendeine Klasse von Gliedern der Reihe, so werden die $P``\alpha$ Vorgänger der $\alpha$ sein, d. h. der durch $\alpha$ definierte Schnitt. Wenn $P$ eine Relation ist, so beschaffen, daß $P`y$ immer existiert, wenn $y\epsilon\alpha$, so wird $P``\alpha$ die Klasse aller Terme von der Form $P`y$ sein für Werte von y, die Elemente von α sind; d. h.

$$P``\alpha = \hat{x}\{(\exists y).y\epsilon\alpha.x = P`y\}.$$

So wird ein Element der Klasse „Väter großer Männer" der Vater von y sein, wo y irgendein großer Mann ist. In anderen Fällen wird das nicht gelten; es sei z. B. P die Relation einer Zahl zu irgendeiner Zahl, deren Teiler sie ist; dann wird

$P``$ (gerade Zahlen) $=$ Teiler von geraden Zahlen;

diese Klasse aber besteht nicht aus Termen von der Form „*der* Teiler von x", wobei x eine gerade Zahl ist, denn nicht jede Zahl hat nur *einen* Teiler.

Einerklassen[1]). Man könnte denken, daß die Klasse, deren einziges Glied x ist, mit x identisch sei, aber PEANO und FREGE haben gezeigt, daß das nicht der Fall ist. (Die Gründe, warum das nicht der Fall ist, werden in vorläufiger Form in Kapitel II der Einleitung erklärt werden.) Wir bezeichnen mit „ι'x" die Klasse, deren einziges Element x ist: also

$$\iota\text{'}x = \hat{y}(y = x) \text{ Df},$$

d. h. „ι'x" bedeutet „die Klasse von Gegenständen, die mit x identisch sind".

Die aus x und y bestehende Klasse wird $\iota\text{'}x \cup \iota\text{'}y$ sein; die Klasse, die man durch Hinzufügen von x zu einer Klasse α erhält, wird $\alpha \cup \iota\text{'}x$ sein; die Klasse, die man durch Wegnehmen eines x von einer Klasse α erhält, wird $\alpha - \iota\text{'}x$ sein. (Wir schreiben $\alpha - \beta$ als eine Abkürzung für $\alpha \cap -\beta$.)

Man beachte, daß Einerklassen ohne Bezugnahme auf die Anzahl 1 definiert wurden; tatsächlich verwenden wir Einerklassen zur Definition der Anzahl 1. Diese Anzahl wird definiert als die Klasse von Einerklassen, d. i.

$$1 = \hat{\alpha}\{(\exists x) \,.\, \alpha = \iota\text{'}x\} \text{ Df}.$$

Das führt zu

$$\vdash :. \alpha \varepsilon 1 \,.\equiv : (\exists x) : y \varepsilon \alpha \,.\equiv_y .\, y = x.$$

Daraus erhellt weiter, daß

$$\vdash : \alpha \varepsilon 1 \,.\equiv .\, E! (\iota x)(x \varepsilon \alpha),$$

wonach

$$\vdash : \hat{z}(\varphi z) \varepsilon 1 \,.\equiv .\, E! (\iota x)(\varphi x),$$

d. h. „$\hat{z}(\varphi z)$ ist eine Einerklasse" ist äquivalent mit „das dem $\varphi\hat{x}$ genügende x existiert".

Wenn $\alpha \varepsilon 1$, so ist $\breve{\iota}\text{'}\alpha$ das einzige Element von α, denn das einzige Element von α ist der einzige Term, zu dem α die Relation ι hat. So tritt „$\breve{\iota}\text{'}\alpha$" an die Stelle von „$(\iota x)(\varphi x)$", wenn α für $\hat{z}(\varphi z)$ steht. Im praktischen Gebrauch ist „$\breve{\iota}\text{'}\alpha$" ein zweckmäßigeres Zeichen als „$(\iota x)(\varphi x)$" und wird allgemein statt „$(\iota x)(\varphi x)$" gebraucht.

In der obigen Darstellung wurden die meisten der im vorliegenden Werk verwendeten logischen Bezeichnungsweisen erklärt. In der Anwendung auf verschiedene Teile der Mathematik werden noch andere Definitionen eingeführt; aber die durch diese späteren Definitionen definierten Gegenstände gehören größtenteils eher zur Mathematik als zur Logik. Der Leser, der die oben erklärten Symbole beherrscht, wird finden, daß jede spätere Formel mit Hilfe von verhältnismäßig wenig zusätzlichen Definitionen entziffert werden kann.

[1]) Gemeint sind „singuläre" oder „eingliedrige" Klassen. (Anm. des Übers.)

Kapitel II.

Die Theorie der logischen Typen.

Die Theorie der logischen Typen, die im vorliegenden Kapitel erklärt werden soll, empfahl sich uns in erster Linie durch ihre Eignung, gewisse Widersprüche zu lösen, deren einer der den Mathematikern bestbekannte von BURALI-FORTI ist und die größte Ordinalzahl betrifft. Die in Frage stehende Theorie ist aber nicht gänzlich auf diese mittelbare Empfehlung angewiesen: sie steht auch in einem gewissen Einklang mit dem natürlichen Denken und wird so auch innerlich glaubwürdig. Im folgenden werden wir deshalb die Theorie zunächst um ihrer selbst willen darstellen und sie dann auf die Lösung der Widersprüche anwenden.

I. Das Zirkelfehlerprinzip.

Eine Analyse der zu vermeidenden Paradoxien zeigt, daß sie alle aus einem gewissen fehlerhaften Zirkel entspringen[1]). Dieser fehlerhafte Zirkel entsteht aus der Annahme, eine Menge von Gegenständen könne Elemente enthalten, die nur vermittels der Menge als ganzer definiert werden können. So wird man z. B. vermuten, die Menge der *Propositionen* enthalte eine Proposition, die feststellt: „alle Propositionen sind wahr oder falsch". Jedoch schiene eine solche Behauptung nur legitim sein zu können, wenn „alle Propositionen" auf eine schon definierte Menge bezogen wäre; und das wieder ist nicht möglich, wenn durch Behauptungen über „alle Propositionen" immer neue Propositionen gebildet werden. Wir werden darum sagen müssen, daß Behauptungen über „alle Propositionen" sinnlos sind. Allgemeiner: Es sei irgendeine Vielheit von Gegenständen gegeben, so daß diese Vielheit unter der Voraussetzung, sie bilde eine Gesamtheit, Elemente enthalten soll, die diese Gesamtheit voraussetzen; dann kann eine solche Vielheit keine Gesamtheit bilden. Mit der Wendung, eine solche Vielheit bilde keine „Gesamtheit", meinen wir zunächst, daß man keine sinnvolle Behauptung über „alle ihre Elemente" aufstellen kann. Propositionen müssen, wie die obige Erläuterung zeigt, eine Viel-

[1]) Siehe den letzten Abschnitt dieses Kapitels. Vgl. auch H. POINCARÉ, „Les mathématiques et la logique", Revue de Métaphysique et de Morale, Mai 1906, p. 307.